ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 12 (547)

УДК 517.929

Д. КРУПКА

СТРУКТУРА ОТОБРАЖЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА

1. Введение

Цель статьи — дать обзор свойств отображения Эйлера–Лагранжа, используемого в вариационном исчислении высшего порядка на расслоенных многообразиях. Эти свойства изучаются уже достаточно давно, причем с использованием разнообразных идей. В данной работе обсуждаются свойства ядра отображения Эйлера–Лагранжа (состоящего из *вариационно тривиальных* или *нуль*-лагранжианов), *образ* этого отображения (*обратная проблема* вариационного исчисления) и его *инвариантные свойства* (*теория Нетер*).

Примем следующие обозначения: Y — тотальное пространство расслоения с базой X и проекцией π, J^rY — расслоение r-струй сечений расслоения Y, $\pi^{r,s} : J^rY \to J^sY$, $\pi^r : J^rY \to X$ — канонические проекции расслоений струй. Полагаем $n = \dim X$ и $m = \dim Y - n$. Для любого открытого множества $W \subset Y$ обозначим $W^r = (\pi^{r,0})^{-1}(W)$. Для карт будем использовать стандартные обозначения: карту на J^rY, ассоциированную с расслоенной картой (V,ψ), $\psi = (x^i, y^\sigma)$ на Y, где $1 \leq n \leq m$ и $1 \leq \sigma \leq m$, будем обозначать через (V^r, ψ^r), $\psi^r = (x^i, y^\sigma, y^\sigma_{j_1}, y^\sigma_{j_1 j_2}, \dots, y^\sigma_{j_1 j_2 \dots j_r})$. Через $\Omega^r W$ будем обозначать внешнюю алгебру форм на W^r; через $\Omega^r_p W$ ($\Omega^r_{p,X} W$, $\Omega^r_{p,Y} W$) — модуль p-форм (π^r-горизонтальных, $\pi^{r,0}$-горизонтальных p-форм). Отметим также, что обратный образ формы α при отображении f будет обозначаться $f * \alpha$.

Пусть W — открытое подмножество многообразия Y, λ — лагранжиан порядка r для Y, определенный на W^r, и E_λ — форма Эйлера–Лагранжа лагранжиана λ; E_λ определена на подмножестве $W^{2r} \subset J^{2r}Y$. Напомним, что если на области определения V расслоенной карты (V,ψ), $\psi = (x^i, y^\sigma)$, лагранжиан λ выражается следующим образом:

$$\lambda = \mathcal{L}\omega_0,$$

где *функция Лагранжа* $\mathcal{L}$ зависит от $x^i, y^\sigma, y^\sigma_{j_1}, y^\sigma_{j_1 j_2}, \dots, y^\sigma_{j_1 j_2 \dots j_r}$, то

$$E_\lambda = E_\sigma(\mathcal{L})\omega^\sigma \wedge \omega_0,$$

где $\omega^\sigma = dy^\sigma - y^\sigma_j dx^j$, а компоненты $E_\sigma(\mathcal{L})$ — *выражения Эйлера–Лагранжа*:

$$E_\sigma(\mathcal{L}) = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l d_{p_1} d_{p_2} \dots d_{p_l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\sigma_{p_1 p_2 \dots p_l}}. \tag{1.1}$$

Отображение $\Omega^r_{n,X} W \ni \lambda \to E_\lambda \in \Omega^{2r}_{n+1,Y} W$ называется *отображением Эйлера–Лагранжа*. Элементы модуля $\Omega^r_{n,X} W$ называются *лагранжианами*; элементы модуля $\Omega^s_{n+1,Y} W$ Такенс назвал *формами-источниками*, а Крупкова — *динамическими формами*. Формулы (1.1) известны как *выражения Эйлера–Лагранжа*.

Отображение Эйлера–Лагранжа *линейно* над полем вещественных чисел. Его *ядро* состоит из *вариационно тривиальных*, или *нуль*-лагранжианов, а его *образ* образован *формами-источниками* $\varepsilon \in \Omega^{2r}_{n+1,Y} W$ такими, что $\varepsilon = E_\lambda$ для некоторого лагранжиана λ.

Данная работа поддержана Чешским фондом научных исследований (грант 201/06/0922) и Министерством по делам образования, молодежи и спорта Чешской Республики (грант MSM 6198959214).

В данном обзоре будем использовать сведения, содержащиеся в работах по основам глобального вариационного исчисления: [1] (геометрические идеи вариационного исчисления на грассманианах, регулярность), [2] (форма Пуанкаре–Картана, связности, инвариантные вариационные операторы), [3] (форма Картана первого порядка, векторнозначная форма Эйлера–Лагранжа, гамильтонова теория поля, уравнение Гамильтона–Якоби), [4]–[6] (проблемы высшего порядка, структура контактных форм и операция горизонтализации, лепажевы формы, первая вариация и форма Эйлера–Лагранжа, инвариантность), [7] (инвариантные вариационные функционалы, обобщения теории Нетер). Перечисленные работы оказали существенное влияние на развитие глобального вариационного исчисления в последние десятилетия.

Основные сведения о структуре расслоения струй и ее обобщениях, используемые в данной статье, можно найти в работах [8]–[10]. Наш анализ глобальных интегральных вариационных функционалов основывается на свойствах дифференциальных форм на пространствах струй, в частности, на теории лепажевых форм (см., напр., [4], [5], [11], [6]; обобщения можно найти в [12]).

Первые идеи и результаты, касающиеся обратной задачи вариационного исчисления (для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка), появились более 110 лет назад в работах [13] и [14]; современные результаты по этой проблеме можно найти в предстоящей публикации (O. Krupková. Helmholtz conditions in the geometry of second order ordinary differential equations // Papers in honour of W. Sarlet, Gent University). Конструкции в расслоении струй высшего порядка, связанные с дифференциальными уравнениями в частных производных, изучались в [15]–[18] и во многих других работах, впрочем, не будем углубляться здесь в историю вопроса. Что касается операторов Эйлера–Лагранжа высшего порядка на многообразиях, сошлемся на теорию вариационных бикомплексов и вариационных последовательностей (см. [19], [12], [1], [20]–[23], [18], [24]; см. также библиографию этих работ). Основной инвариантный объект, который появляется в вариационном исчислении в результате этих рассмотрений, — это *форма Гельмгольца*. Описание тривиальных лагранжианов высшего порядка, приведенное в данной статье, взято в основном из [25] и [26]. Теория симметрий разработана в работах Траутмана (см., напр., [7]) и [4], [5]).

Различные понятия, относящиеся к отображению Эйлера–Лагранжа, можно найти в работах [27] (локальные вариационные принципы), [28] (лепажевы формы), [29] (отображение Гельмгольца), [30] (вариационность обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка), [31], а также в [32], [33] (регулярность и преобразование Лежандра).

2. Оператор послойной гомотопии

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $W \subset \mathbb{R}^m$ — открытый шар с центром в начале координат, и $V = U \times W$. Рассмотрим V как расслоение над U относительно проекции на первый сомножитель $\pi : V \to U$, и обозначим через V^s *расслоение струй порядка* s *сечений расслоения* V: $V^s = J^s(U \times W)$, т. е.

$$V^s = U \times W \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \cdots \times L^s_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

где $L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — векторное пространство k-линейных симметричных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Декартовы координаты на V и соответствующие координаты на пространстве струй V^s будем обозначать через x^i, y^σ и $x^i, y^\sigma, y^\sigma_{j_1}, y^\sigma_{j_1 j_2}, \ldots, y^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ соответственно. Через $\zeta_s : U \to V^s$ обозначим *нулевое сечение*.

Рассмотрим отображение χ_s из множества $[0,1] \times V^s$ в V^s:

$$\chi_s(t, (x^i, y^\sigma, y^\sigma_{j_1}, y^\sigma_{j_1 j_2}, \ldots, y^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_s})) = (x^i, ty^\sigma, ty^\sigma_{j_1}, ty^\sigma_{j_1 j_2}, \ldots, ty^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_s});$$

здесь χ_s есть *оператор послойной гомотопии* I_s, переводящий k-форму ρ на V^s, где $k \geq 1$, в $(k-1)$-форму $I_s\rho$ на V^s.

Для того чтобы определить I_s, удобно использовать мультииндексные обозначения. Пусть задана форма $\rho \in \Omega^r_q V$ выражением:

$$\rho = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(q-j)!} A^{I_1\, I_2}_{\sigma_1\, \sigma_2} \cdots^{I_j}_{\sigma_j}{}_{\, i_{j+1} i_{j+2} \dots i_k} dy^{\sigma_1}_{I_1} \wedge dy^{\sigma_2}_{I_2} \wedge \cdots \wedge dy^{\sigma_j}_{I_j} \wedge dx^{i_{j+1}} \wedge dx^{i_{j+2}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad (2.1)$$

где мультииндексы имеют вид $I = (p_1 p_2 \dots p_q)$, и $|I| = q$ — *длина* I; в (2.1) суммирование берется по мультииндексам длины $\leq r$. Тогда

$$I_s \rho = \int I_{s,0} \rho$$

(интегрирование по t от 0 до 1), где $I_{s,0}\rho$ определено разложением

$$\chi \underset{s}{*} \rho = dt \wedge I_{s,0}\rho + I'_s \rho$$

таким, что формы $I_{s,0}\rho$ и $I'_s\rho$ не содержат dt. Отображение χ_s удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered} \chi \underset{s}{*} dx^i = dx^i, \quad \chi \underset{s}{*} dy^\sigma_J = y^\sigma_J dt + t dy^\sigma_J, \quad 0 \leq |J| \leq s, \\ \chi \underset{s}{*} \omega^\sigma_J = y^\sigma_J dt + t \omega^\sigma_J, \quad 0 \leq |J| \leq s-1. \end{gathered} \quad (2.2)$$

Из (2.2) получаем

$$\chi \underset{s}{*} \rho = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j!(q-j)!} A^{I_1\, I_2}_{\sigma_1\, \sigma_2} \cdots^{I_j}_{\sigma_j}{}_{\, i_{j+1} i_{j+2} \dots i_q} \circ \chi_s \cdot (y^{\sigma_1}_{I_1} dt + t dy^{\sigma_1}_{I_1}) \wedge$$
$$\wedge (y^{\sigma_2}_{I_2} dt + t dy^{\sigma_2}_{I_2}) \wedge \cdots \wedge (y^{\sigma_j}_{I_j} dt + t dy^{\sigma_j}_{I_j}) \wedge dx^{i_{j+1}} \wedge dx^{i_{j+2}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q},$$

