ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 4 (419)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.63

С.Н. МАРТЮШОВ

ПОСТРОЕНИЕ ДВУ- И ТРЕХМЕРНЫХ СЕТОК ДЛЯ ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Для построения расчетных сеток в двумерных и трехмерных областях с фиксированной границей используется либо вариационный, либо конечноразностный подход. Во втором случае расчетная область в физических переменных x, y, z отображается в прямоугольную область в пространстве криволинейных координат ξ, η, ζ. Векторная функция $\vec{r}(\vec{\xi}) = (x(\vec{\xi}), y(\vec{\xi}), z(\vec{\xi}))$ ($\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$) — радиус-вектор точки в физическом пространстве — ищется как решение эллиптического векторного уравнения. Наиболее простыми моделями являются уравнения второго порядка Лапласа или Пуассона. Правые части последнего (так называемые контрольные функции) служат для управления распределением узлов сетки в расчетной области.

1. Построение двумерных сеток

Для построения двумерных сеток было выбрано векторное уравнение Пуассона вида [1]

$$g_{22}(\vec{r}_{\xi\xi} + P\vec{r}_\xi) + g_{11}(\vec{r}_{\eta\eta} + Q\vec{r}_\eta) - 2g_{12}\vec{r}_{\xi\eta} = 0, \tag{1}$$

где $\vec{r}_\xi = \partial\vec{r}/\partial\xi$, $\vec{r}_{\xi\xi} = \partial^2\vec{r}/\partial\xi^2$, $g_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\eta$ — коэффициенты метрического тензора. Контрольные функции P, Q от $\vec{\xi}$ уравнения (1) служат для сгущения (разрежения) координатных линий семейства $\xi = \mathrm{const}$ (в случае P) и $\eta = \mathrm{const}$ (в случае Q) к выбранным координатным линиям и точкам. Функция P имеет вид

$$P = -\sum_{i=1}^{N} a_i \operatorname{sign}(\xi - \xi_i) e^{-c_i|\xi-\xi_i|} - \sum_{k=1}^{M} b_k \operatorname{sign}(\xi - \xi_k) e^{-d_k((\xi-\xi_k)^2+(\eta-\eta_k)^2)^{1/2}},$$

$Q(\xi, \eta) = P(\eta, \xi)$. Первые слагаемые служат для сжатия ($a_i > 0$) или разрежения ($a_i < 0$) координатных линий $\xi = \mathrm{const}$ к выбранным линиям $\xi = \xi_i$, $i = 1, 2, N$. Вторые слагаемые отвечают сжатию ($b_k > 0$) или разрежению ($b_k < 0$) координатных линий $\xi = \mathrm{const}$ к выбранным узлам сетки (ξ_k, η_k), $k = 1, 2, M$, на этих координатных линиях. Величина констант a_i, b_k определяет интенсивность сжатия. Константы $c_i, d_k > 0$ определяют размеры области сжатия-разрежения: чем меньше коэффициент, тем на большее число координатных линий $\xi = \mathrm{const}$ распространяется действие данного слагаемого в контрольной функции.

Векторное уравнение в частных производных (1) аппроксимируется конечноразностным (для первых и вторых производных используются симметричные разности). Получившаяся система линейных уравнений решается методом простой итерации. Начальное приближение в зависимости от вида расчетной области строится трансфинитной интерполяцией или интерполяцией вдоль одного из координатных направлений. В качестве краевых условий можно задавать либо непосредственно распределение узлов на границе (условие Дирихле), либо условие Неймана $\partial\vec{r}/\partial n = 0$. Во втором случае сетка, конструируемая при помощи уравнения (1), будет ортогональна к той части границы, на которой заданы условия Неймана. При помощи описанного алгоритма строились двумерные сетки для расчета следующих двумерных плоских и осесимметричных задач газовой динамики.

Двумерные плоские задачи: 1) дифракция ударной волны на выпуклом угле (для этой задачи производилось сгущение сетки к поверхности угла и в окрестности угловой точки), 2) дифракция ударной волны на выпуклом и вогнутом цилиндре (задача определения нестационарного перехода Маховское-регулярное отражение, здесь строились расчетные сетки для различных значений угла сегмента выпуклого или вогнутого цилиндра).

