ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 517.54

И.Р. КАЮМОВ

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ КРЫЛА

В [1] введен класс профилей, обтекаемых идеальной несжимаемой жидкостью и имеющих фиксированный внешний конформный радиус, равный 1. На этом классе профилей при заданном угле атаки $\alpha/2$ и неизменной скорости невозмущенного потока поставлена задача об определении экстремального профиля, на котором достигается минимум из максимальных скоростей течения по всему классу. Там же в [1] эта задача сведена к задаче на классе Σ ([2], с. 110) (в который входят функции $F = z + a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$, однолистные в $D^- = \{|z| > 1\}$)

$$\sup_{|\zeta|>1} \left|\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)(1 + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta})/F'(\zeta)\right| \to \min_{F\in\Sigma} = M(\alpha), \quad \alpha > 0. \tag{1}$$

В данной работе при вполне ожидаемых предположениях об экстремалях доказана гипотеза из [1] о том, что экстремальный профиль является разрезом. Приведены также некоторые оценочные результаты.

Лемма 1. *Предположим, что F доставляет экстремум в задаче* (1), $|F(\zeta)| \ge \delta_0$ *и* $F(|\zeta| = 1)$ — *непрерывная кривая, которая имеет кривизну для всех $\zeta = e^{i\theta}$, кроме быть может $\theta = 0$ и $\theta = -\alpha$.*

Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и S_1 — ограниченная односвязная область, не содержащая 0, *такие, что*

$$\overline{S_0} \subset S_1, \quad \text{где } S_0 = \left\{F(\zeta) : \left|\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)\left(1 + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)/F'(\zeta)\right| \ge M(\alpha) - \varepsilon_0, \quad \zeta \in D^-\right\}. \tag{2}$$

Доказательство. Вначале предположим, что $F(|\zeta| = 1)$ не является выпуклой кривой. Тогда в силу того, что $F(|\zeta| = 1)$ состоит из двух гладких дуг, на которых определена кривизна, и простых геометрических соображений найдется точка ζ_0, $|\zeta_0| = 1$, такая, что

1) кривизна кривой $F(|\zeta| = 1)$ в точке $F(\zeta_0)$ меньше нуля,
2) существует гладкая несамопересекающаяся кривая L, соединяющая точки 0 и ∞ с условием $F(|\zeta| = 1) \cap L = \{F(\zeta_0)\}$.

В качестве S_1 возьмем кольцо $\delta_0/2 < |\zeta| < 3$ с разрезом по кривой L. Осталось показать, что найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что выполняется (2).

Предположим противное. Существует последовательность $\{\zeta_n\} \in D^-$ такая, что

$$\left|\left(1 - \frac{1}{\zeta_n}\right)\left(1 + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta_n}\right)/F'(\zeta_n)\right| \to M(\alpha), \quad F(\zeta_n) \to A, \ \ A \notin S_1.$$

В силу принципа максимума модуля для аналитических функций заключаем $A \in L$ и $A = F(\zeta_0)$. Это значит, что

$$\left|\left(1 - \frac{1}{\zeta_0}\right)\left(1 + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta_0}\right)/F'(\zeta_0)\right| = M(\alpha).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96–01–00123) и гранта Сороса (проект a96–1876).

Но в силу принципа Зарембо–Жиро, который гласит, что максимум скорости на контуре достигается только в точке с положительной кривизной, это противоречит (1).

Теперь предположим, что $F(|\zeta| = 1)$ является выпуклой кривой. Если существует точка $\zeta_0, |\zeta_0| = 1$ такая, что имеет место

$$\left|\left(1 - \frac{1}{\zeta_0}\right)\left(1 + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta_0}\right)/F'(\zeta_0)\right| < M(\alpha),$$

то, проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, мы сможем построить S_1. Допустим противное

$$\left|\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)\left(1 + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)/F'(\zeta)\right| = M(\alpha) \quad \text{для всех} \quad \zeta = e^{i\theta},$$

кроме, быть может, $\theta = 0$ и $\theta = -\alpha$. Поскольку, как хорошо известно ([3], с. 250), $\log|F'|$ принадлежит классу Смирнова,

$$\left|\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)\left(1 + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)/F'(\zeta)\right| \equiv M(\alpha), \quad \zeta \in D^-.$$

Но это тождество противоречиво, т. к. при $\zeta = \infty$ имеем $\log M = 0$ и $M = 1$. Однако легко видеть, что $M = 1$ только при $\alpha = 0$. Противоречие. $\square$

Лемма 2. *Пусть S_0 — некоторое множество, $\overline{S_0} \subset S_1$, где S_1 — ограниченная односвязная область, не содержащая* 0.