следовательно,

$$I_{s,0}\rho = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{(j-1)!(q-j)!} y^{\sigma_1}_{I_1} A^{I_1\, I_2}_{\sigma_1\, \sigma_2} \cdots^{I_j}_{\sigma_j}{}_{\, i_{j+1} i_{j+2} \dots i_q} \circ \chi_s \cdot t^{j-1} \cdot$$
$$\cdot dy^{\sigma_2}_{I_2} \wedge dy^{\sigma_3}_{I_3} \wedge \cdots \wedge dy^{\sigma_j}_{I_j} \wedge dx^{i_{j+1}} \wedge dx^{i_{j+2}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$$

и

$$I_s\rho = y^{\sigma_1}_{I_1} \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{(j-1)!(q-j)!} \int A^{I_1\, I_2}_{\sigma_1\, \sigma_2} \cdots^{I_j}_{\sigma_j}{}_{\, i_{j+1} i_{j+2} \dots i_q} \circ \chi_s \cdot t^{j-1} dt \cdot$$
$$\cdot dy^{\sigma_2}_{I_2} \wedge dy^{\sigma_3}_{I_3} \wedge \cdots \wedge dy^{\sigma_j}_{I_j} \wedge dx^{i_{j+1}} \wedge dx^{i_{j+2}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}.$$

Лемма 1. (a) *Отображение χ_s удовлетворяет условию*

$$\rho = I_s d\rho + dI_s\rho + (\pi^s) * \zeta * \rho. \quad (2.3)$$

(b) *Если $d\rho = 0$, то существует $(q-1)$-форма η такая, что*

$$\rho = d\eta. \quad (2.4)$$

Эта лемма легко следует из определений. Действительно, ясно, что $d\rho = 0$ влечет $d\zeta * \rho = 0$; таким образом, чтобы доказать (2.4), можно проинтегрировать форму $\zeta * \rho$, используя лемму Вольтерра-Пуанкаре, и затем применить формулу (2.3).

3. Формальные уравнения дивергенции

В этом разделе показывается, что выражения Эйлера–Лагранжа характеризуют условия интегрируемости так называемых *формальных уравнений дивергенции*, и доказываются две теоремы о решениях формальных уравнений дивергенции; доказательства используемых при этом лемм можно найти в [25]. Будем использовать обозначения, введенные в разделе 2.

Пусть $f : V^r \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Найдем решения $g = (g^1, g^2, \dots, g^n)$ *формального уравнения дивергенции*

$$d_i g^i = f, \tag{3.1}$$

компоненты g^i которого являются дифференцируемыми вещественнозначными функциями на V^s, где s — натуральное число. Так как *формальная дивергенция* $d_i g^i$ определяется уравнением

$$d_i g^i = \frac{\partial g^i}{\partial x^i} + \frac{\partial g^i}{\partial y^\sigma} y_i^\sigma + \frac{\partial g^i}{\partial y_{i_1}^\sigma} y_{i_1 i}^\sigma + \frac{\partial g^i}{\partial y_{i_1 i_2}^\sigma} y_{i_1 i_2 i}^\sigma + \dots + \frac{\partial g^i}{\partial y_{i_1 i_2 \dots i_r}^\sigma} y_{i_1 i_2 \dots i_r i}^\sigma,$$

уравнение (3.1) является дифференциальным уравнением первого порядка. Из этого выражения немедленно получаем, что каждое решение $g = g^i$, определенное на V^s, где $s \geq r+1$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g^{i_1}}{\partial y_{i_2 i_3 \dots i_{s+1}}^\sigma} + \frac{\partial g^{i_2}}{\partial y_{i_1 i_3 i_4 \dots i_{s+1}}^\sigma} + \dots + \frac{\partial g^{i_s}}{\partial y_{i_1 i_2 \dots i_{s-1} i_{s+1}}^\sigma} + \frac{\partial g^{i_{s+1}}}{\partial y_{i_1 i_2 \dots i_s}^\sigma} = 0.$$

Положим

$$\omega_0 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad \omega_i = i_{\partial/\partial x^i} \omega_0, \tag{3.2}$$

и

$$\omega_{j_1 j_2 \dots j_k}^\sigma = dy_{j_1 j_2 \dots j_k}^\sigma - y_{j_1 j_2 \dots j_k l}^\sigma dx^l, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s-1.$$

Для любой гладкой функции $f : V^r \to \mathbb{R}$ определим n-форму λ_f на V^r и систему функций $E_\sigma(f) : V^{2r} \to \mathbb{R}$ с помощью равенств:

$$\lambda_f = f\omega_0,$$
$$E_\sigma(f) = \frac{\partial f}{\partial y^\sigma} - d_{i_1} \frac{\partial f}{\partial y_{i_1}^\sigma} + d_{i_1} d_{i_2} \frac{\partial f}{\partial y_{i_1 i_2}^\sigma} - \dots + (-1)^r d_{i_1} d_{i_2} \dots d_{i_r} \frac{\partial f}{\partial y_{i_1 i_2 \dots i_r}^\sigma}.$$

Форма λ_f является *лагранжианом*, а $(n+1)$-форма

$$E_f = E_\sigma(f) \omega^\sigma \wedge \omega_0$$

есть *форма Эйлера–Лагранжа*, ассоциированная с λ_f.

Рассмотрим π^r-горизонтальную $(n-1)$-форму η на V^r, заданную выражением

$$\eta = g^i \omega_i = \frac{1}{(n-1)!} h_{j_2 j_3 \dots j_n} dx^{j_2} \wedge dx^{j_3} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}. \tag{3.3}$$

Так как

$$\omega_i = \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{i j_2 j_3 \dots j_n} dx^{j_2} \wedge dx^{j_3} \wedge \dots \wedge dx^{j_n},$$

получаем формулы преобразования

$$h_{j_2 j_3 \dots j_n} = \varepsilon_{i j_2 j_3 \dots j_n} g^i, \quad g^k = \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon^{k j_2 j_3 \dots j_n} h_{j_2 j_3 \dots j_n}.$$

В следующем утверждении Alt и Sym означают *альтернирование* и *симметрирование* по соответствующим индексам.

Лемма 2. *Функции g^i и $h_{j_1 j_2 \dots j_{n-1}}$ удовлетворяют уравнениям:*

$$\frac{1}{(r+1)}\varepsilon_{il_2l_3\dots l_n}\left(\frac{\partial g^i}{\partial y^\sigma_{k_1k_2\dots k_r}}+\frac{\partial g^{k_1}}{\partial y^\sigma_{ik_2k_3\dots k_r}}+\frac{\partial g^{k_2}}{\partial y^\sigma_{k_1ik_3k_4\dots k_r}}+\dots+\frac{\partial g^{k_r}}{\partial y^\sigma_{k_1k_2\dots k_{r-1}i}}\right)=$$
$$=\frac{\partial h_{l_2l_3\dots l_n}}{\partial y^\sigma_{k_1k_2\dots k_r}}-\frac{r(n-1)}{(r+1)}\frac{\partial h_{il_3l_4\dots l_n}}{\partial y^\sigma_{ik_2k_3\dots k_r}}\delta^{k_1}_{l_2}\ \mathrm{Alt}(l_2l_3\dots l_n)\ \mathrm{Sym}(k_1k_2\dots k_r).$$

Скажем, что π^r-горизонтальная форма η, определенная на V^r, допускает *проектируемое расширение*, если существует форма μ на V^{r-1} такая, что $\eta = h\mu$.

Лемма 3. *Пусть η — π^r-горизонтальная $(n-1)$-форма на V^r. Предположим, что η разложена по двум различным базисам пространства $(n-1)$-форм, как в* (3.3). *Следующие два условия эквивалентны*:

(a) *η обладает $\pi^{r,r-1}$-проектируемым расширением,*

(b) *компоненты $h_{i_1i_2\dots i_{n-1}}$ удовлетворяют уравнению*

$$\frac{\partial h_{i_1i_2\dots i_{n-1}}}{\partial y^\sigma_{j_1j_2\dots j_r}}-\frac{r(n-1)}{r+1}\frac{\partial h_{si_2i_3\dots i_{n-1}}}{\partial y^\sigma_{sj_2j_3\dots j_r}}\delta^{j_1}_{i_1}=0\ \mathrm{Sym}(j_1j_2\dots j_r)\ \mathrm{Alt}(i_1i_2\dots i_{n-1}),$$

(c) *компоненты g^i удовлетворяют условию* (3.2).

Лемма 4. *Для любой функции $f : V^r \to \mathbb{R}$ существует n-форма Θ, определенная на V^{2r-1}, такая, что* (a) *$\lambda = h\Theta$,* (b) *форма $p_1 d\Theta$ является ω^σ-порожденной.*

За Θ можно взять главный лепажев эквивалент

$$\Theta_f = f\omega_0 + \sum_{k=0}^{s}\left(\sum_{l=0}^{s-k}(-1)^l d_{p_1}d_{p_2}\dots d_{p_l}\frac{\partial f}{\partial y^\sigma_{j_1j_2\dots j_kp_1p_2\dots p_li}}\right)\omega^\sigma_{j_1j_2\dots j_k}\wedge\omega_i,$$

лагранжиана $\lambda = f\omega_0$.

Под *решением* формального уравнения дивергенции (3.1) понимаем любую систему функций $g = g^i$, определенную на V^s для некоторого неотрицательного целого числа s, которая удовлетворяет этому уравнению.

Лемма 5. *Если уравнение формальной дивергенции* (3.1) *обладает решением, определенным на V^s, и $s \geq r+1$, то оно обладает и решением, определенным на V^{s-1}.*

Опишем теперь решения формального уравнения дивергенции.

