ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 517.954

В.Н. ЗАХАРОВ

ПРИНЦИП АБСОЛЮТНОГО ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Как известно [1], [2], принцип абсолютного экстремума является одним из способов доказательства единственности решений краевых задач для дифференциальных уравнений. Получено достаточно много экстремальных свойств решений [3]–[5] для уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. В данной работе рассматривается уравнение третьего порядка с тремя переменными.

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}) \equiv \mathcal{U}_{xyz} + a_1\mathcal{U}_{xy} + a_2\mathcal{U}_{xz} + a_3\mathcal{U}_{yz} + b_1\mathcal{U}_x + b_2\mathcal{U}_y + b_3\mathcal{U}_z + c\mathcal{U} = 0 \tag{1}$$

в области G, ограниченной плоскостями $\mathcal{S}_1$ $(x = h,\ 0 \le y \le h - z \le h)$, $\mathcal{S}_2$ $(y = 0,\ 0 \le x \le z \le h)$, $\mathcal{S}_3$ $(z = 0,\ 0 \le y \le x \le h)$ и Γ_0 $(z = x - y,\ 0 \le y \le x \le h)$. Коэффициенты уравнения (1) суть функции трех переменных x, y и z. Они определены в области $\overline{G}$. Будем считать, что

$$a_i, b_i, c, a_{1xy}, a_{2xz}, a_{3yz}, b_{1x}, b_{2y}, b_{3z} \in C(\overline{G}), \quad (i = \overline{1,3}).$$

Умножим оператор $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ на функцию A, которую определим ниже. Нетрудно убедиться, что справедливо следующее тождество:

$$A\mathcal{L}(\mathcal{U}) \equiv (A\mathcal{U}_z)_{xy} + (Aa_1\mathcal{U})_{xy} + (B_1\mathcal{U}_z)_x + (B_2\mathcal{U}_z)_y + (B_3\mathcal{U})_x + (B_4\mathcal{U})_y + B_5\mathcal{U}, \tag{2}$$

где $B_1 = Aa_2 - A_y$, $B_2 = Aa_3 - A_x$, $B_3 = Ab_1 - (Aa_1)_y$, $B_4 = Ab_2 - (Aa_1)_x$, $B_5 = Ac - (Ab_1)_x + (Aa_1)_{xy}$, при условии, что функция A удовлетворяет уравнению

$$A_{xy} - (a_2A)_x - (a_3A)_y + b_3A = 0. \tag{3}$$

Будем считать, что на множестве $G \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ функция A положительна и $\mathcal{L}(\mathcal{U}) \le 0$. Пусть функция $\mathcal{U}(x,y,z)$ достигает своего положительного максимума на множестве $G \cup \mathcal{S}_3$ в точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$. Пусть $P_1(x_1,y_1,z_0)$, $P_2(x_0,y_1,z_0)$, $P_3(x_1,y_0,z_0)$. Тождество (2) проинтегрируем по прямоугольнику $P_0P_1P_2P_3$. Получим

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_1}^{y_0} A\mathcal{L}(\mathcal{U}) dy = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_1}^{y_0} [(A\mathcal{U}_z)_{xy} + (Aa_1\mathcal{U})_{xy} + \\ + (B_1\mathcal{U}_z)_x + (B_2\mathcal{U}_z)_y + (B_{3y}\mathcal{U})_x + (B_{4x}\mathcal{U})_y + B_5\mathcal{U}]\big|_{z=z_0} dy. \tag{4}$$

Предположим, что для функции A выполняются условия

$$a_2(x_0,y,z_0)A(x_0,y,z_0) - A_y(x_0,y,z_0) = B_1(x_0,y,z_0) = 0,$$
$$a_3(x,y_0,z_0)A(x,y_0,z_0) - A_x(x,y_0,z_0) = B_2(x,y_0,z_0) = 0,$$
$$A(x_0,y_0,z_0) = 1.$$

