ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 6 (529)

УДК 517.928

В.Б. ЛЕВЕНШТАМ, Г.Л. ХАТЛАМАДЖИЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРИИ УСРЕДНЕНИЯ НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ СЛАГАЕМЫЕ С БОЛЬШИМИ АМПЛИТУДАМИ. ЗАДАЧА О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ

В основных теоремах классической теории усреднения Н.Н. Боголюбова [1] речь идет о системах обыкновенных дифференциальных уравнений в так называемой стандартной форме, т. е. представимых в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \omega t), \tag{0.1}$$

где вектор-функция $f(x,\tau)$ обладает средним по τ, а ω — большой параметр. В случае T-периодической вектор-функции $f(x,\tau)$ в [1] рассматривалась, в частности, задача о $T\omega^{-1}$-периодических решениях уравнения (0.1) в окрестности стационарного решения $\overset{0}{x}$ усредненной задачи

$$\frac{dy}{dt} = F(y).$$

В этом случае

$$F(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(y,\tau)d\tau$$

и, очевидно, $F(\overset{0}{x}) = 0$.

В дальнейшем классическая теория усреднения получила существенное развитие, охватив многие важные классы уравнений. Отметим известные работы [2]–[5] по теории усреднения. В них имеются и результаты, относящиеся к задаче о периодических решениях различных уравнений. В [6]–[8] также представлена эта задача.

Данная работа посвящена распространению теории усреднения на случай задачи о $T\omega^{-1}$-периодических решениях системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \omega t) + \sqrt{\omega}\varphi(x, \omega t), \quad \omega \gg 1, \tag{0.2}$$

где вектор-функция $\varphi(x,\tau)$ является T-периодической по τ с нулевым средним. Наличие в уравнении (0.2) большого слагаемого с коэффициентом $\sqrt{\omega}$ приводит к иному, нежели в случае уравнения (0.1), усредненному уравнению (1.1) (см. ниже). При этом важно отметить, что добавление в (0.1) слагаемого $\omega^\alpha\varphi(x,\omega t)$ при $\alpha < 1/2$ не меняет усредненного уравнения. В связи с этим показатель $\alpha = 1/2$ в [9] назван первым перестроечным показателем. При построении асимптотики используем тот же алгоритм, который применялся в [10], [11] при создании асимптотики решения задачи Коши.

Работа выполнена при финансовой поддержке научной программы "Университеты России", грант № УР.04.01.029, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00287-а.

1. Обоснование метода усреднения

1°. Пусть D — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\Omega = \{(x,t) : x \in D,\ t \in \mathbb{R}^1\}$. Предположим, что вектор-функции $f(x,\tau)$ и $\varphi(x,\tau)$ определены на множестве Ω, принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) $f(x,\tau)$ и $\varphi(x,\tau)$ непрерывны на Ω, T-периодичны по переменной τ и непрерывно дифференцируемы по $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
2) среднее $\langle\varphi\rangle(x) = \langle\varphi(x,\tau)\rangle$ вектор-функции $\varphi(x,\tau)$ по τ равно нулю:

$$\langle\varphi\rangle(x) \equiv T^{-1}\int_0^T \varphi(x,\tau)d\tau = 0;$$

3) $\varphi(x,\tau)$ дважды дифференцируема по x и при этом производные $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_\ell}$ непрерывны, $1 \leqslant k,\ell \leqslant n$;
4) усредненное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \langle f(y,\tau)\rangle + \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,\tau)\int_0^\tau \varphi(y,s)ds\Big\rangle \equiv \Phi(y), \tag{1.1}$$

где $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,\tau) = \big(\frac{\partial\varphi_i(y,\tau)}{\partial y_j}\big)_{i,j=1}^n$ — якобиева матрица вектор-функции $\varphi(y,\tau)$ относительно y, имеет стационарное решение $\overset{0}{y}$;
5) решение $\overset{0}{y}$ невырождено, т. е. матрица $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(\overset{0}{y})$ обратима.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ обычное банахово пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с sup-нормой. Через $C_\gamma(\mathbb{R})$, $\gamma \in [0,1]$, обозначим обычное банахово пространство таких вектор-функций, удовлетворяющих равномерному условию Гёльдера с показателем γ.

При выполнении указанных выше условий имеет место

Теорема 1.1. *Существуют такие положительные числа ω_0, r_0, ρ_0, σ_0, c_0 и ρ_1, что при $\omega > \omega_0$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Уравнение (0.2) имеет единственное в шаре $\|x - \overset{0}{y}\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant r_0$ $T\omega^{-1}$-периодическое решение $x_\omega(t)$, и при этом*

$$\lim_{\omega\to\infty} \|x_\omega - \overset{0}{y}\|_{C(\mathbb{R})} = 0.$$

2. *Если спектр Λ матрицы $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(\overset{0}{y})$лежит в левой открытой комплексной полуплоскости, то решение x_ω экспоненциально устойчиво равномерно относительно ω и начальных данных, т. е. для любых $\tau \in \mathbb{R}$ и $\overset{0}{x} \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|\overset{0}{x} - x_\omega(\tau)| \leqslant \rho_0$, задача Коши для уравнения (0.2) с начальным условием $x(\tau) = \overset{0}{x}$ имеет единственное решение $\overset{0}{x}(t)$, $t \geqslant \tau$, и при этом выполняется оценка*

$$|x_\omega(t) - \overset{0}{x}(t)| < c_0 \exp[\sigma_0(\tau - t)]|x_\omega(\tau) - \overset{0}{x}(\tau)|, \quad t \geqslant \tau.$$

3. *Если спектр Λ содержит хотя бы одну точку в правой открытой комплексной полуплоскости, то решение x_ω неустойчиво, т. е. существует такая последовательность t_k положительных чисел и такая последовательность векторов $\overset{k}{x} \in \mathbb{R}^n$, что $\overset{k}{x} \to x_\omega(0)$, задача Коши для уравнения (0.2) с начальным условием $x(0) = \overset{k}{x}$ имеет решение $\overset{k}{x}(t)$, $t \in [0, t_k]$, и при этом*

$$|\overset{k}{x}(t_k) - x_\omega(t_k)| \geqslant \rho_1.$$

Доказательство теоремы 1.1 изложено в пп. 2°–3°.

2°. В этом пункте докажем утверждение 1 теоремы 1.1. Доказательство проводится в три этапа. Вначале в уравнении (0.2) осуществляется замена переменных Крылова–Боголюбова, с помощью которой уничтожаются члены уравнения, пропорциональные $\sqrt{\omega}$; затем от задачи о $T\omega^{-1}$-периодических решениях преобразованного уравнения делается переход к соответствующему интегральному уравнению; и, наконец, на третьем этапе к полученному на втором этапе интегральному оператору применяется теорема о неявных операторах.