Теорема 1. *Пусть $f : V^r \to \mathbb{R}$ — функция. Следующие два условия эквивалентны*:

(a) *формальное уравнение дивергенции имеет решение, определенное на V^r;*

(b) *функция f удовлетворяет уравнению*

$$E_\sigma(f) = 0. \tag{3.4}$$

Доказательство. Предположим, что уравнение формальной дивергенции (3.1) имеет решение $g = g^i$. Дифференцируя $d_i g^i$, получим равенства

$$\frac{\partial d_i g^i}{\partial y^\sigma} = d_i\frac{\partial g^i}{\partial y^\sigma},$$

и для любого $k = 1, 2, \dots, r$ имеем

$$\frac{\partial d_i g^i}{\partial y^\sigma_{i_1i_2\dots i_k}} = d_i\frac{\partial g^i}{\partial y^\sigma_{i_1i_2\dots i_k}}+\frac{1}{k}\left(\frac{\partial g^{i_1}}{\partial y^\sigma_{i_2i_3\dots i_k}}+\frac{\partial g^{i_2}}{\partial y^\sigma_{i_1i_3\dots i_k}}+\frac{\partial g^{i_3}}{\partial y^\sigma_{i_2i_1i_4\dots i_k}}+\dots+\frac{\partial g^{i_k}}{\partial y^\sigma_{i_2i_3\dots i_{k-1}}}\right).$$

Используя эти формулы, за несколько шагов можно найти выражения Эйлера–Лагранжа $E_\sigma(f) = E_\sigma(d_i g^i)$. Во-первых, имеем

$$E_\sigma(d_i g^i) = d_{i_1}\left(\frac{\partial g^{i_1}}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial d_s g^s}{\partial y^\sigma_{i_1}} + d_{i_2}\frac{\partial d_s g^s}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2}} - \dots + (-1)^r d_{i_2} d_{i_3}\dots d_{i_r}\frac{\partial d_s g^s}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2\dots i_r}}\right) =$$

$$= d_{i_1} d_{i_2}\left(-\frac{\partial g^{i_2}}{\partial y^\sigma_{i_1}} + \frac{\partial d_s g^s}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2}} - d_{i_3}\frac{\partial d_s g^s}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2 i_3}} + \dots + (-1)^r d_{i_3} d_{i_4}\dots d_{i_r}\frac{\partial d_s g^s}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2\dots i_r}}\right).$$

Далее, симметрируя, получаем

$$E_\sigma(d_i g^i) = d_{i_1} d_{i_2}\Bigg(-\frac{\partial g^{i_2}}{\partial y^\sigma_{i_1}} + d_i\frac{\partial g^i}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{i_1}}{\partial y^\sigma_{i_2}} + \frac{\partial g^{i_2}}{\partial y^\sigma_{i_1}}\right) -$$

$$- d_{i_3}\frac{\partial d_s g^s}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2 i_3}} + \dots + (-1)^r d_{i_3} d_{i_4}\dots d_{i_r}\frac{\partial d_s g^s}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2\dots i_r}}\Bigg) =$$

$$= d_{i_1} d_{i_2} d_{i_3}\left(\frac{\partial g^{i_3}}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2}} - \frac{\partial d_s g^s}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2 i_3}} + \dots + (-1)^r d_{i_4} d_{i_5}\dots d_{i_r}\frac{\partial d_s g^s}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2\dots i_r}}\right).$$

Продолжая этот процесс, после $r-1$ шага приходим к

$$E_\sigma(d_i g^i) = (-1)^r d_{i_1} d_{i_2}\dots d_{i_{r-1}} d_{i_r} d_i\frac{\partial g^i}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2\dots i_r}}. \tag{3.5}$$

Но так как f определена на V^r, решение g уравнения (3.1) необходимо удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g^i}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2\dots i_r}} + \frac{\partial g^{i_1}}{\partial y^\sigma_{i i_2 i_3\dots i_r}} + \frac{\partial g^{i_2}}{\partial y^\sigma_{i_1 i i_3 i_4\dots i_r}} + \dots + \frac{\partial g^{i_{r-1}}}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2\dots i_{r-2} i i_r}} + \frac{\partial g^{i_r}}{\partial y^\sigma_{i_1 i_2\dots i_{r-1} i}} = 0.$$

Используя эту формулу и (3.5), получаем, что выполняется (b).

Наоборот, предположим, что выполняется (b). Покажем, что существуют функции $g^i : V^r \to \mathbb{R}$ такие, что $d_i g^i = f$, или в явном виде

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{j_1}}{\partial y^\sigma} y^\sigma_{j_1} + \frac{\partial g^{j_2}}{\partial y^\sigma_{j_1}} y^\sigma_{j_1 j_2} + \dots + \frac{\partial g^{j_r}}{\partial y^\nu_{j_1 j_2\dots j_{r-1}}} y^\nu_{j_1 j_2\dots j_{r-1} j_r} = f.$$

Из (3.4) следует, что эти функции удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial g^{i_1}}{\partial y^\sigma_{i_2 i_3\dots i_{r+1}}} + \frac{\partial g^{i_2}}{\partial y^\sigma_{i_1 i_3 i_4\dots i_{r+1}}} + \frac{\partial g^{i_3}}{\partial y^\sigma_{i_2 i_1 i_4 i_5\dots i_{r+1}}} + \dots + \frac{\partial g^{i_{r+1}}}{\partial y^\sigma_{i_2 i_3\dots i_{r-1} i_r i_1}} = 0.$$

Пусть I — оператор послойной гомотопии для дифференциальных форм на V^{2r}, ассоциированный с проекцией $\pi : V \to U$ (см. раздел 2). Имеем

$$\Theta_f = Id\Theta_f + dI\Theta_f + \Theta_0 = Ip_1 d\Theta_f + Ip_2 d\Theta_f + dI\Theta_f + \Theta_0,$$

где Θ_0 — n-форма, проектируемая на U. В этой формуле $p_1 d\Theta_f = 0$ по предположению, и можно считать, что $\Theta_0 = d\vartheta_0$ (на U). Более того, $h\Theta_f = hd(I\Theta_f + \vartheta_0) = f\omega_0$. Определяя функции g^i на V^s, где $s \le 2r$, условием

$$h(I\Theta_f + \vartheta_0) = g^i\omega_i,$$

получаем решение формального уравнения дивергенции. В явном виде

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{j_1}}{\partial y^\sigma} y^\sigma_{j_1} + \frac{\partial g^{j_2}}{\partial y^\sigma_{j_1}} y^\sigma_{j_1 j_2} + \dots + \frac{\partial g^{j_{s+1}}}{\partial y^\sigma_{j_1 j_2\dots j_s}} y^\sigma_{j_1 j_2\dots j_s j_{s+1}} = f. \tag{3.6}$$

Пока еще не доказано, что формальное уравнение дивергенции имеет решение, определенное на V^r. Если $s \leq r$, то формула (3.6) показывает, что условие (a) выполняется. Если $s \geq r+1$, несколько раз применим лемму 5, и получим решение уравнения (3.6), определенное на V^r. $\square$

Условие (3.4) $E_\sigma(f) = 0$ называется *условием интегрируемости* для формального уравнения дивергенции (3.1).

Используя теорему 1 и лемму 3, можно описать решения формального уравнения дивергенции $d_i g^i = f$ в виде некоторых дифференциальных форм.

Теорема 2. *Пусть $f : V^r \to \mathbb{R}$ — функция такая, что $E_\sigma(f) = 0$, $g = g^i$ — система функций, определенных на V^r, и пусть $\eta = g^i \omega_i$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) *система функций $g = g^i$ задает решение формального уравнения дивергенции* (3.1),

(b) *существует проектируемое продолжение μ формы η такое, что $hd\mu = f\omega_0$.*

Доказательство. 1. Пусть выполняется условие (a). Тогда $d_i g^i = f$, где функции g^i удовлетворяют условию (3.2), и согласно лемме 3 форма η есть проектируемое продолжение формы μ. Имеем $\eta = h\mu$ и $hd\mu = hdh\mu = hd\eta = d_i g^i \omega_0 = f\omega_0$.

2. Предположим, что η удовлетворяют условию (b). Так как μ определена на V^{r-1}, форма $h\mu$ определена на V^r. Тогда $f\omega_0 = hd\mu = hdh\mu = hd\eta = d_i g^i \omega_0$ и, следовательно, $d_i g^i = f$. $\square$

4. Отображение Эйлера–Лагранжа и расслоенные автоморфизмы

Пусть Y — расслоенное многообразие с базой X и проекцией π. Пусть W — открытое подмножество в Y. Пусть λ — лагранжиан порядка r для Y, определенный на W^r, и пусть E_λ — форма Эйлера–Лагранжа лагранжиана λ.

Теорема 3. *Пусть $\lambda \in \Omega_n^r W$ — лагранжиан.*

(a) *Пусть W_1 — открытое подмножество многообразия Y, и пусть $\alpha : W_1 \to W$ — изоморфизм расслоенных многообразий над X. Тогда $E_{J^r\alpha * \lambda} = J^{2r}\alpha * E_\lambda$.*

(b) *Для любого π-проектируемого векторного поля Ξ на W выполняется равенство $E_{\partial_{J^r\Xi}\lambda} = \partial_{J^{2r}\Xi} E_\lambda$.*

Доказательство. (a) Пусть ρ — любая лепажева форма. Рассмотрим ассоциированный лагранжиан $\lambda = h\rho$. Если λ определен на $W^r \subset J^rY$, то можно предполагать, что ρ определен на $W^{2r-1} \subset J^{2r}Y$. Тогда форма Эйлера–Лагранжа, ассоциированная с λ, равна $E_\lambda = p_1 d\rho$. Так как $(J^{2r-1}\alpha)*$ коммутирует с отображением p_1 и сохраняет контактные формы, получаем

$$p_1 dJ^{2r-1}\alpha * \rho = p_1 J^{2r-1}\alpha * d\rho = J^{2r}\alpha * p_1 d\rho. \tag{4.1}$$

В частности, если ρ — лепажева форма, то $J^{2r-1}\alpha * \rho$ также является лепажевой формой. Тогда по определению формы Эйлера–Лагранжа выражение (4.1) равно $E_{hJ^{2r-1}\alpha*\rho}$. Но $J^{2r-1}\alpha$ коммутирует с горизонтализацией h, таким образом, (4.1) доказывает (a).

(b) непосредственно следует из (a). $\square$

5. Ядро отображения Эйлера–Лагранжа

В этом разделе отображение Эйлера–Лагранжа $\lambda \to E_\lambda$ пространства $\Omega_{n,X}^r W$ в пространство $\Omega_{n+1,Y}^{2r} W$ рассматривается как морфизм абелевых групп. Найдем *ядро* этого морфизма. Скажем, что лагранжиан $\lambda \in \Omega_{n,X}^r W$ является *нуль-лагранжианом* или *тривиальным лагранжианом*, если $E_\lambda = 0$.