Тогда существует полином $G(z)$, $G(z) = O(z^2)$, $z \to 0$, такой, что

$$\operatorname{Re}\left[\frac{2G(z)}{z} - G'(z)\right] \leq -1, \quad z \in S_0.$$

Доказательство. Вначале покажем, что существует полином $\Phi(z)$, $\Phi(z) = O(z^2)$, $z \to 0$, такой, что

$$\operatorname{Re}\Phi(z) \leq -1, \quad z \in S_0.$$

Отобразим функцией $\psi = \psi(z)$ область S_1 на область $\operatorname{Re}\psi < -3$. Поскольку $\overline{S_0} \subset S_1$, согласно известным теоремам о приближении регулярных функций полиномами [4], существует полином $P_N(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} p_k z^k$ такой, что

$$|P_N(z) - \psi(z)| \leq 1, \quad z \in S_0,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Re}P_N(z) \leq -2, \quad z \in S_0.$$

Так как функция $\frac{p_0}{z^2} + \frac{p_1}{z}$ регулярна в S_1, то существует полином $Q_T(z) = \sum\limits_{k=0}^{T} q_k z^k$ такой, что

$$\left|Q_T(z) - \frac{p_0}{z^2} + \frac{p_1}{z}\right| \leq \frac{1}{R^2}, \quad R = \sup_{z \in S_0}|z|, \quad z \in S_0,$$

т. е.

$$|z^2 Q_T(z) - (p_0 + p_1 z)| \leq 1.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}[P_N(z) + z^2 Q_T(z) - (p_0 + p_1 z)] \leq -1.$$

Отсюда видно, что в качестве $\Phi(z)$ можно взять $P_N(z) + z^2 Q_T(z) - (p_0 + p_1 z)$.

В качестве G возьмем $G(z) = -z^2 \int \frac{\Phi(z)}{z^2} dz$. $\square$

Теорема 1. *Пусть F — функция, для которой*

$$\min_{G\in\Sigma}\sup_{|\zeta|>1}\left|\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\left(1+\frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)/G'(\zeta)\right| = \sup_{|\zeta|>1}\left|\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\left(1+\frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)/F'(\zeta)\right| = M(\alpha).$$

Если F непрерывно продолжима на границу $\partial D^- = \{|\zeta| = 1\}$ и $F(\partial D^-)$ состоит из двух дуг, внутри каждой из которых определена кривизна (т. е. $F(|\zeta| = 1)$ имеет кривизну во всех точках, кроме $\zeta = e^{i\alpha}$ и $\zeta = 1$), то $F(D^-)$ является внешностью разреза.

Доказательство. Предположим противное. Тогда можно считать, что 0 — внешняя точка по отношению к $F(\partial D^-)$. Это значит, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что $|F(\zeta)| \geq \delta_0$, поэтому для функции F выполняются условия леммы 1. Известно [2], что $f(z) = 1/F(\frac{1}{z}) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} c_k z^k$, $z \in D = \{|z| < 1\}$, принадлежит S — классу однолистных и регулярных в круге D функций. Заметим также, что f ограничена в D. В силу леммы 1 существуют $\varepsilon_0 > 0$ и ограниченная односвязная, не содержащая 0, область S_1 такая, что

$$S_0 \subset S_1, \quad \text{где} \quad S_0 = \left\{ f(z) : \left|\frac{f^2(z)(1-z)(1+e^{i\alpha}z)}{z^2 f'(z)}\right| \geq M(\alpha) - \varepsilon_0, \quad z \in D \right\}.$$

К множествам S_0, S_1 применим лемму 2. Запишем вариацию для функции f

$$f_*(z) = f(z) + \lambda G(f(z)),$$

где $G(z)$ — тот самый полином, о котором идет речь в лемме 2. Так как f ограничена, а G — полином, то $f_* \in S$ при малых λ. Поэтому $F_*(\zeta) = 1/f_*(\frac{1}{\zeta}) \in \Sigma$. Вычислим значение минимизируемого функционала для F_*

$$\sup_{|\zeta|>1}\left|\frac{(1-\frac{1}{\zeta})(1+\frac{e^{i\alpha}}{\zeta})}{F_*'(\zeta)}\right| = \sup_{|z|<1}\left|\frac{f_*^2(z)(1-z)(1+e^{i\alpha}z)}{z^2 f_*'(z)}\right| =$$
$$= \sup_{|z|<1}\left|\frac{f^2(z)(1-z)(1+e^{i\alpha}z)}{z^2 f'(z)}\right|\left(1+\frac{\lambda}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{2G(f)}{f} - G'(f)\right)\right) + O(\lambda^2) = M_\lambda.$$