В ходе доказательства теоремы 1.1 будет использована

Лемма 1.1. *Пусть $\alpha > 0$. Тогда для любого $q > 0$ найдется такое $\omega_1 > 0$, что при всех $\omega > \omega_1$ и всех $x \in D$, $t \in \mathbb{R}$ выполняются оценки*

$$\omega^{-\alpha}\left|\int_0^{\omega t} \varphi(x,\tau)d\tau\right| < q, \quad \omega^{-\alpha}\left\|\int_0^{\omega t} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\tau)d\tau\right\| < q.$$

Здесь $\|A\|$ — норма матрицы $A = (a_{ij})$. Например, $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$.

Доказательство. Поскольку матричнозначная функция $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\tau)$ является T-периодической по τ с нулевым средним, то вторая оценка леммы 1.1 устанавливается, как и первая, на доказательстве которой и остановимся.

Для любого $s \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\int_s^{s+T} \varphi(x,\tau)d\tau = \int_0^T \varphi(x,\tau)d\tau + \int_T^{s+T} \varphi(x,\tau)d\tau - \int_0^s \varphi(x,\tau)d\tau.$$

Во втором интеграле справа делаем замену переменных $\tau = \tau' + T$ и, учитывая T-периодичность вектор-функции $\varphi(x,\tau)$ по τ и равенство $\langle\varphi(x,\tau)\rangle = 0$, получим

$$\int_s^{s+T} \varphi(x,\tau)d\tau = T\langle\varphi(x,\tau)\rangle = 0. \tag{1.2}$$

Пусть k — целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant \omega t - kT < T$. Из соотношения

$$\int_0^{\omega t} \varphi(x,\tau)d\tau = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{iT}^{(i+1)T} \varphi(x,\tau)d\tau + \int_{kT}^{\omega t} \varphi(x,\tau)d\tau$$

(в случае $k = 0$ в правой части равенства присутствует лишь последнее слагаемое) и равенства (1.2) вытекает оценка

$$\left|\omega^{-\alpha}\int_0^{\omega t} \varphi(x,\tau)d\tau\right| \leqslant \omega^{-\alpha}TM,$$

где $M = \sup\limits_{\substack{x\in D\\ \tau\in[0,T]}} |\varphi(x,\tau)|$. Таким образом, доказываемая оценка справедлива при $\omega > (\frac{TM}{q})^{1/\alpha}$. $\square$

Обозначим через D_0 внутреннюю выпуклую подобласть области D такую, что $\overset{0}{y} \in D_0$. Через S_0 обозначим множество непрерывно-дифференцируемых вектор-функций $y : \mathbb{R} \to D_0$. Воспользовавшись леммой 1.1, подберем такое $\omega_1 > 0$, что при $\omega > \omega_1$ и всех $y \in S_0$ значения вектор-функций

$$x(t) \equiv y(t) + \omega^{-1/2}\int_0^{\omega t} \varphi[y(t),\tau]d\tau \tag{1.3}$$

принадлежат D и имеет место оценка

$$\omega^{-1/2}\left\|\int_0^{\omega t} \frac{\partial\varphi}{\partial y}[y(t),\tau]d\tau\right\| < \frac{1}{2}.$$

Обозначим через D_1 строго внутреннюю выпуклую подобласть области D, содержащую все значения вектор-функции $x(t)$, определяемые формулой (1.3).

Произведя в (0.2) при $\omega > \omega_1$ замену переменных Крылова–Боголюбова (1.3), получим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(y, \omega t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, \omega t) \int\limits_0^{\omega t} \varphi(y, s) ds + R(y, t, \omega) \equiv g(y, \omega t) + R(y, t, \omega), \tag{1.4}$$

где

$$R(y,t,\omega) = (E+\mu_\omega)^{-1} f(y+K_\omega, \omega t) - f(y, \omega t) + \\ + \sqrt{\omega}\left\{ (E+\mu_\omega)^{-1}[\varphi(y+K_\omega, \omega t) - \varphi(y, \omega t)] - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, \omega t) K_\omega \right\},$$

$$K_\omega(y,t) = \omega^{-1/2} \int_0^{\omega t} \varphi(y, \tau) d\tau, \quad \mu_\omega(y,t) = \omega^{-1/2} \int_0^{\omega t} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, \tau) d\tau.$$

Лемма 1.2. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\omega_1 > 0$ такое, что при всех $y \in D_0$, $\omega > \omega_1$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняются оценки*

$$|R(y,t,\omega)| < \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial R}{\partial y}(y,t,\omega) \right\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Обозначим

$$\begin{aligned} R_1(y,t,\omega) &= (E+\mu_\omega)^{-1} f(y+K_\omega, \omega t) - f(y, \omega t) = \\ &= [(E+\mu_\omega)^{-1} - E] f(y+K_\omega, \omega t) + [f(y+K_\omega, \omega t) - f(y, \omega t)] \equiv \\ &\equiv R_{11}(y,t,\omega) + R_{12}(y,t,\omega), \\ R_2(y,t,\omega) &\equiv R(y,t,\omega) - R_1(y,t,\omega), \\ m &= \sup_{\substack{x \in D_1 \\ \tau \in \mathbb{R}}} |f(x,\tau)|. \end{aligned}$$

По лемме 1.1 найдется такое $\omega_{21} > 0$, что при всех $\omega > \omega_{21}$, $y \in D_0$ и $t \in \mathbb{R}$ будет выполнено неравенство $\|\mu_\omega(y,t)\| < \min\left(\frac{\varepsilon}{8m}, \frac{1}{2}\right)$. Тогда $R_{11}(y,t,\omega) \leqslant \frac{\|\mu_\omega\|}{1-\|\mu_\omega\|} m < \frac{\varepsilon}{4}$.