Но тогда

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_1}^{y_0} [(B_1\mathcal{U}_z)_x]\big|_{z=z_0} dy = \int_{y_1}^{y_0} [B_1(x_1,y,z_0)\mathcal{U}_z(x_1,y,z_0) -$$

$$-B_1(x_0,y,z_0)\mathcal{U}_z(x_0,y,z_0)]dy = \int_{y_1}^{y_0} B_1(x_1,y,z_0)\mathcal{U}_z(x_1,y,z_0)dy,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_1}^{y_0} [(B_2\mathcal{U}_z)_y]\big|_{z=z_0} dy = -\int_{x_0}^{x_1} B_2(x,y_1,z_0)\mathcal{U}_z(x,y_1,z_0)dx.$$

Учитывая, что $A > 0$, $\mathcal{L}(\mathcal{U}) \le 0$, из тождества (4) получаем

$$M \equiv \mathcal{U}_z(P_0) + A(P_1)\mathcal{U}_z(P_1) - A(P_2)\mathcal{U}_z(P_2) - A(P_3)\mathcal{U}_z(P_3) +$$
$$+A(P_1)a_1(P_1)\mathcal{U}(P_1) - A(P_2)a_1(P_2)\mathcal{U}(P_2) - A(P_3)a_1(P_3)\mathcal{U}(P_3) -$$
$$-\int_{y_1}^{y_0} B_1(x_1,y,z_0)\mathcal{U}_z(x_1,y,z_0)dy + \int_{x_0}^{x_1} B_2(x,y_1,z_0)\mathcal{U}_z(x,y_1,z_0)dx -$$
$$-\int_{y_1}^{y_0} B_3(x_1,y,z_0)\mathcal{U}(x_1,y,z_0)dy + \int_{x_0}^{x_1} B_4(x,y_1,z_0)\mathcal{U}(x,y_1,z_0)dx \ge$$
$$\ge \mathcal{U}(P_0)\Big\{A(P_1)[-a_1(P_1)] + \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_1}^{y_0} A(x,y,z_0)c(x,y,z_0)dy +$$
$$+\int_{x_0}^{x_1} A(x,y_1,z_0)b_2(x,y_1,z_0)dx + \int_{y_1}^{y_0} A(x_1,y,z_0)[-b_1(x_1,y,z_0)]dy\Big\} +$$
$$+\int_{x_0}^{x_1} [-B_4(x,y_0,z_0)][\mathcal{U}(P_0) - \mathcal{U}(x,y_0,z_0)]dx +$$
$$+\int_{y_1}^{y_0} B_3(x_0,y,z_0)[\mathcal{U}(P_0) - \mathcal{U}(x_0,y,z_0)]dy +$$
$$+\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_1}^{y_0} [-B_5(x,y,z_0)][\mathcal{U}(P_0) - \mathcal{U}(x,y,z_0)]dy.$$

Из этого неравенства следует, что если функция A определяется из уравнения (3), удовлетворяет условиям (4) и на множестве $\overline{G}$ выполняются условия

1) $A > 0$,
2) $a_1 < 0$, $b_1 \le 0$, $b_2 \ge 0$, $c \ge 0$,
3) $B_3 \ge 0$, $B_4 \le 0$, $B_5 \le 0$,

то

$$M > 0. \tag{5}$$

Если функция A определяется условиями (3), (4) и коэффициенты оператора $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ удовлетворяют неравенствам 1)–3), то будем говорить, что выполняются *условия AI*. Итак, доказана

Лемма 1. *Если $\mathcal{L}(\mathcal{U}) \le 0$ на множестве $\overline{G}$, выполняются условия AI и функция $\mathcal{U}(x,y,z)$ достигает своего положительного максимума в точке $P_0 \in G \cup \mathcal{S}_3$, то, каков бы ни был характеристический прямоугольник $P_0P_1P_2P_3$, параллельный плоскости $z = 0$ и целиком лежащий в $G \cup \mathcal{S}_3$, выполняется неравенство* (5).