Если $z \notin S_0$, то $M_\lambda \leq M(\alpha)(1-\frac{\lambda}{2}) + O(\lambda^2)$. Если $z \in S_0$, то $M_\lambda \leq (M(\alpha) - \varepsilon_0)(1 + O(\lambda))$. Это значит, что $M_\lambda < M(\alpha)$, начиная с некоторого $\lambda \leq \lambda_0$, т. е. мы получили противоречие с экстремальностью функции F. □

Замечание. Вся суть нашего метода заключается именно в выборе функции G, которая существенно зависит от f. Заметим, что в классических вариационных формулах, приспособленных для доказательства факта отсутствия внешних точек, функция G изначально задается вне зависимости от f.

Положим

$$M(R,\alpha) = \min_{F\in\Sigma}\max_{|\zeta|=1}\left|\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\left(1+\frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)/F'(R\zeta)\right|.$$

Существование экстремальной функции в этой задаче легко устанавливается с помощью стандартных теорем о нормальных семействах аналитических функций.

Предварительно докажем следующее

Утверждение.

$$M(\alpha) \leq M(R,\alpha) \leq \frac{4M(\alpha)}{(1+\frac{1}{R})^2},$$

и, следовательно, $M(R,\alpha) = M(\alpha) + O(R-1)$, $R \to 1$.

Доказательство. Вначале покажем, что $M(\alpha) \le M(R,\alpha)$. Пусть F дает экстремум для $M(R,\alpha)$. Тогда $G(\zeta) = \frac{F(R\zeta)}{R} \in \Sigma$ и

$$M(\alpha) \le \sup_{|\zeta|=1} \left| \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\left(1+\frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)/G'(\zeta) \right| = \max_{|\zeta|=1} \left| \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\left(1+\frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)/F'(R\zeta) \right| = M(R,\alpha).$$

Таким образом, левая оценка доказана. Докажем правую. Пусть F дает экстремум для $M(\alpha)$. Имеем

$$M(R,\alpha) \le \max_{|\zeta|=1} \left| \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\left(1+\frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)/F'(R\zeta) \right| \le$$

$$\le \max_{|\zeta|=1} \left| \frac{(1-\frac{1}{R\zeta})(1+\frac{e^{i\alpha}}{R\zeta})}{F'(R\zeta)} \right| \sup_{|\zeta|>1} \left| \frac{1-\frac{1}{\zeta}}{1-\frac{1}{R\zeta}} \right| \sup_{|\zeta|>1} \left| \frac{1+\frac{e^{i\alpha}}{\zeta}}{1-\frac{e^{i\alpha}}{R\zeta}} \right| \le \frac{4M(\alpha)}{(1+\frac{1}{R})^2}. \quad \square$$

Теперь можем сформулировать конструктивную теорему для решения исходной задачи. Говорят, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принадлежит D_n, если существует функция F из класса Σ такая, что первые n членов разложения в ряд Лорана суть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (см. [5]). Это множество D_n называется n-м телом коэффициентов в классе Σ.

Теорема 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N = N(\varepsilon) = O(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon})$ — *целое число такое, что*

$$M(\alpha) = \min_{(a_1,\ldots,a_N)\in D_N} \max_{\theta} \left| \frac{(1-e^{-i\theta})(1+e^{i(\alpha-\theta)})}{1-\sum\limits_{k=1}^{N} k a_k (\mathrm{R}e^{i\theta})^{-(k+1)}} \right| + O(\varepsilon),$$

$R = 1+\varepsilon$.

Доказательство. Так как $R = 1+\varepsilon$, то в силу утверждения $M(R,\alpha) = M(\alpha) + O(\varepsilon)$. Пусть $F(\zeta) = \zeta + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k} \in \Sigma$.