Теорема 4. *Пусть $\lambda \in \Omega_{n,X}^r W$ — лагранжиан порядка r. Следующие условия эквивалентны.*

(a) *λ тривиален.*

(b) *Для любой точки* $y \in W$ *существуют расслоенная карта* (V, ψ), $\psi = (x^i, y^\sigma)$, *в* y *и* $(n-1)$*-форма* $\mu_V \in \Omega^{r-1}_{n-1} V$ *такие, что*

$$\lambda = hd\mu_V. \tag{5.1}$$

(c) *Для любой точки* $y \in W$ *существует расслоенная карта* (V, ψ), $\psi = (x^i, y^\sigma)$, *в* y *со следующими свойствами: если* $\lambda = \mathcal{L}\omega_0$ *на* V^r *в этой карте, то существуют функции* $f^i : V^r \to \mathbb{R}$ *такие, что*

$$\frac{\partial f^i}{\partial y^\sigma_{j_1 j_2 \dots j_r}} + \frac{\partial f^{j_1}}{\partial y^\sigma_{i j_2 j_3 \dots j_r}} + \frac{\partial f^{j_2}}{\partial y^\sigma_{j_1 i j_3 \dots j_r}} + \dots + \frac{\partial f^{j_r}}{\partial y^\sigma_{j_1 j_2 \dots j_{r-1} i}} = 0$$

и $\mathcal{L} = d_i f^i$.

Доказательство. 1. Пусть λ — тривиальный лагранжиан, тогда $E_\lambda = 0$. Если в расслоенной карте (V, ψ), $\psi = (x^i, y^\sigma)$, в точке $y \in W$ имеет место равенство $\lambda = \mathcal{L}\omega_0$, то по определению выражение Эйлера–Лагранжа $E_\sigma(\mathcal{L})$ обращается в нуль. Следовательно, согласно теореме 3 $\lambda = hd\mu_V$ для некоторой $(n-1)$-формы μ_V на V^{r-1}, что доказывает формулу (5.1).

2. Пусть y — точка многообразия W, (V, ψ), $\psi = (x^i, y^\sigma)$, есть расслоенная карта в точке y, и $\mu_V \in \Omega^{r-1}_{n-1} V$ — форма, удовлетворяющая условию (5.1). Пусть в этой карте $\lambda = \mathcal{L}\omega_0$. Используя каноническое разложение форм, получим

$$\begin{aligned}(\pi^{r+1,r}) * d\mu_V = hd\mu_V + p_1 d\mu_V + p_2 d\mu_V + \dots + p_{n-1} d\mu_V + p_n d\mu_V = \\ = d(\pi^{r+1,r}) * \mu_V = dh\mu_V + dp_1\mu_V + dp_2\mu_V + \dots + dp_{n-1}\mu_V\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(\pi^{r+2,r+1}) * (hd\mu_V + p_1 d\mu_V + p_2 d\mu_V + \dots + p_{n-1} d\mu_V + p_n d\mu_V) = \\ = (\pi^{r+2,r+1}) * (dh\mu_V + dp_1\mu_V + dp_2\mu_V + \dots + dp_{n-1}\mu_V).\end{aligned}$$

В частности, сравнивая горизонтальные компоненты, получим

$$(\pi^{r+2,r+1}) * hd\mu_V = hdh\mu_V.$$

По предположению левая часть равна $\mathcal{L}\omega_0$ (с точностью до форм, являющихся обратными образами при проекции $\pi^{r+2,r+1}$), и, записав $h\mu_V$ в виде $f^i\omega_i$, получим, что правая часть уравнения равна $d_i f^i \cdot \omega_0$. Следовательно, можно записать функцию Лагранжа $\mathcal{L}$ в виде $\mathcal{L} = d_i f^i$, и в силу проектируемости получаем

$$\frac{\partial f^i}{\partial y^\sigma_{j_1 j_2 \dots j_r}} + \frac{\partial f^{j_1}}{\partial y^\sigma_{i j_2 j_3 \dots j_r}} + \frac{\partial f^{j_2}}{\partial y^\sigma_{j_1 i j_3 \dots j_r}} + \dots + \frac{\partial f^{j_r}}{\partial y^\sigma_{j_1 j_2 \dots j_{r-1} i}} = 0. \tag{5.2}$$

3. Предположим, что выполняется условие (c). Тогда уравнение формальной дивергенции (5.2) имеет решение, определенное на V^r, и в силу теоремы 2 получаем $E_\sigma(\mathcal{L}) = 0$. Поэтому лагранжиан λ тривиален. $\square$

6. Образ отображения Эйлера–Лагранжа

Изучим теперь образ отображения Эйлера–Лагранжа $\Omega^r_{n,X} W \ni \lambda \to E_\lambda \in \Omega^{2r}_{n+1,Y} W$. Напомним, что для любого натурального s элементы модуля $\Omega^s_{n+1,Y} W$ называются *формами-источниками*. Форма-источник ε называется *вариационной*, если существует лагранжиан $\lambda \in \Omega^r_{n,X} W$ такой, что форма Эйлера–Лагранжа E_λ определена на W^s, и $\varepsilon = E_\lambda$.

Следующая теорема описывает связь между отображением Эйлера–Лагранжа и внешним дифференциалом дифференциальных форм на пространстве струй.

Теорема 5. *Форма-источник* $\varepsilon \in \Omega^r_{n+1,Y} W$ *является вариационной тогда и только тогда, когда существует форма* $F \in \Omega^s_{n+1,Y} W$ *порядка контактности* ≥ 2 *такая, что* $d(\varepsilon + F) = 0$.

Доказательство. 1. Если $\varepsilon = E_\lambda$ для некоторого лагранжиана λ, то выберем лепажев эквивалент ρ лагранжиана λ и определим F как $p_2 d\rho + p_3 d\rho + \cdots + p_{n+1} d\rho$. Тогда в силу первого канонического разложения имеем $(\pi^{r+1,r}) * d\rho = E_\lambda + F$.

2. Если $d(\varepsilon + F) = 0$, то каждая форма ρ такая, что $\varepsilon + F = d\rho$, является лепажевой формой. Тогда $\varepsilon = p_1 d\rho$. Поэтому ε является вариационной формой, лагранжиан которой равен $h\rho$. $\square$

Из теоремы 5 выводится базовый критерий вариационности форм-источников в расслоенных картах; проведем доказательство как в [11]. Вначале докажем некоторые формулы для формальной производной от функции и леммы о структуре вариационных форм.

Пусть ε — форма-источник, определенная на W^s. Для любой расслоенной карты (V, ψ), $\psi = (x^i, y^\sigma)$, на Y такой, что $V \subset W$, форма ε может быть выражена следующим образом: $\varepsilon = \varepsilon_\sigma \omega^\sigma \wedge \omega_0$, где компоненты ε_σ являются вещественнозначными функциями на V^s. Предположим дополнительно, что $\psi(V)$ является звездной областью, и через I обозначим соответствующий оператор послойной гомотопии. Тогда $I\varepsilon$ — π^s-горизонтальная форма на V^s, т.е. лагранжиан порядка s для Y. Назовем $I\varepsilon$ *лагранжианом Вайнберга–Тонти*, ассоциированным с формой-источником ε.

Найдем выражение для n-формы $I\varepsilon$ и для $(n+1)$-формы $E_{I\varepsilon}$. Так как $\chi \underset{s}{*} \varepsilon = (\varepsilon_\sigma \circ \chi_s)(t\omega^\sigma + y^\sigma dt) \wedge \omega_0$, находим $I\varepsilon = y^\sigma \int \varepsilon_\sigma \circ \chi_s \cdot dt \cdot \omega_0$. Определим $\mathcal{L}_\varepsilon$ с помощью $\mathcal{L}_\varepsilon = y^\sigma \int \varepsilon_\sigma \circ \chi_s \cdot dt$. Тогда согласно определению

$$E_{I\varepsilon} = E_\sigma(\mathcal{L}_\varepsilon)\omega^\sigma \wedge \omega_0, \tag{6.1}$$

где

$$E_\sigma(\mathcal{L}_\varepsilon) = \sum_{l=0}^{s} (-1)^l d_{p_1} d_{p_2} \dots d_{p_l} \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial y^\sigma_{p_1 p_2 \dots p_l}}. \tag{6.2}$$

Лемма 6. (a) *Для каждой функции f на V^p*

$$d_i(f \circ \chi_p) = d_i f \circ \chi_{p+1}. \tag{6.3}$$

(b) *Для каждой функции f на V^s и набора функций $g^{p_1 p_2 \dots p_k}$ на V^s, симметричных по нижним индексам, имеем*

$$d_{p_1} d_{p_2} \dots d_{p_k} (f \cdot g^{p_1 p_2 \dots p_k}) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} d_{p_1} d_{p_2} \dots d_{p_i} f \cdot d_{p_{i+1}} d_{p_{i+2}} \dots d_{p_k} g^{p_1 p_2 \dots p_k}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Формула (6.3) немедленно следует из определения $d_i f$. Формула (6.4) может быть получена с помощью индукции. $\square$

Лемма 7. *Выражение Эйлера–Лагранжа для лагражиана Вайнберга–Тонти $\mathcal{L}_\varepsilon \omega_0$ формы-источника $\varepsilon = \varepsilon_\sigma \omega^\sigma \wedge \omega_0$ имеет вид*

$$E_\sigma(\mathcal{L}_\varepsilon) = \varepsilon_\sigma - \sum_{k=0}^{s} y^\nu_{q_1 q_2 \dots q_k} \int H_{\sigma\nu}{}^{q_1 q_2 \dots q_k}(\varepsilon) \circ \chi_{2s} \cdot t\, dt,$$

где $H_{\sigma\nu}{}^{q_1 q_2 \dots q_k}(\varepsilon) = \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{q_1 q_2 \dots q_k}} - \sum\limits_{l=k}^{s} (-1)^l \binom{l}{k} d_{p_{k+1}} d_{p_{k+2}} \dots d_{p_l} \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{q_1 q_2 \dots q_k p_{k+1} p_{k+2} \dots p_l}}$.