Заметим, что в силу T-периодичности функции f по второму аргументу она равномерно непрерывна в области $\Omega_1 = D_1 \times \mathbb{R}$. Отсюда, с учетом леммы 1.1, следует существование такого $\omega_{22} > 0$, что при всех $\omega > \omega_{22}$, $y \in D_0$, $t \in \mathbb{R}$ справедливо $|R_{12}(y,t,\omega)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Переходим к оценке R_2. Имеем

$$R_2(y,t,\omega) = \sqrt{\omega}\Big\{ [(E+\mu_\omega)^{-1} - E][\varphi(y+K_\omega, \omega t) - \varphi(y, \omega t)] + \\ + \left[\varphi(y+K_\omega, \omega t) - \varphi(y, \omega t) - \frac{\partial \varphi(y, \omega t)}{\partial y} K_\omega \right] \Big\} \equiv \sqrt{\omega}\{R_{21}(y,t,\omega) + R_{22}(y,t,\omega)\}.$$

Воспользуемся следующей оценкой, аналог которой получен в лемме 1.1: для всех $\omega > 0$, $x \in D_1$, $t \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\|\mu_\omega(x,t)\| < m_1 T \omega^{-1/2}$, где $m_1 = \sup\limits_{\substack{x \in D_1 \\ \tau \in \mathbb{R}}} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\tau)\right|$. С учетом этого, а также соображений, использованных при оценке слагаемого R_{12}, убедимся в существовании такого числа $\omega_{23} > 0$, что при всех $\omega > \omega_{23}$

$$|\sqrt{\omega} R_{21}(y,t,\omega)| \leqslant \sqrt{\omega} \frac{\|\mu_\omega\|}{1 - \|\mu_\omega\|} \frac{\varepsilon}{8 m_1 T} \leqslant \sqrt{\omega} m_1 T \omega^{-1/2} \frac{\varepsilon}{4 m_1 T} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Переходим ко второму слагаемому. С помощью формулы конечных приращений получаем соотношения

$$|\sqrt{\omega}R_{22}(y,t,\omega)| = \sqrt{\omega}\left|\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y+\alpha K_\omega,\omega t)d\alpha K_\omega - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,\omega t)K_\omega\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int_0^1 \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y+\alpha K_\omega,\omega t) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,\omega t)\right]d\alpha\right\|\sqrt{\omega}|K_\omega|.$$

В силу равномерной непрерывности $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ на Ω_1 и оценки, полученной в лемме 1.1, существует такое $\omega_{24}>0$, что при всех $\omega>\omega_{24}$, $y\in D_0$, $t\in\mathbb{R}$ справедливо $|\sqrt{\omega}R_{22}(y,t,\omega)| < \frac{\varepsilon}{4TM}TM = \frac{\varepsilon}{4}$.

Таким образом, для $\omega > \max\{\omega_{21},\omega_{22},\omega_{23},\omega_{24}\}$, $y\in D_0$, $t\in\mathbb{R}$ имеем оценку $|R(y,t,\omega)|\leqslant\varepsilon$.

Теперь заметим, что при таких же ω справедливы соотношения

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y_i}(E+\mu_\omega(y,t))^{-1}\right\| = \left\|[E+\mu_\omega(y,t)]^{-1}\frac{\partial\mu_\omega}{\partial y_i}(y,t)[E+\mu_\omega(y,t)]^{-1}\right\| \leqslant 2\omega^{-1/2}Tm_2 2 = 4Tm_2\omega^{-1/2},$$

где $i=1,2,\ldots,n$, $m_2 = \max\limits_{\substack{x\in D_1\\ \tau\in\mathbb{R}}}\left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,\tau)\right\| \equiv \max\limits_{\substack{x\in D_1\\ \tau\in\mathbb{R}}}\sqrt{\sum\limits_{i,j,k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_j\partial x_k}(x,\tau)\right]^2}$. Утверждение леммы о $\frac{\partial R}{\partial y}$ доказывается с использованием последней оценки, а также соображений, аналогичных тем, которые применялись в случае с R. $\square$

Обозначим через $C([0,T_0])$ и $C_\gamma([0,T_0])$, где $T_0>0$, $\gamma\in[0,1]$, банаховы пространства вектор-функций $x:[0,T_0]\to\mathbb{R}^n$, аналогичные введенным выше пространствам $C(\mathbb{R})$ и $C_\gamma(\mathbb{R})$ соответственно.

Из равенства (1.3) легко видеть, что утверждение 1 теоремы 1.1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1.3. [1] *Существуют такие числа ω_1 и r_1, что при $\omega>\omega_1$ уравнение* (1.4) *имеет единственное в шаре $\|y-\overset{0}{y}\|_{C(R)}\leqslant r_1$ $T\omega^{-1}$-периодическое решение $y_\omega(t)$, и при этом для каждого $\mu\in(0,1)$*

$$\lim_{\omega\to\infty}\|y_\omega-\overset{0}{y}\|_{C_\mu(R)}=0.$$

Доказательству леммы 1.3 посвящена остальная часть этого пункта.

В уравнении (1.4) сделаем замену переменных $y=u+\overset{0}{y}$, а затем перепишем полученное уравнение в виде

$$\frac{du}{dt} - F'(\overset{0}{y})u = g(u+\overset{0}{y},\omega t) - F'(\overset{0}{y})u + R(u+\overset{0}{y},t,\omega) \equiv Z(u,t,\omega), \tag{1.5}$$

где для краткости использовано обозначение $F'(\overset{0}{y}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\overset{0}{y})$.

Поскольку по условию спектр $\sigma(F'(\overset{0}{y}))$ матрицы $F'(\overset{0}{y})$ не содержит нуля, то найдется такое $T_1>0$, что $\sigma(T_1F'(\overset{0}{y}))$ не содержит точек Tki, $k\in Z$. Действительно, если при некотором $T_0>0$ спектр $\sigma(T_0F'(\overset{0}{y}))$ содержит несколько таких точек, то, ввиду их конечности (т. к. само множество $\sigma(T_0F'(\overset{0}{y}))$ конечно), в качестве T_1 можно, очевидно, взять любое достаточно близкое к T_0, но отличное от него число. Далее, обозначим $t_\omega = [T^{-1}\omega T_1]T\omega^{-1}$, где $[a]$ — целая часть числа a, и подберем такое ω^*, что при $\omega>\omega^*$ множество $\sigma(t_\omega F'(\overset{0}{y}))$ не содержит точек Tki,

[1] Лемма 1.3, по существу, является следствием теоремы 2 работы [6], относящейся к абстрактным параболическим уравнениям. Для полноты изложения здесь приводится доказательство этой леммы, при этом используется несколько иной путь, нежели в [6].

$k \in Z$. Как известно [12], задача о t_ω-периодических решениях уравнения (1.5) эквивалентна уравнению

$$u(t) = \int_0^{t_\omega} G_\omega(t-s) Z(u(s), s, \omega) ds \equiv [N_\omega(u)](t), \tag{1.6}$$

где

$$G_\omega(t) = \begin{cases} e^{tF'(\overset{0}{y})}[E - e^{t_\omega F'(\overset{0}{y})}]^{-1}, & \text{если } 0 \leqslant t; \\ e^{(t+t_\omega)F'(\overset{0}{y})}[E - e^{t_\omega F'(\overset{0}{y})}]^{-1}, & \text{если } t < 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

При этом для удобства уравнение (1.6) будем исследовать не на всей прямой $t \in \mathbb{R}$, а на участке $t \in [0, T_1]$. Такое сужение задачи оправдано тем легко устанавливаемым фактом, что каждое решение уравнения (1.6) на участке $t \in [0, T_1]$, будучи t_ω-периодическим образом продолженным на всю прямую $t \in \mathbb{R}$, является решением уравнения (1.5) на всей прямой $t \in \mathbb{R}$.