Аналогично доказывается

Лемма 2. *Если $\mathcal{L}(\mathcal{U}) \ge 0$ на множестве $\overline{G}$, выполняются условия AI и функция $\mathcal{U}(x,y,z)$ достигает своего отрицательного минимума в точке $P_0 \in G \cup \mathcal{S}_3$, то, каков бы ни был характеристический прямоугольник $P_0P_1P_2P_34$, параллельный плоскости $z = 0$ и целиком лежащий в $G \cup \mathcal{S}_3$, выполняется неравенство $M < 0$.*

Теорема 1. *Если $\mathcal{L}(\mathcal{U}) \geq 0$ (≤ 0) на множестве $\overline{G}$, выполняются условия AI, $\mathcal{U}(x,y,z) \equiv 0$, $\mathcal{U}_z(x,y,z) \equiv 0$ на плоскостях $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$, существует положительный максимум (отрицательный минимум) функции $\mathcal{U}(x,y,z)$ в $\overline{G}$, то он достигается на плоскости Γ_0.*

Доказательство. Пусть функция $\mathcal{U}(x,y,z)$ достигает своего положительного максимума в точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ замкнутой области $\overline{G}$. Предположим, что точка P_0 не лежит на плоскости Γ_0. Тогда $P_0 \in G \cup \mathcal{S}_3$, т. к. на плоскостях $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ функция $\mathcal{U}(x,y,z) \equiv 0$. Выберем точки P_i $(i = \overline{1,3})$ так, что $P_1 \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, $P_2 \in \mathcal{S}_2$, $P_3 \in \mathcal{S}_1$. Тогда $\mathcal{U}(P_1) = \mathcal{U}(P_2) = \mathcal{U}(P_3) = \mathcal{U}_z(P_1) = \mathcal{U}_z(P_2) = \mathcal{U}_z(P_3) \equiv 0$ и из леммы 1 следует $\mathcal{U}_z(P_0) > 0$, что невозможно, т. к. в этой точке экстремум. Аналогично доказывается утверждение теоремы, если в точке P_0 достигается отрицательный минимум. □

Заметим, что в качестве функции A можно взять функцию Римана для уравнения

$$A_{xy} + a_2 A_x + a_3 A_y + b_3 A = 0. \tag{6}$$

Такие функции существуют. Пусть, например, в уравнении (1) коэффициенты a_i, b_i, c $(i = \overline{1,3})$ суть постоянные числа. Функция Римана для уравнения (6) известна [6] и имеет вид

$$A = \exp[a_3(x-x_0) + a_2(y-y_0)]\, {}_0\mathcal{F}_1(1;\sigma),$$

где ${}_0\mathcal{F}_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a)_n n!} x^n$, $\sigma = \lambda(x-x_0)(y-y_0)$, $\lambda = a_2 a_3 - b_3$. Так как в области $\overline{G}$ $x > x_0$ и $y < y_0$, то для того чтобы $\sigma \geq 0$, должно выполняться неравенство $b_3 - a_2 a_3 \geq 0$. Нетрудно увидеть, что неравенства 2) будут выполняться при условиях $a_1 a_3 - b_2 \geq 0$, $a_1 a_2 - b_1 \leq 0$. Вычисления дают

$$\begin{gathered}
A_x = \exp[a_3(x-x_0) + a_2(y-y_0)][a_3\, {}_0\mathcal{F}_1(1;\sigma) + \lambda(y-y_0)\, {}_0\mathcal{F}_1(2;\sigma)], \\
A_y = \exp[a_3(x-x_0) + a_2(y-y_0)][a_2\, {}_0\mathcal{F}_1(1;\sigma) + \lambda(x-x_0)\, {}_0\mathcal{F}_1(2;\sigma)], \\
A_{xy} = \exp[a_3(x-x_0) + a_2(y-y_0)][(\lambda + a_2 a_3)\, {}_0\mathcal{F}_1(1;\sigma) + \\
+\lambda a_2(y-y_0)\, {}_0\mathcal{F}_1(2;\sigma) + \lambda a_3(x-x_0)\, {}_0\mathcal{F}_1(2;\sigma)].
\end{gathered}$$