Доказательство. Выведем формулу для разности $\varepsilon_\sigma - E_\sigma(\mathcal{L}_\varepsilon)$. Рассмотрим форму Эйлера–Лагранжа (6.1). Имеем

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial y^\sigma} = \int \varepsilon_\sigma \circ \chi_s \cdot dt + y^\nu \int \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma} \circ \chi_s \cdot t\, dt. \tag{6.5}$$

Согласно лемме 6 для каждого $l \geq 1$

$$\begin{aligned}
d_{p_l}\dots d_{p_2}d_{p_1}\frac{\partial\mathcal{L}_\varepsilon}{\partial y^\sigma_{p_1p_2\dots p_l}} &= d_{p_l}\dots d_{p_2}d_{p_1}\left(y^\nu\int\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2\dots p_l}}\circ\chi_s\cdot t\,dt\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}d_{p_1}d_{p_2}\dots d_{p_i}y^\nu\cdot d_{p_{i+1}}d_{p_{i+2}}\dots d_{p_l}\int\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2\dots p_l}}\circ\chi_s\cdot t\,dt = \\
&= \sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}d_{p_1}d_{p_2}\dots d_{p_i}y^\nu\cdot\int d_{p_{i+1}}d_{p_{i+2}}\dots d_{p_l}\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2\dots p_l}}\circ\chi_{s+l-i}\cdot t\,dt. \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

Тогда в силу (6.2), (6.5), и (6.6), используя очевидные правила суммирования, получаем

$$\begin{aligned}
E_\sigma(\mathcal{L}_\varepsilon) &= \int\varepsilon_\sigma\circ\chi_s\cdot dt + y^\nu\int\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma}\circ\chi_s\cdot t\,dt + \\
&+ \sum_{l=1}^{s}(-1)^l\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}y^\nu_{p_1p_2\dots p_i}\cdot\int d_{p_{i+1}}d_{p_{i+2}}\dots d_{p_l}\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2\dots p_l}}\circ\chi_{s+l-i}\cdot t\,dt.
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\sigma &= \int\frac{d}{dt}(\varepsilon_\sigma\circ\chi_s\cdot t)dt = \int\frac{d(\varepsilon_\sigma\circ\chi_s)}{dt}\cdot t\,dt + \int\varepsilon_\sigma\circ\chi_s\cdot dt = \\
&= \int\frac{d(\varepsilon_\sigma\circ\chi_s)}{dt}\cdot t\,dt + \int\varepsilon_\sigma\circ\chi_s\cdot dt = \sum_{i=0}^{s}\int\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{p_1p_2\dots p_i}}\circ\chi_s\cdot y^\nu_{p_1p_2\dots p_i}\cdot t\,dt + \int\varepsilon_\sigma\circ\chi_s\cdot dt, \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\sigma - E_\sigma(\mathcal{L}_\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{s}\int\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{p_1p_2\dots p_i}}\circ\chi_s\cdot y^\nu_{p_1p_2\dots p_i}\cdot t\,dt + \int\varepsilon_\sigma\circ\chi_s\cdot dt - \\
&- \int\varepsilon_\sigma\circ\chi_s\cdot dt - y^\nu\int\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma}\circ\chi_s\cdot t\,dt - \\
&- \sum_{l=1}^{s}(-1)^l\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}y^\nu_{p_1p_2\dots p_i}\cdot\int d_{p_{i+1}}d_{p_{i+2}}\dots d_{p_l}\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2\dots p_l}}\circ\chi_{s+l-i}\cdot t\,dt = \\
&= \sum_{i=0}^{s}\int\frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{p_1p_2\dots p_i}}\circ\chi_s\cdot y^\nu_{p_1p_2\dots p_i}\cdot t\,dt - \\
&- \sum_{l=0}^{s}(-1)^l\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}y^\nu_{p_1p_2\dots p_i}\cdot\int d_{p_{i+1}}d_{p_{i+2}}\dots d_{p_l}\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2\dots p_l}}\circ\chi_{s+l-i}\cdot t\,dt.
\end{aligned}$$

Поменяем порядок суммирования в этой формуле. Заметим, что члены второго слагаемого индексированы парами (l,i) так, что

$$\begin{aligned}
&l=0, \quad i=0;\\
&l=1, \quad i=0,1;\\
&l=2, \quad i=0,1,2;\\
&\ \dots\\
&l=s-1, \quad i=0,1,2,\dots,s-1;\\
&l=s, \quad i=0,1,2,\dots,s,
\end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned}
&i=0, \quad l=0,1,2,\ldots,s;\\
&i=1, \quad l=1,2,\ldots,s;\\
&i=2, \quad l=2,3,\ldots,s;\\
&\ \ldots\\
&i=s-1, \quad l=s-1,s;\\
&i=s, \quad l=s.
\end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\varepsilon_\sigma - E_\sigma(\mathcal{L}_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{s} y^\nu_{p_1p_2\ldots p_i} \int \left(\frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{p_1p_2\ldots p_i}} - \sum_{l=i}^{s} (-1)^l \binom{l}{i} d_{p_{i+1}} d_{p_{i+2}} \ldots d_{p_l} \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2\ldots p_l}} \right) \circ \chi_{2s} \cdot t\, dt.$$

Эта формула доказывает лемму 7.

Замечание 1. Например, если $s=3$, имеем

$$\begin{aligned}
H_{\sigma\nu}(\varepsilon) &= \frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial y^\nu} - \frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma} + d_{p_1}\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1}} - d_{p_1}d_{p_2}\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2}} + d_{p_1}d_{p_2}d_{p_3}\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2p_3}},\\
H_{\sigma\nu}^{\ p_1}(\varepsilon) &= \frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{p_1}} + \frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1}} - 2d_{p_2}\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2}} + 3d_{p_2}d_{p_3}\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2p_3}},\\
H_{\sigma\nu}^{\ p_1p_2}(\varepsilon) &= \frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{p_1p_2}} - \frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2}} + 3d_{p_3}\frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2p_3}},\\
H_{\sigma\nu}^{\ p_1p_2p_3}(\varepsilon) &= \frac{\partial\varepsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{p_1p_2p_3}} + \frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{p_1p_2p_3}}.
\end{aligned}$$

Лемма 8. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее начало координат и такое, что для каждой точки $(x^1,x^2,\ldots,x^n)\in U$ отрезок $\{(tx^1,tx^2,\ldots,tx^n)\in\mathbb{R}^n \mid t\in[0,1]\}$ содержится в U. Пусть f — вещественная функция, определенная на U, такая, что*

$$\int_0^1 f(tx^1,tx^2,\ldots,tx^n)dt = 0$$

для $(x^1,x^2,\ldots,x^n)\in U$. Тогда $f=0$.

Доказательство. Для каждого $s\in[0,1]$ имеем

$$\int_0^1 f(tsx^1,tsx^2,\ldots,tsx^n)dt = 0, \tag{6.8}$$

отсюда, дифференцируя по s, получаем

$$x^k\int_0^1 D_kf(tsx^1,tsx^2,\ldots,tsx^n)\cdot t\,dt = 0. \tag{6.9}$$

С другой стороны, имеем следующее тождество:

$$\frac{d}{dt}(f(tsx^1,tsx^2,\ldots,tsx^n)\cdot t) = D_kf(tsx^1,tsx^2,\ldots,tsx^n)\cdot stx^k + f(tsx^1,tsx^2,\ldots,tsx^n).$$

Интегрируя по t от 0 до 1, из (6.8) и (6.9) получим

$$\begin{aligned}
&f(sx^1,sx^2,\ldots,sx^n) =\\
&\qquad = sx^k\int_0^1 D_kf(tsx^1,tsx^2,\ldots,tsx^n)\cdot t\,dt + \int_0^1 f(tsx^1,tsx^2,\ldots,tsx^n)dt = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Лемма 9. *Пусть U (V) — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}^m)$, пусть $\pi : U \times V \to U$ — проекция на первый сомножитель. Пусть x^i, y^σ — канонические координаты на $U \times V$. Пусть Ξ — π-вертикальное векторное поле Ξ на Y, заданное выражением*

$$\Xi = \Xi^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu},$$

такое, что компоненты Ξ^ν не зависят от y^σ. Пусть $f : J^r(U \times V) \to \mathbb{R}$ — функция. Тогда

$$d_i \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu_{i_1 i_2 \ldots i_l}} i_{J^r \Xi} df \right) = i_{J^{r+1}\Xi} d \left(d_i \frac{\partial f}{\partial y^\nu_{i_1 i_2 \ldots i_l}} \right), \tag{6.10}$$

и

$$i_{J^{2r}\Xi} dd_i f = d_i i_{J^{2r}\Xi} df. \tag{6.11}$$

Доказательство. Для доказательства формулы (6.10) обозначим через $\Xi^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ компоненты r-го продолжения $J^r\Xi$. Вычисляя левую часть, получим

$$d_i \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu_{i_1 i_2 \ldots i_l}} i_{J^r \Xi} df \right) = \sum_{k=0}^{r} \left(d_i \frac{\partial^2 f}{\partial y^\nu_{i_1 i_2 \ldots i_l} \partial y^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k}} \Xi^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^\nu_{i_1 i_2 \ldots i_l} \partial y^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k}} d_i \Xi^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k} \right) + \\ + \sum_{k=0}^{r} d_i \left(\frac{\partial f}{\partial y^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k}} \frac{\partial \Xi^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k}}{\partial y^\nu_{i_1 i_2 \ldots i_l}} \right). \tag{6.12}$$

Правая часть выражается следующим образом:

$$i_{J^{r+1}\Xi} d \left(d_i \frac{\partial f}{\partial y^\nu_{i_1 i_2 \ldots i_l}} \right) = \sum_{k=0}^{r} d_i \frac{\partial^2 f}{\partial y^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k} \partial y^\nu_{i_1 i_2 \ldots i_l}} \cdot \Xi^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k} + \sum_{k=0}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial y^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k} \partial y^\nu_{i_1 i_2 \ldots i_l}} \cdot d_i \Xi^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k}. \tag{6.13}$$

Так как по предположению

$$\frac{\partial \Xi^\sigma_{j_1 j_2 \ldots j_k}}{\partial y^\nu_{i_1 i_2 \ldots i_l}} = 0,$$

то выражения (6.12) и (6.13) совпадают.

Формула (6.11) следует из тождества $\partial_{J^{r+1}\Xi} hdf = hd\partial_{J^r\Xi} f$. Действительно, правая часть равна $\partial_{J^{2r}\Xi}(d_i f dx^i) = i_{J^{2r}\Xi} dd_i f \cdot dx^i$, а левая — $d_i i_{J^{2r}\Xi} df \cdot dx^i$. □

Лемма 10. *Каждая вариационная форма-источник $\varepsilon = \varepsilon_\sigma \omega^\sigma \wedge \omega_0$ на W^s удовлетворяет уравнению*

$$H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \ldots q_k}_{\nu}(\varepsilon) = 0 \tag{6.14}$$

для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, s$.