Определим теперь оператор $M : C_\mu([0, T_1]) \times (\omega^*, \infty] \to C_\mu([0, T_1])$, $\mu \in (0, 1)$, действующий по правилу

$$M(u, \omega) = \begin{cases} N_\omega(u), \quad \omega < \infty; \\ \int\limits_0^{T_1} G_\infty(t-s)\{F(u(s) + \overset{0}{y}) - F'(\overset{0}{y})u(s)\} ds, \quad \omega = \infty, \end{cases}$$

где $G_\infty(t) = G_\omega(t)\big|_{t_\omega = T_1}$ (см. (1.7)). Отметим очевидное равенство $M(0, \infty) = 0$.

Лемма 1.4. *Оператор $M(u, \omega)$ непрерывен в точке $(u, \omega) = (0, \infty)$ и имеет производную Фреше $(D_u M)(u, \omega)$ по переменной u, которая также непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Введем операторы $M_0 : C_\mu([0, T_1]) \times (\omega^*, +\infty] \to C[0, T_1]$ и $M_1 : C_\mu([0, T_1]) \times (\omega^*, +\infty] \to C_1[0, T_1]$, действующие по тому же закону, что и оператор M. Легко доказать, что существует такая постоянная c_0, при которой выполняются оценки

$$\sup_{\substack{\|u\|_{C_\mu(0,T_1)} \leq 1 \\ \omega > \omega_*}} \|M_1(u, \omega)\|_{C_1([0,T_1])} \leqslant c_0,$$
$$\sup_{\substack{\|u\|_{C_\mu(0,T_1)} \leq 1 \\ \omega > \omega_*}} \|D_u M_1(u, \omega)\|_{\mathrm{Hom}(C_\mu([0,T_1]), C_1([0,T_1]))} \leqslant c_0.$$

(Через $\mathrm{Hom}(B_1, B_2)$, где B_1, B_2 — банаховы пространства, обозначается банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из B_1 в B_2, с обычной операторной нормой.)

Из этих оценок и известного интерполяционного неравенства [6]

$$\|x\|_{C_\mu([0,T_1])} \leqslant \|x\|_{C([0,T_1])} + (2\|x\|_{C([0,T_1])})^{1-\mu} \|x\|^\mu_{C_1([0,T_1])}$$

следует, что для доказательства леммы 1.4 достаточно ее доказать для оператора M_0.

Займемся сначала доказательством непрерывности оператора M_0 в точке $(0, \infty)$. Докажем больше, а именно, непрерывность оператора $M_{00} : C([0, T_1]) \times (\omega^*, \infty] \to C([0, T_1])$, являющегося непрерывным расширением оператора M_0.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем такие $\overset{1}{\omega} > \omega^*$ и $\delta > 0$, чтобы для всех $\omega > \overset{1}{\omega}$, $\|u\|_{C[0,T_1]} < \delta$ выполнялось неравенство $\|M_{00} u\|_{C[0,T_1]} < \varepsilon$.

Очевидно, существуют такие $m_3 > 0$, $\overset{1}{\omega}_1 > \omega^*$, что при любых $\omega > \overset{1}{\omega}_1$ справедлива оценка $\|[E - e^{t_\omega F'(\overset{0}{y})}]^{-1}\| < m_3$. Ясно также, что при $t \in [0, T_1]$ имеет место соотношение $\|e^{tF'(\overset{0}{y})}\| \leqslant e^{T_1 \|F'(\overset{0}{y})\|}$. Обозначим $m_4 \equiv \max\left(m_3 e^{T_1\|F'(\overset{0}{y})\|}, 1\right)$.

Оценим теперь равномерно по $t \in [0, T_1]$

$$\int_0^t e^{(t-s)F'(\overset{0}{y})} Z(u(s), s, \omega) ds = \int_0^t e^{(t-s)F'(\overset{0}{y})} \big[g(u(s) + \overset{0}{y}, \omega s) - g(\overset{0}{y}, \omega s)\big] ds +$$
$$+ \int_0^t e^{(t-s)F'(\overset{0}{y})} g(\overset{0}{y}, \omega s) ds - \int_0^t e^{(t-s)F'(\overset{0}{y})} F'(\overset{0}{y}) u(s)\, ds +$$
$$+ \int_0^t e^{(t-s)F'(\overset{0}{y})} R(u(s) + \overset{0}{y}, s, \omega) ds \equiv I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t).$$

Оценим I_1. В силу равномерной непрерывности функции g в области Ω_1 существует такое δ_1, что при $\|u\|_{C(0,T_1)} < \delta_1$, $s \in [0, T_1]$, $\omega > 0$ выполняется оценка

$$\big|g(u(s) + \overset{0}{y}, \omega s) - g(\overset{0}{y}, \omega s)\big| < \frac{\varepsilon}{8m_4 T_1} e^{-T_1 \|F'(\overset{0}{y})\|}.$$

Отсюда для $\|u\|_{C(0,T_1)} < \delta_1$ вытекает неравенство $|I_1(t)| < \frac{\varepsilon}{8m_4}$, справедливое для всех $t \in [0, T_1]$.

Перейдем к $I_2(t)$. Обозначим через $t_1 = t_1(\omega, t)$ максимальное из кратных числа $\frac{T}{\omega}$, не превосходящих t. Введем точки $\tau_j = \frac{T}{\omega} j$ $(j = 0, 1, \ldots, N = \frac{t_1 \omega}{T})$. Тогда для любого $t \in [0, T_1]$, используя равенство $\langle g(\overset{0}{y}, \cdot)\rangle = 0$, запишем

$$|I_2(t)| = \Big| \sum_{j=1}^{N} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} [e^{(t-s)F'(\overset{0}{y})} - e^{(t-\tau_j)F'(\overset{0}{y})}] g(\overset{0}{y}, \omega s) ds +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} e^{(t-\tau_j)F'(\overset{0}{y})} g(\overset{0}{y}, \omega s) ds + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)F'(\overset{0}{y})} g(\overset{0}{y}, \omega s) ds \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big| \sum_{j=1}^{N} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \int_s^{\tau_j} F'(\overset{0}{y}) e^{(t-\tau)F'(\overset{0}{y})} g(\overset{0}{y}, \omega s) d\tau ds \Big| +$$
$$+ \Big| \sum_{j=1}^{N} e^{(t-\tau_j)F'(\overset{0}{y})} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} g(\overset{0}{y}, \omega s) ds \Big| + \frac{T}{\omega} e^{T_1 \|F'(\overset{0}{y})\|} (m + m_1 T M) \leqslant$$
$$\leqslant \Big| \sum_{j=1}^{N} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \|F'(\overset{0}{y})\| e^{T_1 \|F'(\overset{0}{y})\|} (\tau_j - s)(m + m_1 T M) ds \Big| +$$
$$+ \frac{T}{\omega} e^{T_1 \|F'(\overset{0}{y})\|} (m + m_1 T M) \leqslant \Big(\frac{T_1}{2} \|F'(\overset{0}{y})\| + 1 \Big) \frac{T}{\omega} e^{T_1 \|F'(\overset{0}{y})\|} (m + m_1 T M).$$