Двумерные сетки для осесимметричных и пространственных задач: 3) задача о трансзвуковом обтекании снаряда, осесимметричном и под углом атаки [2], 4) задача о выходе ударной волны в затопленную камеру из цилиндрического насадка [3] (расчетная область в этом случае по своей форме идентична области для задачи 1), однако, т. к. на различных участках границы ставятся краевые условия входа, выхода, непротекания, то в этих двух задачах требуется различный вид расчетных сеток).

Данный алгоритм использовался также для конструирования трехмерных расчетных сеток, при этом двумерные сетки строятся на координатных поверхностях, из которых состоит трехмерная сетка. Такие сетки размерности “2.5” строились для следующих задач: 5) обтекание тел со стабилизаторами (расчетная сетка состояла в этом случае из координатных поверхностей — круговых конусов с вершинами на оси тела), 6) выход ударной волны из пространственного, квадратного в сечении, насадка в затопленную камеру (трехмерная сетка строилась набором двумерных в меридиональных плоскостях, причем двумерные сетки идентичны сеткам задачи 4).

2. Построение трехмерных сеток

Для трех переменных (x, y, z) уравнение, аналогичное (1), имеет вид

$$g_{11}(\vec{r}_{\xi\xi} + P\vec{r}_{\xi}) + g_{22}(\vec{r}_{\eta\eta} + Q\vec{r}_{\eta}) + g_{33}(\vec{r}_{\zeta\zeta} + R\vec{r}_{\zeta}) - 2g_{12}\vec{r}_{\xi\eta} - 2g_{23}\vec{r}_{\eta\zeta} - 2g_{13}\vec{r}_{\xi\zeta} = 0. \tag{2}$$

Контрольные функции P, Q, R от ξ, η, ζ определяют распределение координатных поверхностей $\xi = \mathrm{const}$, $\eta = \mathrm{const}$, $\zeta = \mathrm{const}$ соответственно и имеют вид (выпишем функцию P, остальные получаются из нее циклической подстановкой)

$$\begin{aligned} P = &-\sum_{i=1}^{N} a_i \operatorname{sign}(\xi - \xi_i) e^{-c_i|\xi-\xi_i|} - \sum_{k=1}^{M_1} b_k \operatorname{sign}(\xi - \xi_k) e^{-d_k((\xi-\xi_k)^2+(\eta-\eta_k)^2)^{1/2}} - \\ &- \sum_{k=1}^{M_2} e_k \operatorname{sign}(\xi - \xi_k) e^{-f_k((\xi-\xi_k)^2+(\zeta-\zeta_k)^2)^{1/2}} - \sum_{j=1}^{L} g_j \operatorname{sign}(\xi - \xi_j) e^{-h_j((\xi-\xi_j)^2+(\eta-\eta_j)^2+(\zeta-\zeta_j)^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Первые слагаемые служат для сжатия ($a_i > 0$) или разрежения ($a_i < 0$) координатных поверхностей $\xi = \mathrm{const}$ к выбранным поверхностям $\xi = \xi_i$, $i = 1, 2, N$ (a_i определяет степень сжатия, c_i — величину области, где это сжатие действует). Второе и третье слагаемые отвечают сжатию или разрежению координатных поверхностей $\xi = \mathrm{const}$ к выбранным координатным линиям $\xi = \xi_k$, $\eta = \eta_k$, $k = 1, 2, M_1$, и $\xi = \xi_k$, $\zeta = \zeta_k$, $k = 1, 2, M_2$, на этих координатных поверхностях. Величины констант b_k, e_k определяют интенсивность сжатия. Константы $d_k, f_k > 0$ определяют размеры области сжатия-разрежения. Четвертое слагаемое отвечает сжатию-разрежению координатных поверхностей $\xi = \mathrm{const}$ к выбранным узлам сетки ($\xi = \xi_j$, $\eta = \eta_j$, $\zeta = \zeta_j$), $j = 1, 2, L$, на этих координатных поверхностях. Разностная аппроксимация уравнения (2), краевые условия и построение начального приближения аналогичны двумерному случаю. По данному алгоритму были рассчитаны трехмерные сетки для двух задач: 7) обтекание части планера [4], 8) выход ударной волны из круглого отверстия в горизонтальной плоскости в поперечный поток [3].