Доказательство. Проведем доказательство в несколько шагов.

1. Рассмотрим вариационную форму-источник ε порядка s. В силу теоремы 5 существует форма F порядка контактности не меньше 2 и лепажева форма ρ такие, что $\varepsilon + F = d\rho$. Тогда $\rho = Id\rho + dI\rho + \rho_0$, где I — оператор послойной гомотопии и ρ_0 — форма на X. Лагранжиан, ассоциированный с ρ, есть $h\rho = hI(\varepsilon + F) + hdI\rho + h\rho_0 = I\varepsilon + hdI\rho + \rho_0$. Так как лагранжианы $hdI\rho$ и ρ_0 тривиальны, ε имеет лагражиан Вайнберга–Тонти $I\varepsilon$. Но тогда получаем

$$\int \left(\sum_{k=0}^{s} y^\nu_{q_1 q_2 \ldots q_k} H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \ldots q_k}_{\nu}(\varepsilon) \right) \circ \chi_{2s} \cdot dt = 0$$

в силу леммы 7. Применяя лемму 8, заключаем, что

$$\sum_{k=0}^{s} y^{\nu}_{q_1 q_2 \ldots q_k} H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \ldots q_k}_{\nu}(\varepsilon) = 0. \tag{6.15}$$

2. Рассмотрим вариационную форму $\varepsilon = E_\lambda$. Если лагражиан λ имеет порядок r, можно предположить, что ε имеет порядок $2r$. Так как для любого π-проектируемого векторного поля Ξ производная Ли удовлетворяет уравнению $\partial_{J^{2r}\Xi} E_\lambda = E_{\partial_{J^r\Xi}\lambda}$ (раздел 3), имеем $\partial_{J^{2r}\Xi}\varepsilon = E_{\partial_{J^r\Xi}\lambda}$. Следовательно, форма $\partial_{J^{2r}\Xi}\varepsilon$ также является вариационной, и согласно (6.7)

$$\sum_{k=0}^{2r} y^{\nu}_{q_1 q_2 \ldots q_k} H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \ldots q_k}_{\nu}(\partial_{J^{2r}\Xi}\varepsilon) = 0. \tag{6.16}$$

Подставляя в эту формулу $\varepsilon = \varepsilon_\tau \omega^\tau \wedge \omega_0$, имеем

$$\partial_{J^{2r}\Xi}\varepsilon = \partial_{J^{2r}\Xi}\varepsilon_\tau \cdot \omega^\tau \wedge \omega_0 + \varepsilon_\tau \partial_{J^{2r}\Xi}(\omega^\tau \wedge \omega_0) = i_{J^{2r}\Xi} d\varepsilon_\tau \cdot \omega^\tau \wedge \omega_0 + \varepsilon_\tau d\Xi^\tau \wedge \omega_0.$$

Следовательно, т. к. для векторных полей

$$\Xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \Xi^\tau \frac{\partial}{\partial y^\tau}$$

таких, что компоненты Ξ^τ не зависят от координат y^σ, выражение $\varepsilon_\tau d\Xi^\tau \wedge \omega_0$ обращается в нуль, получаем

$$\partial_{J^{2r}\Xi}\varepsilon = i_{J^{2r}\Xi} d\varepsilon_\tau \cdot \omega^\tau \wedge \omega_0. \tag{6.17}$$

3. Подсчитаем теперь выражения Гельмгольца $H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \ldots q_k}_{\nu}(\partial_{J^{2r}\Xi}\varepsilon)$ для π-вертикальных векторных полей

$$\Xi = \Xi^\tau \frac{\partial}{\partial y^\tau}$$

таких, что компоненты Ξ^τ не зависят от координат x^i. Из (6.17) получаем

$$\begin{aligned} H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \ldots q_k}_{\nu}(\partial_{J^{2r}\Xi}\varepsilon) = {} & \frac{\partial}{\partial y^{\nu}_{q_1 q_2 \ldots q_k}} i_{J^{2r}\Xi} d\varepsilon_\sigma - \\ & - \sum_{l=k}^{s} (-1)^l \binom{l}{k} d_{p_{k+1}} d_{p_{k+2}} \ldots d_{p_{l-1}} d_{p_l} \frac{\partial}{\partial y^{\sigma}_{q_1 q_2 \ldots q_k p_{k+1} p_{k+2} \ldots p_l}} i_{J^{2r}\Xi} d\varepsilon_\nu. \end{aligned}$$

Но по лемме 9 операторы $i_{J^{r+1}\Xi} d$ и $d_i(\partial/\partial y^{\nu}_{i_1 i_2 \ldots i_l})$ коммутируют, а $i_{J^{r+1}\Xi} d$ и d_i также коммутируют, поэтому получаем

$$\begin{aligned} H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \ldots q_k}_{\nu}(\partial_{J^{2r}\Xi}\varepsilon) = {} & \frac{\partial}{\partial y^{\nu}_{q_1 q_2 \ldots q_k}} i_{J^{2r}\Xi} d\varepsilon_\sigma - \\ & - \sum_{l=k}^{s} (-1)^l \binom{l}{k} d_{p_{k+1}} d_{p_{k+2}} \ldots d_{p_{l-1}} i_{J^{2r}\Xi} d d_{p_l} \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial y^{\sigma}_{q_1 q_2 \ldots q_k p_{k+1} p_{k+2} \ldots p_l}} = \\ & = \frac{\partial}{\partial y^{\nu}_{q_1 q_2 \ldots q_k}} i_{J^{2r}\Xi} d\varepsilon_\sigma - i_{J^{2r}\Xi} d \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial y^{\nu}_{q_1 q_2 \ldots q_k}} + i_{J^{2r}\Xi} d H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \ldots q_k}_{\nu}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial y^{\nu}_{q_1 q_2 \dots q_k}} i_{J^{2r}\Xi} d\varepsilon_\sigma - i_{J^{2r}\Xi} d \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial y^{\nu}_{q_1 q_2 \dots q_k}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y^{\nu}_{q_1 q_2 \dots q_k}} \sum_{l=0}^{2r} \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial y^{\tau}_{p_1 p_2 \dots p_l}} \Xi^{\tau}_{p_1 p_2 \dots p_l} - \sum_{l=0}^{2r} \frac{\partial^2 \varepsilon_\sigma}{\partial y^{\tau}_{p_1 p_2 \dots p_l} \partial y^{\nu}_{q_1 q_2 \dots q_k}} \Xi^{\tau}_{p_1 p_2 \dots p_l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{2r} \frac{\partial \varepsilon_\sigma}{\partial y^{\tau}_{p_1 p_2 \dots p_l}} \frac{\partial \Xi^{\tau}_{p_1 p_2 \dots p_l}}{\partial y^{\nu}_{q_1 q_2 \dots q_k}} = 0,$$

поэтому $H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \dots q_k}_{\nu}(\partial_{J^{2r}\Xi}\varepsilon) = i_{J^{2r}\Xi} d H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \dots q_k}_{\nu}(\varepsilon)$. Для завершения доказательства используем тождество

$$\sum_{k=0}^{2r} y^{\nu}_{q_1 q_2 \dots q_k} H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \dots q_k}_{\nu}(\partial_{J^{2r}\Xi}\varepsilon) = \sum_{k=0}^{2r} y^{\nu}_{q_1 q_2 \dots q_k} i_{J^{2r}\Xi} d H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \dots q_k}_{\nu}(\varepsilon) =$$

$$= i_{J^{2r}\Xi} d \sum_{k=1}^{2r} y^{\nu}_{q_1 q_2 \dots q_k} H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \dots q_k}_{\nu}(\varepsilon) - \sum_{k=1}^{2r} H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \dots q_k}_{\nu}(\varepsilon) \Xi^{\nu}_{q_1 q_2 \dots q_k}.$$

Так как в силу (6.15) и (6.16) это влечет $\sum_{k=1}^{2r} H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \dots q_k}_{\nu}(\varepsilon) \Xi^{\nu}_{q_1 q_2 \dots q_k} = 0$, и функции $\Xi^{\nu}_{q_1 q_2 \dots q_k}$ от переменных x^i произвольны, получаем (6.14). □

Теорема 6. *Пусть ε — форма-источник порядка s, определенная на $W^s \subset J^s Y$. Следующие два условия эквивалентны*:

(a) *ε локально вариационная,*

(b) *множество $W \subset Y$ можно покрыть расслоенными картами (V, ψ), $\psi = (x^i, y^\sigma)$ так, что компоненты ε_σ, координатные выражения формы ε в соответствующих картах (V^s, ψ^s), $\varepsilon = \varepsilon_\sigma \omega^\sigma \wedge \omega_0$, удовлетворяют уравнению $H_{\sigma}{}^{q_1 q_2 \dots q_k}_{\nu}(\varepsilon) = 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots, s$.*

Доказательство. Теорема 6 следует из леммы 7 и леммы 10. □

7. Инвариантные вариационные функционалы

Пусть X — многообразие, W — открытое подмножество в X, и $\alpha : W \to X$ — гладкое отображение. Напомним, что дифференциальная форма η, определенная на окрестности подмножества $\alpha(W)$ в X, называется *инвариантной* относительно α, если $\alpha * \eta = \eta$ на $W \cap \alpha(W)$; в этом случае α называется *преобразованием, сохраняющим* форму η. Векторное поле, локальный поток которого состоит из преобразований, сохраняющих форму η, называется *генератором* преобразований, сохраняющих η. В этом и следующих разделах эти определения будут применяться к локальным автоморфизмам расслоенного многообразия Y.

Далее проведем изучение свойств вариационных интегральных функционалов на Y, лагранжианы или формы Эйлера–Лагранжа которых инвариантны относительно однопараметрических семейств локальных автоморфизмов.

Пусть λ — лагранжиан порядка r на Y, $\alpha : W \to Y$ — локальный автоморфизм Y, и пусть $J^r\alpha : W^r \to J^r Y$ — r-е продолжение α. Скажем, что α — *преобразование, сохраняющее* лагранжиан λ, если $J^r\alpha * \lambda = \lambda$. *Генератор* преобразований, сохраняющих λ, — это π-проектируемое векторное поле на Y, локальный поток которого состоит из преобразований, сохраняющих λ. Вариационный функционал, лагранжиан которого инвариантен относительно α, называется *инвариантным* относительно α.