Здесь M, m и m_1 — те же, что и в леммах 1.1, 1.2. Тогда для

$$\omega > \overset{1}{\omega}_2 \equiv \varepsilon^{-1} 8 m_4 \Big(\frac{T_1}{2} \|F'(\overset{0}{y})\| + 1\Big) T e^{T_1 \|F'(\overset{0}{y})\|} (m + m_1 T M)$$

выполняется оценка $|I_2| < \frac{\varepsilon}{8m_4}$.

Займемся теперь слагаемым I_3. Для $\|u\|_{C[0,T_1]} < \frac{\varepsilon}{8m_4 T_1 \|F'(\overset{0}{y})\|} e^{-T_1 \|F'(\overset{0}{y})\|} \equiv \delta_2$ при любом $t \in [0, T_1]$ имеем $|I_3(t)| < \frac{\varepsilon}{8m_4}$.

Оценим, наконец, I_4. По лемме 1.2 существует такое $\overset{1}{\omega}_3 > 0$, что при всех $\omega > \overset{1}{\omega}_3$, $u + \overset{0}{y} \in D_0$, $t \in \mathbb{R}$ имеем неравенство $|R(u + \overset{0}{y}, t, \omega)| < \frac{\varepsilon}{8m_4 T_1} e^{-T_1 \|F'(\overset{0}{y})\|}$. Поэтому найдется такое $\delta_3 > 0$, что при $\omega > \overset{1}{\omega}_3$, $\|u\|_{C[0,T_1]} < \delta_3$, $t \in [0, T_1]$ справедлива оценка $|I_4(t)| < \frac{\varepsilon}{8m_4}$.

Следовательно, взяв $\overset{2}{\omega} = \max(\overset{1}{\omega}_1, \overset{2}{\omega}_2, \overset{1}{\omega}_3)$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, при $\omega > \overset{2}{\omega}$, $\omega \neq +\infty$, $\|u\|_{C[0,T]} < \delta$ получаем оценку

$$\|M_\omega u\|_{C[0,T_1]} = \max_{t\in[0,T_1]} \left| [E - e^{t_\omega F'(\overset{0}{y})}]^{-1} e^{tF'(\overset{0}{y})} \int_0^{t_\omega} e^{(t_\omega - s)F'(\overset{0}{y})} Z(u(s), \omega s) ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^t e^{(t-s)F'(\overset{0}{y})} Z(u(s), \omega s) ds \right| < m_3 e^{T_1 \|F'(\overset{0}{y})\|} \frac{\varepsilon}{2m_4} + \frac{\varepsilon}{2m_4} \leqslant \varepsilon.$$

Для $\omega = +\infty$, $\|u\|_{C[0,T_1]} < \delta$ такая оценка тоже справедлива. Это можно доказать методами, примененными в случае $\omega \neq +\infty$: в аналоге слагаемого I_1 вместо g стоит функция F, непрерывная в точке $\overset{0}{y}$, интегралы типа I_2 и I_4 равны нулю, а I_3 остается без изменения.

На доказательстве существования производной Фреше $D_u M_0(u, \omega)$ и ее непрерывности в точке $(u, \omega) = (0, +\infty)$ останавливаться не будем. Отметим лишь, что непрерывность доказывается аналогично непрерывности M_{00} в точке $(0, +\infty)$. □

Лемма 1.3 вытекает из леммы 1.4, теоремы о неявных операторах и следующих двух простых предложений.

Лемма 1.5. *Пусть $\mu \in (0,1)$ и ω_1 достаточно велико. Тогда для любого $a_0 > 0$ найдется такое $a_1 > 0$, что при $\omega > \omega_1$ для каждого решения u_ω уравнения* (1.5), *удовлетворяющего неравенству $\|u_\omega\|_{C(\mathbb{R})} \leq a_1$, справедлива оценка $\|u_\omega\|_{C_\mu(\mathbb{R})} \leq a_0$.*

Доказательство. Из уравнения (1.5) следует равномерная относительно $\omega > \omega_1$ ограниченность величины $\|u_\omega\|_{C_1(\mathbb{R})}$. Из этого факта и использовавшегося выше интерполяционного неравенства вытекает требуемое утверждение. □

Лемма 1.6. *Всякое t_ω-периодическое решение уравнения* (1.5), *единственное в каком-либо шаре $\|u\|_{C(\mathbb{R})} < a$, $a > 0$, является $T\omega^{-1}$-периодическим.*

Доказательство. Если $u(t)$ — решение (1.5), то $v(t) = u(t + T\omega^{-1})$ — также его решение, в чем убеждаемся непосредственной подстановкой. В силу же относительной единственности решения получаем $u(t) = v(t) = u(t + T\omega^{-1})$. □

Итак, лемма 1.3, а с ней и утверждение 1 теоремы 1.1 доказаны.

Замечание. В силу леммы 1.3, формулы (1.3) и использовавшегося выше интерполяционного неравенства разность $x_\omega - \overset{0}{y}$ удовлетворяет более сильному соотношению. Именно, при любом $\mu \in (0, 1/2)$ справедливо равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} \|x_\omega - \overset{0}{y}\|_{C_\mu(R)} = 0.$$

3°. Здесь мы докажем утверждения 2 и 3 теоремы 1.1.