3. Построение адаптивных двумерных сеток

Изложенный в предыдущих параграфах алгоритм построения сеток с помощью контрольных функций для трехмерного случая является достаточно трудоемким. Сгущение-разрежение координатных поверхностей сетки к a priori известным особенностям решения или геометрии области, если таких особенностей несколько, требует знания нескольких десятков постоянных, определяющих контрольные функции. В качестве альтернативного был рассмотрен подход Брэкбилла-Зальцмана [5] заключающийся в адаптации сетки к особенностям решения газодинамической задачи. При определении отдельных участков границы расчетной области зависимостями $F_i(x, y, z) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, M$, и задании на этих участках границы условий Неймана ортогональности сетки границе: $\partial\vec{r}/\partial\vec{n} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, M$, автоматически происходит адаптация (сгущение) сетки на тех участках границы, где возникают большие градиенты и экстремумы искомых функций, и задавать распределение узлов на граничных поверхностях не требуется. Одновременно сохраняется близость сетки к равномерной и ортогональной [5]. В качестве первого шага в реализации этого подхода алгоритм [5] был реализован для двумерного случая и применялся для построения сеток в задаче 2). Уравнения для построения сеток в случае двух переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} &b_1 x_{\xi\xi} + b_2 x_{\xi\eta} + b_3 x_{\eta\eta} + a_1 y_{\xi\xi} + a_2 y_{\xi\eta} + a_3 x_{\eta\eta} + \lambda_w g W W_x = 0, \\ &a_1 x_{\xi\xi} + a_2 x_{\xi\eta} + a_3 x_{\eta\eta} + c_1 y_{\xi\xi} + c_2 y_{\xi\eta} + c_3 x_{\eta\eta} + \lambda_w g W W_y = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Значения коэффициентов a_i, b_i, c_i в зависимости от ξ, η, λ_0, λ_w выписаны в [5], λ_0, λ_w — весовые коэффициенты, соответствующие функционалам, отвечающим за близость сетки к ортогональной и адаптацию ее к решению газодинамической задачи (весовой коэффициент функционала, отвечающего за близость сетки к равномерной, принимается за 1). Весовая функция в (3) W, определяющая вид функционала адаптации, выбирается в форме $W = (1 + \alpha(\rho_\xi^2 + \rho_\eta^2) + \beta(\rho_{\xi\xi}^2 + \rho_{\eta\eta}^2))^{1/2}$, где ρ — плотность газа, W_x, W_y выражаются через W_ξ, W_η.

Литература

1. Tompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. *Numerical grid generation.* – New York: North Holland, 1985.
2. Мартюшов С.Н. *Расчет пространственных задач обтекания на основе TVD схемы Хартена* // Вычисл. технологии. – Новосибирск, 1995. – Т. 14. – № 12. – С. 219–228.
3. Мартюшов С.Н. *Расчет двух нестационарных задач дифракции явным разностным алгоритмом Хартена* // Тез. докл. конф. “Матем. модели и числ. метод. механ. сплошн. среды”. – Новосибирск, 1996. – С. 388–389.
4. Martyushov S.N. *Complex of codes “MODAMS” for calculation stream problem for spatial bodies* // The Third Russian-Japan Joint Symposium on Computational Fluid Dynamics. Book of Abstracts. 2. – Vladivostok, 1992. – P. 139.
5. Brackbill J.U., Saltzman J.S. *Adaptive zoning for singular problems in two dimensions* // J. Comput. Phys. – 1982. – V. 46. – № 3. – P. 342–368.

Уральский государственный технический университет

Поступила 06.09.1996