Значит,

$$\begin{gathered}
B_5 = (c - a_1 b_3 - a_2 b_2 - a_3 b_1 + 2a_1 a_2 a_3)\, {}_0\mathcal{F}_1(1;\sigma) + \\
+\lambda[(a_1 a_3 \lambda - b_2)(x-x_0) + (a_1 a_2 \lambda - b_1)(y-y_0)]\, {}_0\mathcal{F}_1(2;\sigma).
\end{gathered}$$

Отсюда следует, что при выполнении неравенств $a_1 > 0$, $b_1 \leq 0$, $b_2 \geq 0$, $c \geq 0$, $b_1 - a_1 a_3 \geq 0$, $b_2 - a_1 a_3 \leq 0$, $b_1 - \lambda a_1 a_2 \leq 0$, $b_2 - \lambda a_1 a_3 \leq 0$, $c - a_1 b_3 - a_2 b_2 - a_3 b_1 + 2a_1 a_2 a_3 \leq 0$ коэффициенты исследуемого уравнения удовлетворяют условиям AI и, следовательно, справедлива теорема 1.

Задача $\mathcal{D}$. *Найти непрерывное в замкнутой области $\overline{G}$ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\begin{gathered}
\mathcal{U}(x,y,z)|_{\mathcal{S}_1} = f(y,z), \\
\mathcal{U}(x,y,z)|_{\mathcal{S}_2} = g(x,z), \\
\mathcal{U}(x,y,z)|_{\Gamma_0} = \varphi(x,y).
\end{gathered}$$

Теорема 2. *Если выполняются условия AI и существует решение задачи $\mathcal{D}$, то оно единственно.*

Доказательство. Достаточно показать, что решение задачи $\mathcal{D}$ с нулевыми краевыми условиями тождественно равно нулю. Пусть $\mathcal{U}(x,y,z)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее нулевым краевым условиям. Так как эта функция непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$, то по теореме Вейерштрасса она достигает в ней своих наибольшего и наименьшего значений. Пусть она достигает своего наибольшего положительного значения (в противном случае рассмотрели бы функцию $\vartheta(x, y, z) = -\mathcal{U}(x, y, z))$ в точке M_0. Тогда выполнены все условия теоремы 1. Следовательно, $M_0 \in \Gamma_0$. Так как на этой плоскости функция $\mathcal{U}(x, y, z)$ тождественно равна нулю, то наибольшее значение этой функции в замкнутой области $\overline{G}$ тоже равно нулю. Аналогично доказывается, что и наименьшее значение функции в $\overline{G}$ равно нулю. Отсюда следует, что в $\overline{G}$ $\mathcal{U}(x, y, z) \equiv 0$. $\square$

Литература

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 416 с.
2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
3. Бицадзе А.В. О некоторых задачах смешанного типа // ДАН СССР. – 1950. – Т. 70. – № 4. – С. 561–565.
4. Волкодавов В.Ф. Единственность решения задачи T для общего уравнения Трикоми // Тр. первой науч. конф. матем. каф. пед. ин-тов Поволжья. – Куйбышев, 1961. – С. 45–49.
5. Пулькин С.П. К вопросу о решении задачи Трикоми для уравнения типа Чаплыгина // Изв. вузов. Математика. – 1958. – № 2. – С. 219–226.
6. Волкодавов В.Ф., Захаров В.Н. Таблицы функций Римана и Римана–Адамара для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерных евклидовых пространствах. – Самара, 1994. – 31 с.

Самарский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 11.03.1997
окончательный вариант 30.11.1998