Лемма 1.7. *Пусть $v_1, v_2 \in D_0$. При $\omega > 0$, $t \in \mathbb{R}$ обозначим*

$$u_1(t,\omega) = v_1 + \omega^{-1/2} \int_0^{\omega t} \varphi(v_1, \tau)\, d\tau, \tag{1.8}$$

$$u_2(t,\omega) = v_2 + \omega^{-1/2} \int_0^{\omega t} \varphi(v_2, \tau)\, d\tau. \tag{1.9}$$

Тогда при $t \in \mathbb{R}$ и при любых $\omega > 4T^2 m_3^2$, где $m_3 = \sup\limits_{\substack{x\in D_0 \\ \tau\in\mathbb{R}}} \|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\tau)\|$, имеют место неравенства

$$\frac{1}{2}|v_1 - v_2| \leqslant |u_1(t,\omega) - u_2(t,\omega)| \leqslant 2|v_1 - v_2|.$$

Доказательство. Вычитая из уравнения (1.8) уравнение (1.9) и применяя формулу конечных приращений, получим равенство

$$u_1(t,\omega) - u_2(t,\omega) = (v_1 - v_2) + \omega^{-1/2} \int_0^{\omega t} \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\theta v_1 + (1-\theta)v_2, \tau) d\theta\, d\tau (v_1 - v_2). \quad \square$$

Из ([6], теорема 2) по существу следуют аналоги утверждений 2 и 3 теоремы 1.1 для $\frac{T}{\omega}$-периодического решения $y_\omega(t)$ уравнения (1.4), которые запишем в следующем виде.

Лемма 1.8. *Справедливы два утверждения.*

1. *Если спектр Λ лежит в левой открытой полуплоскости, то y_ω экспоненциально устойчиво равномерно относительно ω и начальных данных. Иными словами, существуют такие положительные числа ω_2, ρ_2, σ_1, c_1, что при любых $\omega > \omega_2$, $\tau \in \mathbb{R}$, $y_0 \in D_0$ из окрестности $|y_0 - y_\omega(\tau)| < \rho_2$ задача Коши для уравнения (1.4) с начальным условием*
$$y(\tau) = y_0 \tag{1.10}$$
имеет единственное решение $\overset{0}{y}_\omega(t)$, $t \geqslant \tau$, и при этом выполняется неравенство
$$|y_\omega(t) - \overset{0}{y}_\omega(t)| < c_1 e^{-\sigma_1(t-\tau)} |y_\omega(\tau) - y_0|, \quad t \geqslant \tau. \tag{1.11}$$
2. *Если спектр Λ содержит хотя бы одну точку в правой открытой комплексной полуплоскости, то решение y_ω неустойчиво, т. е. существуют такие положительные числа ω_3, ρ_3, что для любых $\omega > \omega_3$ найдется последовательность положительных чисел t'_k и последовательность векторов $\overset{k}{y} \in D_0$, $\overset{k}{y} \xrightarrow[k\to\infty]{} y_\omega(0)$, при которых задача Коши для уравнения (1.3) с начальным условием $y(0) = y_0$ имеет решение $\overset{k}{y}_\omega(t)$, $t \in [0, t'_k]$, и при этом $|\overset{k}{y}_\omega(t'_k) - y_\omega(t'_k)| \geqslant \rho_3$.*

До конца раздела будем пользоваться обозначениями, введенными в формулировках теоремы 1.1 и лемм 1.7, 1.8. Получим сначала утверждение 2 теоремы 1.1.

Возьмем $\omega_0 = \max(\omega_2, \omega_3, \frac{16}{\rho_2^2} T^2 m_2^2, 4T^2 m_3^2)$, где $m_2 = \sup\limits_{\substack{x\in D_0\\ \tau\in\mathbb{R}}} |\varphi(x,\tau)|$, $\rho_0 = \frac{\rho_2}{2}$, $\sigma_0 = \sigma_1$, $c_0 = 4c_1$. Зафиксируем произвольно $\omega > \omega_0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ из $|x_0 - x_\omega(\tau)| \leqslant \rho_0$ и рассмотрим задачу Коши для уравнения (0.2) с начальным условием
$$x(\tau) = x_0. \tag{1.12}$$
Введем $y_0 = y_0(\tau,\omega)$ с помощью замены $x_0 = y_0 + \omega^{-1/2} \int\limits_0^{\omega\tau} \varphi(y_0, s) ds$. Существование и единственность такого y_0 легко получить с помощью принципа сжатых отображений.

Заметим, что $|y_0 - y_\omega(\tau)| \leqslant |y_0 - x_0| + |x_0 - x_\omega(\tau)| + |x_\omega(\tau) - y_\omega(\tau)| < \rho_2$. Значит, по лемме 1.8 задача Коши (1.4), (1.10) имеет единственное решение $\overset{0}{y}_\omega(t)$ при $t \geqslant \tau$, и выполняется соотношение (1.11). Тогда функция $\overset{0}{x}_\omega(t) \equiv \overset{0}{y}_\omega(t) + \omega^{-1/2} \int\limits_0^{\omega\tau} \varphi(\overset{0}{y}_\omega(t), s) ds$ является единственным решением задачи Коши (0.2), (1.12) при $t \geqslant \tau$, при этом
$$|x_\omega(t) - \overset{0}{x}_\omega(t)| \leqslant 2|y_\omega(t) - \overset{0}{y}_\omega(t)| \leqslant 2c_1 e^{-\sigma_1(t-\tau)} |y_\omega(\tau) - y_0| \leqslant$$
$$\leqslant 4c_1 e^{-\sigma_1(t-\tau)} |x_\omega(\tau) - x_0| \equiv c_0 e^{-\sigma_0(t-\tau)} |x_\omega(\tau) - x_0|.$$

Выведем теперь утверждение 3 теоремы 1.1. В качестве ρ_1 берем $\frac{\rho_3}{2}$. Выберем любое $\omega > \omega_0$. По лемме 1.8 находим t'_k, y_k $(k \in \mathbb{N})$, соответствующие этому ω, и полагаем $t_k = t'_k$, $\overset{k}{x} = \overset{k}{y}$ $(k \in \mathbb{N})$. Тогда функция $\overset{k}{x}_\omega(t) \equiv \overset{k}{y}_\omega(t) + \omega^{-1/2} \int\limits_0^{\omega t} \varphi(\overset{k}{y}_\omega(t), s) ds$ — решение задачи Коши для уравнения (0.2) с начальным условием $x(0) = \overset{k}{x}$. Кроме того, $\overset{k}{x} = \overset{k}{y} \xrightarrow[k\to\infty]{} y_\omega(0) = x_\omega(0)$. Наконец, по лемме 1.7 $|\overset{k}{x}_\omega(t) - x_\omega(t)| \geqslant \frac{1}{2}|\overset{k}{y}_\omega(t) - y_\omega(t)| \geqslant \rho_1$. Третье утверждение, а с ним и теорема 1.1 доказаны.