Лемма 11. *Пусть λ — лагранжиан порядка r на Y.*

(a) *π-проектируемое векторное поле Ξ на Y есть генератор преобразований, сохраняющих лагранжиан λ, тогда и только тогда, когда*

$$\partial_{J^r\Xi}\lambda = 0. \tag{7.1}$$

(b) *Генераторы преобразований, сохраняющих лагранжиан λ, образуют подалгебру Ли в алгебре Ли векторных полей на J^rY.*

Доказательство (a) следует из определений. Для любых π-проектируемых векторных полей Ξ и Z верно равенство $J^r[\Xi, \mathrm{Z}] = [J^r\Xi, J^r\mathrm{Z}]$, поэтому если $\partial_{J^r\Xi}\lambda = 0$ и $\partial_{J^r\Xi}\lambda = 0$, то $\partial_{J^r[\Xi,\mathrm{Z}]}\lambda = \partial_{[J^r\Xi,J^r\mathrm{Z}]}\lambda = \partial_{J^r\Xi}\partial_{J^r\mathrm{Z}} - \partial_{J^r\mathrm{Z}}\partial_{J^r\Xi}\lambda = 0$, что доказывает (b). □

Уравнение (7.1), называемое *уравнением Нетер*, связывает λ и векторное поле Ξ. Если задано λ, это уравнение может быть использовано для того, чтобы найти генераторы преобразований, сохраняющих лагранжиан. С другой стороны, если задан набор π-проектируемых векторных полей Ξ, уравнение Нетер может быть использовано для того, чтобы найти лагранжианы λ, инвариантные относительно каждого векторного поля из набора.

Следующее утверждение известно как (первая) *теорема Эмми Нетер.*

Теорема 7. *Пусть λ — лагранжиан, ρ — лепажев эквивалент λ, определенный на J^sY, а γ — экстремаль. Тогда каждый генератор Ξ преобразований, сохраняющих λ, удовлетворяет уравнению*

$$dJ^s\gamma * i_{J^s\Xi}\rho = 0. \tag{7.2}$$

Доказательство основывается на первой вариационной формуле. Имеем

$$J^r\gamma * \partial_{J^r\Xi}\lambda = J^s\gamma * i_{J^s\Xi}d\rho + dJ^s\gamma * i_{J^s\Xi}\rho.$$

Так как левая часть данного равенства обращается в нуль в силу инвариантности, а первое слагаемое в правой части также равно нулю, поскольку γ — экстремаль, получаем уравнение (7.2).

Заметим, что (глобальное) условие (7.2) может быть записано и по-другому с помощью локальных главных лепажевых эквивалентов Θ_λ лагранжиана λ. Из структурных уравнений лепажевых форм следует, что локально $\rho = \Theta_\lambda + d\nu + \mu$, где ν — контактная форма, а μ — контактная форма порядка контактности не меньше 2. Тогда $dJ^s\gamma * i_{J^s\Xi}\rho = dJ^s\gamma * (i_{J^s\Xi}\Theta_\lambda + i_{J^s\Xi}d\nu + i_{J^s\Xi}\mu)$. Но форма $i_{J^s\Xi}\mu$ контактна; более того, $i_{J^s\Xi}d\nu = \partial_{J^s\Xi}\nu - di_{J^s\Xi}\nu$. Отсюда получаем

$$J^s\gamma * i_{J^s\Xi}\mu = 0, \quad dJ^s\gamma * i_{J^s\Xi}d\nu = dJ^s\gamma * \partial_{J^s\Xi}\nu - dJ^s\gamma * di_{J^s\Xi}\nu = 0.$$

Следовательно, в силу теоремы 7 условие $dJ^s\gamma * i_{J^s\Xi}\Theta_\lambda = 0$ выполняется на координатных окрестностях расслоенных карт на Y.

8. Инвариантные формы Эйлера–Лагранжа

Пусть $\alpha : W \to Y$ — локальный автоморфизм многообразия Y, ε — форма-источник на J^sY. Скажем, что α есть *преобразование, сохраняющее* ε, если $J^s\alpha * \varepsilon = \varepsilon$. *Генератор* преобразований, сохраняющих форму-источник ε, является π-проектируемым векторным полем на Y, поток которого состоит из преобразований, сохраняющих форму-источник ε.

Лемма 12. *Пусть ε — форма-источник порядка s на Y.*

(a) *π-проектируемое векторное поле Ξ порождает поток, состоящий из преобразований, сохраняющих форму ε, тогда и только тогда, когда $\partial_{J^r\Xi}\varepsilon = 0$.*

(b) *Генераторы преобразований, сохраняющих ε, образуют подалгебру Ли в алгебре Ли векторных полей на J^rY.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 11. $\square$

Пусть λ — лагранжиан порядка r на Y и пусть E_λ — форма Эйлера–Лагранжа для λ. Из леммы 12 с использованием тождества

$$E_{J^r\alpha*\lambda} = J^{2r}\alpha * E_\lambda, \tag{8.1}$$

где α — произвольный локальный автоморфизм многообразия Y (ср. раздел 3), получаем следующее утверждение.

Лемма 13. *Пусть λ — лагранжиан порядка r. Локальный автоморфизм $\alpha : W \to Y$ является преобразованием, сохраняющим форму Эйлера–Лагранжа E_λ, тогда и только тогда, когда лагранжиан $J^r\alpha * \lambda$ тривиален, т. е.*

$$E_{J^r\alpha*\lambda} = 0. \tag{8.2}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из формулы (8.1). $\square$

Уравнение (8.2) является геометрической версией хорошо известного *уравнения Нетер–Бесселя–Хагена* .

Лемма 14. *Пусть λ — лагранжиан порядка r.*

(a) *Каждое преобразование, сохраняющее λ, является преобразованием, сохраняющим форму Эйлера–Лагранжа E_λ.*

(b) *Для каждого преобразования α, сохраняющего форму Эйлера–Лагранжа E_λ, лагранжиан $\lambda - J^r\alpha * \lambda$ вариационно тривиален.*

Доказательство. Эти утверждения очевидны. $\square$

Можно обобщить теорему Нетер на преобразования, сохраняющие форму Эйлера–Лагранжа. Однако в силу того, что доказательство этой теоремы основывается на теореме о ядре отображения Эйлера–Лагранжа, получится утверждение, носящее локальный характер. Обозначим через Θ_λ главный лепажев эквивалент лагранжиана λ.

Теорема 8. *Пусть λ — лагранжиан порядка r, γ — экстремаль, Ξ — генератор преобразований, сохраняющих форму Эйлера–Лагранжа E_λ. Тогда для любой точки $y_0 \in Y$ существует расслоеная карта (V, ψ) в y_0 и $(n-1)$-форма η, определенная на V^{r-1}, такая, что*

$$dJ^{2r}\gamma * (i_{J^s\Xi}\Theta_\lambda + \eta) = 0 \tag{8.3}$$

на $U = \pi(V)$.

Доказательство. Действительно, в предположениях теоремы 8 из формулы $\partial_{J^{2r}\Xi}E_\lambda = E_{\partial_{J^r\Xi}\lambda}$ получаем, что $E_{\partial_{J^r\Xi}\lambda} = 0$, поэтому лагранжиан $\partial_{J^r\Xi}\lambda$ лежит в ядре отображения Эйлера–Лагранжа (лемма 13). Таким образом, $\partial_{J^r\Xi}\lambda = hd\eta$ над достаточно малыми открытыми подмножествами V в Y такими, что (V, ψ) — расслоенная карта. Однако из первой инфинитезимальной вариационной формулы следует, что равенство

$$J^r\gamma * \partial_{J^r\Xi}\lambda = J^{2r-1}\gamma * i_{J^s\Xi}d\Theta_\lambda + dJ^{2r-1}\gamma * i_{J^s\Xi}\Theta_\lambda$$

приводится к виду $J^r\gamma * hd\eta = dJ^s\gamma * i_{J^s\Xi}\Theta_\lambda$. Так как $J^r\gamma * hd\eta = J^r\gamma * d\eta = dJ^r\gamma * \eta$, получаем формулу (8.3). $\square$

Замечание 2. Если в теореме 8, положить $r = 1$, то главный лепажев эквивалент Θ_λ корректно глобально определен. Более того, из свойств отображения Эйлера–Лагранжа следует, что форма η может быть корректно определена как глобальная форма на Y.

9. Векторные поля Якоби

Пусть λ — лагранжиан порядка r для Y, и γ — экстремаль лагранжиана λ; предполагаем, что γ удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа $E_\lambda \circ J^{2r}\gamma = 0$. Пусть $\alpha : W \to Y$ — локальный автоморфизм Y с проекцией α_0 и $J^r\alpha : W^r \to J^rY$ — продолжение r-го порядка отображения α. Скажем, что α — *симметрия* экстремали γ, если сечение $\alpha\gamma\alpha_0^{-1}$ также является экстремалью, т. е. $E_\lambda \circ J^{2r}(\alpha\gamma\alpha_0^{-1}) = 0$. Скажем, что π-проектируемое векторное поле Ξ *порождает симметрии* экстремали γ, если поток этого векторного поля состоит из симметрий экстремали γ; в этом случае будем называть Ξ *векторным полем Якоби* вдоль γ.

Теорема 9. *Преобразование, сохраняющее форму Эйлера–Лагранжа E_λ, является симметрией каждой экстремали γ.*

Доказательство. Пусть форма Эйлера–Лагранжа E_λ имеет порядок s. Докажем теорему 9 в два этапа.