Положим $P_N(\zeta) = \zeta - \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \zeta^{-k}$. Имеем

$$|P'_N(R\zeta)/F'(R\zeta)| = |(P'_N(R\zeta) - F'(R\zeta))/F'(R\zeta) + 1| = \left| \frac{\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k (R\zeta)^{-(k+1)}}{F'(R\zeta)} + 1 \right|.$$

Следовательно,

$$1 - \frac{1}{1-1/R^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{k} R^{-(k+1)} \le |P'_N(R\zeta)/F'(R\zeta)| \le 1 + \frac{1}{1-1/R^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{k} R^{-(k+1)};$$

здесь ([2], с. 117)

$$|F'(R\zeta)| \le 1\Big/\left(1-\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{и} \quad |a_k| \le \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Таким образом, из хорошо известных оценок анализа следует

$$|P'_N(R\zeta)/F'(R\zeta)| = 1 + O\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)^N \varepsilon^{2.5}}\right),$$

$$|F'(R\zeta)/P'_N(R\zeta)| = 1 + O\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)^N \varepsilon^{2.5}}\right).$$

Положим $N = \frac{3}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда

$$|P'_N(R\zeta)/F'(R\zeta)| = 1 + O(\varepsilon), \quad |F'(R\zeta)/P'_N(R\zeta)| = 1 + O(\varepsilon),$$

откуда следует утверждение теоремы. $\square$

После качественных результатов перейдем к количественным оценкам. В [1] показано, что $M(\alpha) \geq \exp(\sin(\alpha/2))$. Более точную оценку дает

Теорема 3. $M(\alpha) \geq \exp(\sin(\alpha/2) + p(\alpha))$, *где*

$$p(\alpha) = \sup_{r\in(0,1)} \left(\frac{\pi^2}{12} \frac{\sin^3(\alpha/2)}{(\pi - \log(1-r^2))^2} - (1-r)\sin(\alpha/2) \right).$$

Замечание. Легко видеть, что $p(\alpha) > 0$ при $0 < \alpha < \pi$, т. к. $\lim\limits_{r\to 1}(1-r)\log^2(1-r^2) = 0$.

Доказательство. Пусть F — такая функция, что $\left|\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\left(1+\frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)/F'(\zeta)\right| \leq M(\alpha)$, $\zeta \in D^-$, $F \in \Sigma$. Перейдем к кругу $D = \{|z| < 1\}$:

$$\left|(1-z)(1+e^{i\alpha}z)/F'\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq M(\alpha), \quad z \in D.$$

Тогда для любого $r \in [0,1]$

$$\left|(1-rz)(1+e^{i\alpha}rz)/F'\left(\frac{1}{rz}\right)\right| \leq M(\alpha), \quad z \in D.$$

Введем функцию $\Phi(z) = \log\left((1-rz)(1+e^{i\alpha}rz)/F'\left(\frac{1}{rz}\right)\right)$, $z \in D$, которая, очевидно, обладает следующими свойствами:

$$\Phi(z) = r(e^{i\alpha}-1)z + O(z^2), \quad z \to 0, \quad \operatorname{Re}\Phi(z) \leq \log M(\alpha),$$
$$|\operatorname{Im}\Phi(z)| \leq T = \pi + \log\frac{1}{1-r^2}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались хорошо известной оценкой ([2], с.116)

$$|\arg F'(\zeta)| \leq \frac{1}{1-\frac{1}{|\zeta|^2}}, \quad \zeta \in D^-.$$

Теперь, применив принцип гиперболической метрики ([2], с.325) в D, получим

$$|r(e^{i\alpha}-1)| \leq \frac{1-|w(0)|^2}{|w'(0)|},$$

где w — функция, отображающая область

$$\operatorname{Re} z \leq \log M(\alpha), \quad |\operatorname{Im} z \leq T|,$$

на круг. Проводя простые выкладки, приходим к искомой оценке

$$\log M(\alpha) \geq \frac{T}{\pi}\log\frac{1+\frac{\pi r\sin(\alpha/2)}{2T}}{1-\frac{\pi r\sin(\alpha/2)}{2T}} \geq r\sin(\alpha/2) + \frac{2T}{3\pi}\left(\frac{\pi r\sin(\alpha/2)}{2T}\right)^3. \quad \square$$

Считаю своим долгом выразить благодарность Ф.Г. Авхадиеву за постановку задачи, обсуждение направления работы и результатов. Также выражаю благодарность А.М. Елизарову, С.Р. Насырову и Д.В. Маклакову за полезные советы.

Литература

1. Avhadiev F.G., Elizarov A.M., Fokin D.A. *Estimates for critical Mach number under isoperimetric constraints* // European J. Appl. Math. – 1995. – V. 6. – P. 385–398.
2. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций.* – М.: ГИТТЛ, 1950. – 336 с.
4. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* Т. 2. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1968. – 624 с.
5. Прохоров Д.В. *Множества значений системы функционалов на классе однолистных функций* // Матем. сб. – 1990. – Т. 181. – № 12. – С. 1659–1677.

Казанский государственный университет

Поступила 07.05.1996