2. Асимптотика периодического решения

Предположим, что вектор-функции $f(x,\tau)$ и $\varphi(x,\tau)$ удовлетворяют указанным в п. 1° раздела 1 условиям и, кроме того, имеют непрерывные производные по x любого порядка. Старшие приближения решения x_ω будем искать в виде

$$\overset{m}{x}_\omega(t) = \overset{0}{y} + \sum_{k=1}^{m} \omega^{-k/2}[u_k + v_k(\omega t)], \tag{2.1}$$

где u_k — векторы $\mathbb{R}^n$, а $v_k(\tau)$ — T-периодические вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^n$, имеющие нулевые средние. Для нахождения коэффициентов u_k, v_k подставим правую часть равенства (2.1) вместо x в уравнение (0.2), формально разложим $f(\overset{m}{x}_\omega,\tau)$ и $\varphi(\overset{m}{x}_\omega,\tau)$ в ряды Тейлора по переменной x с центром $x = \overset{0}{y}$ и приравняем затем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра $\varepsilon = \omega^{-1/2}$. К каждому из полученных таким образом уравнений применим операцию $\langle \dots \rangle$ усреднения по τ, получим условия разрешимости этих уравнений. В результате каждое уравнение распадется на два равенства: 1) условие разрешимости, которое не содержит зависящих от τ слагаемых, а потому конечное; 2) являющееся разностью самого уравнения и его условия разрешимости. Так, для коэффициента $v_1(\tau)$ получаем задачу

$$\frac{dv_1}{d\tau} = \varphi(\overset{0}{y},\tau), \quad \langle v_1 \rangle = 0,$$

которая, очевидно, имеет единственное решение

$$v_1(\tau) = \int_0^\tau \varphi(\overset{0}{y},s)ds - \Big\langle \int_0^\tau \varphi(\overset{0}{y},s)ds \Big\rangle.$$

Для y_0 выводим равенство $\Phi(\overset{0}{y}) = 0$, которое выполнено по предположению п. 1° раздела 1. Легко убедиться, что далее описанным способом придем к следующей рекуррентной цепочке соотношений:

$$\frac{dv_k}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\overset{0}{y},\tau)u_{k-1} + \varphi_k(\tau), \quad \langle v_k \rangle = 0,$$
$$\Phi'(\overset{0}{y})u_{k-1} = b_{k-1}, \quad k = 2,3,\dots,$$

где вектор-функции φ_k и векторы b_k на каждом шаге k известны, причем $\langle \varphi_k(\tau) \rangle = 0$.

Теорема 2.1. *Для любого $m = 0,1,\dots$ найдутся такие положительные числа c_m и ω_m, что при $\omega > \omega_m$ выполняются оценки*

$$\|x_\omega(t) - \overset{m}{x}_\omega\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant c_m \omega^{-\frac{m+1}{2}}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $m \in \mathbb{Z}_+$. Приближение $\overset{m}{x}_\omega$ в силу его построения удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\overset{m}{x}_\omega(t)}{dt} = f(\overset{m}{x}_\omega(t),\omega t) + \omega^{1/2}\varphi(\overset{m}{x}_\omega(t),\omega t) + \omega^{-\frac{m-1}{2}}\chi(t,\omega), \tag{2.2}$$

где $\|\chi(\cdot,\omega)\|_{C(\mathbb{R})} < M_1$ при всех $\omega \geqslant 1$. Здесь константа M_1 не зависит от ω.

В уравнении (2.2) произведем замену

$$\overset{m}{x}_\omega(t) = \overset{m}{y}_\omega(t) + \omega^{-1/2}\int_0^{\omega t} \varphi(\overset{m}{y}_\omega(t),\tau)d\tau. \tag{2.3}$$

При этом существование функции $\overset{m}{y}_\omega$ при больших ω в некоторой окрестности $\overset{0}{y}$ в $C(\mathbb{R})$ легко получить, применив теорему о неявных операторах к уравнению

$$(N(y,\omega))(t) \equiv y - \overset{m}{x}_\omega + \omega^{-1/2} \int_0^{\omega t} \varphi(y,\tau) d\tau = 0.$$

В результате замены приходим к уравнению

$$\frac{d\overset{m}{y}_\omega(t)}{dt} = g(\overset{m}{y}_\omega(t), \omega t) + R(\overset{m}{y}_\omega(t), t, \omega) + \omega^{-\frac{m-1}{2}} \chi_1(t,\omega), \tag{2.4}$$

где $\chi_1(t,\omega) = (I + \mu_\omega(\overset{m}{y}_\omega(t), t))^{-1} \chi(t,\omega)$. Здесь вектор-функции g, R и μ_ω — те же, что и в разделе 1.

Вычтем из уравнения (2.4) уравнение (1.4) и обозначим $z_\omega(t) = \overset{m}{z}_\omega(t) \equiv y_\omega(t) - \overset{m}{y}_\omega(t)$. Тогда при $\omega > \omega_1$, где ω_1 достаточно велико, справедливо равенство

$$\frac{d\overset{m}{z}_\omega(t)}{dt} = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(\theta y_\omega(t) + (1-\theta)\overset{m}{y}_\omega(t), \omega t) d\theta z_\omega(t) + \\ + \int_0^1 \frac{\partial R}{\partial x}(\theta y_\omega(t) + (1-\theta)\overset{m}{y}_\omega(t), \omega t) d\theta z_\omega(t) - \omega^{-\frac{m-1}{2}} \chi_1(t,\omega). \tag{2.5}$$

Вычтем из обеих частей этого уравнения выражение $F'(\overset{0}{y}) z_\omega(t)$:

$$\frac{d\overset{m}{z}_\omega(t)}{dt} - F'(\overset{0}{y}) z_\omega(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\overset{0}{y}_\omega, \omega t) - F'(\overset{0}{y})\right] z_\omega(t) + \\ + \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\theta y_\omega(t) + (1-\theta)\overset{m}{y}_\omega(t), \omega t) - \frac{\partial g}{\partial x}(\overset{0}{y}, \omega t)\right] d\theta + \right. \\ \left. + \int_0^1 \frac{\partial R}{\partial x}(\theta y_\omega(t) + (1-\theta)\overset{m}{y}_\omega(t), \omega t) d\theta \right\} z_\omega(t) - \omega^{-\frac{m-1}{2}} \chi_1(t,\omega) \equiv \\ \equiv B_1(\omega t) z_\omega(t) + B_2(t,\omega) z_\omega(t) - \omega^{-\frac{m-1}{2}} \chi_1(t,\omega) \equiv b(t,\omega).$$

Перейдем теперь к интегральному уравнению

$$z_\omega(t) = [E - e^{t_\omega F'(\overset{0}{y})}]^{-1} e^{tF'(\overset{0}{y})} \int_0^{t_\omega} e^{(t_\omega - \tau)F'(\overset{0}{y})} b(\tau,\omega) d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)F'(\overset{0}{y})} b(\tau,\omega) d\tau \equiv v_\omega(t).$$

Найдем такое $\omega_2 > 0$, чтобы при всех $\omega > \omega_2$ выполнялось неравенство

$$\|v_\omega\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{2} \|z_\omega\|_{C(\mathbb{R})} + O(\omega^{-\frac{m-1}{2}}).$$

Достаточно получить аналогичную оценку в $C[0,T_1]$.