1. Пусть γ — сечение расслоения Y, а α — преобразование, сохраняющее E_λ. Чтобы доказать теорему 9, сделаем два простых наблюдения. Во-первых, по определению для каждой точки $J^s_x\gamma$, принадлежащей области определения $J^s\alpha$, имеем $J^s\alpha(J^s_x\gamma) = J^s_{\alpha_0(x)}\alpha\gamma\alpha_0^{-1}$. Так как γ фиксировано, на открытом подмножестве в X выполняется равенство $(J^s\alpha \circ J^s\gamma)(x) = (J^s\alpha\gamma\alpha_0^{-1} \circ \alpha_0)(x)$, и на области определения отображения $\alpha\gamma\alpha_0^{-1}$ имеем

$$J^s\alpha \circ J^s\gamma \circ \alpha_0^{-1} = J^s\alpha\gamma\alpha_0^{-1}. \tag{9.1}$$

Во-вторых, из формулы (9.1) получаем, что для любого π-проектируемого векторного поля Z

$$(J^s\alpha\gamma\alpha_0^{-1}) * i_{J^s\mathrm{Z}}E_\lambda = (\alpha_0^{-1}) * (J^s\gamma) * (J^s\alpha) * i_{J^sZ}E_\lambda. \tag{9.2}$$

Но для каждой точки $J^s_x\delta$ из области определения формы (9.2) и для любых касательных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ в этой точке имеем

$$(J^s\alpha) * i_{J^sZ}E_\lambda(J^s_x\delta)(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = (i_{TJ^s\alpha^{-1}\cdot J^sZ}(J^s\alpha) * E_\lambda)(J^s_x\delta)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

поэтому

$$(J^s\alpha) * i_{J^s\mathrm{Z}}E_\lambda = i_{J^s(T\alpha^{-1}\cdot\mathrm{Z}\circ\alpha)}(J^s\alpha) * E_\lambda. \tag{9.3}$$

2. Используем формулы (9.2) и (9.3). Пусть γ — экстремаль и $(J^s\alpha) * E_\lambda = E_\lambda$. Тогда

$$J^s(\alpha\gamma\alpha_0^{-1}) * i_{J^s\mathrm{Z}}E_\lambda = (\alpha_0^{-1}) * (J^s_x\gamma) * (J^s\alpha) * i_{J^s\mathrm{Z}}E_\lambda = (\alpha_0^{-1}) * (J^s_x\gamma) * i_{J^s(T\alpha^{-1}\cdot\mathrm{Z}\circ\alpha)}E_\lambda = 0,$$

т. к. γ является экстремалью. □

Теорема 10. *Пусть λ — лагранжиан порядка r, s — порядок формы Эйлера–Лагранжа E_λ, γ — экстремаль. Тогда π-проектируемое векторное поле Ξ является векторным полем Якоби вдоль γ тогда и только тогда, когда*

$$E_{\partial_{J^r\Xi}\lambda} \circ J^s\gamma = 0. \tag{9.4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть x — точка, принадлежащая области определения γ, α_t — поток векторного поля Ξ, а $\alpha_{0,t}$ — проекция α_t. Выберем некоторые вектора $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in TJ^sY$ в точке $J^s_x\gamma$. Тогда из теоремы 3 получаем $E_{J^r\alpha*\lambda} = J^{2r}\alpha * E_\lambda$, следовательно,

$$\begin{aligned} E_{(J^r\alpha_t)*\lambda}(J^s_x\gamma)(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= (J^s\alpha_t) * E_\lambda(J^s_x\gamma)(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \\ &= E_\lambda(J^s\alpha_t(J^s_x\gamma))(TJ^s\alpha_t \cdot \xi_0, TJ^s\alpha_t \cdot \xi_1, TJ^s\alpha_t \cdot \xi_2, \dots, TJ^s\alpha_t \cdot \xi_n). \end{aligned}$$

В силу непрерывности у точки x есть окрестность U такая, что функция

$$(t, x) \to E_\lambda(J^s\alpha_t(J^s_x\gamma))(TJ^s\alpha_t \cdot \xi_0, TJ^s\alpha_t \cdot \xi_1, TJ^s\alpha_t \cdot \xi_2, \dots, TJ^s\alpha_t \cdot \xi_n)$$

определена на множестве $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Предположим, что Ξ есть генератор симметрий экстремали γ. Тогда $E_\lambda \circ J^s\alpha_t \circ J^s\gamma \circ \alpha_{0,t}^{-1} = 0$ на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$, т. е. $E_\lambda \circ J^s\alpha_t \circ J^s\gamma = 0$. Следовательно, т. к. ограничение касательного отображения $TJ^s\alpha_t$ на $J^s_x\gamma$ есть линейный изоморфизм, имеем $E_{(J^r\alpha_t)_*\lambda}(J^s_x\gamma)(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$, т. е. $E_{(J^r\alpha_t)_*\lambda} \circ J^s\gamma = 0$, что доказывает (9.4).

Для того, чтобы доказать достаточность, находим из (9.4), что $E_{(J^r\alpha_t)_*\lambda}(J^s_x\gamma) = E_\lambda(J^s_x\gamma)$. Но γ является экстремалью, поэтому $E_{(J^r\alpha_t)_*\lambda}(J^s_x\gamma) = 0$. $\square$

Автор выражает благодарность коллективам департамента математики и института высших исследований университета им. Ла Троба г. Бандора, Австралия, где он начал исследования вариационных свойств дифференциальных уравнений.

Литература

1. Dedecker P., Tulczyjew W.M. *Spectral sequences and the inverse problem of the calculus of variations* // Internat. Colloq., Aix-en-Provence, 1979; in: Differential Geometric Methods in Mathematical Physics, Springer, Berlin, Lecture Notes in Math. – 1980. – V. 836. – P. 498–503.
2. García P.L. *The Poincaré–Cartan invariant in the calculus of variations* // Symposia Math. – 1974. – V. 14. – P. 219–246.
3. Goldschmidt H., Sternberg S. *The Hamilton–Cartan formalism in the calculus of variations* // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1973. – V. 23. – P. 203–267.
4. Krupka D. *A geometric theory of ordinary first order variational problems in fibered manifolds.* I. *Critical sections* // J. Math. Anal. Appl. – 1975. – V. 49. – № 1. – P. 180–206.
5. Krupka D. *A geometric theory of ordinary first order variational problems in fibered manifolds.* II. *Invariance* // J. Math. Anal. Appl. – 1975. – V. 49. – № 2. – P. 469–476.
6. Krupka D. *Some geometric aspects of the calculus of variations in fibered manifolds* // Folia Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis 14 (1973); ArXiv:math-ph/0110005.
7. Trautman A. *Invariance of Lagrangian systems* // in: *General relativity*, Papers in honor of J.L. Synge, Oxford, Clarendon Press, 1972. – P. 85–99.
8. Krupka D., Krupka M. *Jets and contact elements* // in: *Proceedings of the Seminar on Differential Geometry*, D. Krupka (Ed.), Mathematical Publications, Silesian Univ. in Opava, Opava, Czech Republic, 2000. – P. 39–85.
9. Saunders D. *The geometry of jet bundles.* – Cambridge Univ. Press, 1989. – 293 p.
10. Vinogradov A.M., Krasilschik I.S., Lychagin V.V. *Introduction to the geometry of non-linear differential equations.* – Moscow: Nauka, 1986.
11. Krupka D. *Lepagean forms in higher order variational theory* // in: *Modern Developments in Analytical Mechanics*, Proc. IUTAM-ISIMM Sympos., Turin, June 1982; Academy of Sciences of Turin, 1983. – P. 197–238.
12. Anderson I., Duchamp T. *On the existence of global variational principles* // Am. J. Math. – 1980. – V. 102. – P. 781–867.
13. Helmholtz H. *Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung* // J. für die reine u. angewandte Math. – 1886. – Bd. 100. – S. 137–166.
14. Sonin N.Ya. *On the definition of maximal and minimal properties* // Warsaw University Izvestiya. – 1886. – V. 1–2. – P. 1–68.
15. Aldersley S.J. *Higher Euler operators and some of their applications* // J. Math. Phys. – 1979. – V. 20. – P. 522–531.
16. Tonti E. *Variational formulation of nonlinear differential equations.* I // Bull. Acad. Roy. Belg. C. Sci. – 1969. – V. 55. – № 3. – P. 137–165.
17. Tonti E. *Variational formulation of nonlinear differential equations.* II // Bull. Acad. Roy. Belg. C. Sci. – 1969. – V. 55. – № 4. – P. 262–278.
18. Vainberg M.M. *Variational methods in the theory of nonlinear operators.* – Moscow: GITL, 1959.

19. Anderson I.M. *Introduction to the variational bicomplex* // Contemporary Mathematics. – 1992. – V. 132. – P. 51–73.
20. Krbek M., Musilová J. *Representation of the variational sequence by forms* // Acta Appl. Math. – 2005. – V. 88. – P. 177–199.
21. Krupka D. *On the local structure of the Euler–Lagrange mapping of the calculus of variations* // in: Proc. Conf. on Diff. Geom. Appl, Nove Mesto na Morave, Sept. 1980; Charles Univ., Prague, 1981. – P. 181–188; ArXiv:math-ph/0203034.
22. Krupka D. *Variational sequences on finite order jet spaces* // in: *Differential Geometry and its Applications*, Proc. Conf., Brno, Czechoslovakia, 1989; World Scientific, Singapore, 1990. – P. 236–254.
23. Takens F. *A global version of the inverse problem of the calculus of variations* // J. Different. Geom. – 1979. - V. 14. – P. 543–562.
24. Vitolo R. *Finite order Lagrangian bicomplexes* // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1999. – V. 125. – P. 321–333.
25. Krupka D. *The total divergence equations* // Lobachevskii J. of Math. – 2006. – V. 23. – P. 71–93.
26. Krupka D., Musilová J. *Trivial lagrangians in field theory* // Diff. Geom. Appl. – 1998. – V. 9. – P. 293–305.
27. Brajercík J., Krupka D. *Variational principles for locally variational forms* // J. Math. Phys. – 2005. – V. 46. – № 5. – P. 1–15.
28. Gotay M. *An exterior differential systems approach to the Cartan form* // in: Geométrie Symplectique et Physique Mathematique, P. Donato et al. (Eds.), Birkhauser, Boston, 1991.
29. Kolar I., Vitolo R. *On the Helmholtz operator for Euler morphisms* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 2003. – V. 135. – P. 277–290.
30. Krupková O. *The Geometry of ordinary variational equations.* – Lecture Notes in Math., Springer, Berlin. – 1997. – V. 1678.
31. Krupka D., Stepanková O. *On the Hamilton form in second order calculus of variations* // Proc. of the Meeting "*Geometry and Physics*", Florence, October 1982; Pitagora Editrice Bologna, 1983. – P. 85–101.
32. Krupková O. *Hamiltonian field theory* // J. Geom. Phys. – 2002. – V. 43. – P. 93–132.
33. Krupková O. *Lepagean* 2*-forms in higher order Hamiltonian mechanics.* I. *Regularity* // Arch. Math. (Brno). – 1986. – V. 22. – P. 97–120,

Палацкий университет
(*г. Оломоуц, Чешская республика*),

Университет им. Ла Троба
(*г. Бандора, Австралия*)

Поступила
12.04.2007