Заметим, что существуют такие $\omega_3 > \omega^*$, $M_2 > 0$, что при всех $\omega > \omega_3$, $t \in [0,T_1]$ справедливы соотношения

$$\|[E - e^{t_\omega F'(\overset{0}{y})}]^{-1} e^{tF'(\overset{0}{y})}\| < M_2, \quad |\chi_1(t,\omega)| < 2M_1.$$

Далее из уравнения (2.5) следует, что найдется такое $M_3 > 0$, что для всех $\omega > \omega_1$ имеет место неравенство

$$\left\|\frac{dz_\omega}{dt}\right\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant M_3 \|z_\omega\|_{C(\mathbb{R})} + 2M_1 \omega^{-\frac{m-1}{2}}. \tag{2.6}$$

Введем обозначения:

$$m_1 = \sup_{\substack{x\in D_1\\ \tau\in\mathbb{R}}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x,\tau) \right\|, \quad m_2 = \sup_{\substack{x\in D_1\\ \tau\in\mathbb{R}}} |\varphi(x,\tau)|,$$

$$m_3 = \sup_{\substack{x\in D_1\\ \tau\in\mathbb{R}}} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\tau) \right\|, \quad m_4 = \sup_{\substack{x\in D_1\\ \tau\in\mathbb{R}}} \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,\tau) \right\|, \quad M_4 = m_1 + m_4 T m_2 + m_3^2 T.$$

С учетом (2.6), поступая так же, как и при оценке слагаемого I_2 в лемме 1.4, можно показать, что при $\omega > \omega_4 \equiv 4(M_2+1)Te^{T_1\|F'(\overset{0}{y})\|}M_4[T_1\|F'(\overset{0}{y})\| + T_1M_3 + 2]$ справедлива оценка

$$\left| \int_0^t e^{(t-\tau)F'(\overset{0}{y})} B_1(\omega\tau) z_\omega(\tau)d\tau \right| < \frac{1}{4(M_2+1)} \|z_\omega\|_{C(\mathbb{R})} + M_5\omega^{-\frac{m-1}{2}}$$

для всех $t\in[0,T_1]$. Здесь $M_5 \equiv \frac{T}{\omega_4}e^{T_1\|F'(\overset{0}{y})\|}2M_4M_1T_1$. Так как y_ω, $\overset{m}{y}_\omega$ близки к $\overset{0}{y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ непрерывна, $\frac{\partial R}{\partial x}$ мала, то для ω, бóльших некоторого ω_5, имеет место соотношение

$$\left| \int_0^t e^{(t-\tau)F'(\overset{0}{y})} B_2(\tau,\omega) z_\omega(\tau)d\tau \right| \leqslant \frac{1}{4(M_2+1)} \|z_\omega\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Ясно также, что при $\omega > \omega_3$ выполняется неравенство

$$\left| \int_0^t e^{(t-\tau)F'(\overset{0}{y})} \omega^{-\frac{m-1}{2}} \chi_1(\omega,\tau)d\tau \right| \leqslant M_6\omega^{-\frac{m-1}{2}}, \quad M_6 \equiv T_1 e^{T_1\|F'(\overset{0}{y})\|}2M_1.$$

Таким образом, существует такое ω_6, что при всех $\omega > \omega_6$

$$\|z_\omega\|_{C(\mathbb{R})} = \|v_\omega\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{2}\|z_\omega\|_{C(\mathbb{R})} + M_8\omega^{-\frac{m-1}{2}}, \tag{2.7}$$

где $M_8 \equiv (M_2+1)(M_5+M_6)$.

Из (2.7) следует соотношение

$$\|z_\omega\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant 2M_8\omega^{-\frac{m-1}{2}}.$$

Из него и леммы 1.7 при $\omega > \omega_2 \equiv \max(\omega_6, 4T^2m_3^2)$ вытекает оценка

$$\|x_\omega - \overset{m}{x}_\omega\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant 4M_8\omega^{-\frac{m-1}{2}}.$$

Так как последняя оценка может быть получена для всех $m\in\mathbb{Z}_+$, то существуют такие $M_9>0$, $M_{10}>0$, $\omega_0>\omega_2$, что при всех $\omega>\omega_0$ справедлива цепочка неравенств

$$\|x_\omega - \overset{m}{x}_\omega\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant \|x_\omega - \overset{m+2}{x}_\omega\|_{C(\mathbb{R})} + \|\overset{m}{x}_\omega - \overset{m+2}{x}_\omega\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant M_{10}\omega^{-\frac{m+1}{2}} + M_9\omega^{-\frac{m+1}{2}} \equiv c_m\omega^{-\frac{m+1}{2}}. \quad \square$$

Литература

1. Боголюбов Н.Н. *О некоторых статистических методах в математической физике.* – Киев: Изд-во АН УССР, 1945 – 139 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* – М.: Наука, 1974. – 504 с.
3. Митропольский Ю.А. *Метод усреднения в нелинейной механике.* – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
4. Волосов В.М., Моргунов Б.И. *Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.* – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
5. Филатов А.Н. *Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях.* – Ташкент: ФАН, 1971. – 279 с.
6. Симоненко И.Б. *Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений* // Матем. сб. – 1970. – Т. 81. – № 1. – С. 53–61.

7. Стрыгин В.В. *Одна теорема о существовании периодических решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Матем. заметки. – 1970. – Т. 8. – № 2. – С. 229–234.
8. Lehman B., Strygin V. *Partial and generalized averaging of functional differential equations* // Funct. Different. Equat. – 2002. – V. 9. – № 1–2. – P. 165–200.
9. Юдович В.И. *Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями.* – Деп. в ВИНИТИ. 17.07.2003, № 1407-В2003. – 48 с.
10. Стрыгин В.В. *Об одной модификации метода усреднения при отыскании высших приближений* // ПММ. – 1984. – Т. 48. – Вып. 6. – С. 1042–1045.
11. Стрыгин В. В. *Об асимптотическом интегрировании уравнений движения механических систем, находящихся под воздействием быстро осциллирующих сил* // ПММ. – 1989. – Т. 53. – Вып. 3. – С. 845–853.
12. Красносельский М.А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1966. – 331 с.

Ростовский государственный университет

Поступили
первый вариант 26.12.2003
окончательный вариант 12.04.2005