ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9

Г.Ю. ВИНОГРАДОВА, К.А. ГЕОРГИЕВ, В.М. ДЕУНДЯК

О СТРУКТУРЕ АЛГЕБР СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СО СДВИГОМ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА СЕМЕЙСТВ

Исследование фредгольмовости и вычисление индекса многих классов операторов со сдвигом Карлемана обычно проводится путем сопоставления оператору A со сдвигом некоторого вспомогательного матричного оператора $\widetilde{A}$ без сдвига, при этом фредгольмовость A равносильна фредгольмовости $\widetilde{A}$ и для индексов выполнено равенство $n\cdot \mathrm{ind}(A)=\mathrm{ind}(\widetilde{A})$, где n — порядок сдвига [1]–[2]. Аналогичное соотношение сохраняется и для индексов семейств, принимающих значения в группе $K^0(X)$, где X — пространство параметров семейства. Однако это не всегда позволяет выразить индекс семейства операторов со сдвигом через индекс семейства вспомогательных операторов, т. к. группа $K^0(X)$ может иметь нетривиальную периодическую часть (см. [3]). В связи с этим в [4] построен сохраняющий индекс *изоморфизм подобия* алгебры сингулярных интегральных операторов с кусочно-квазинепрерывными коэффициентами и диэдральной группой сдвигов на алгебру теплицево-ганкелевых операторов без сдвига. В данной статье исследуются сингулярные интегральные операторы в весовых пространствах.

1^0. Введем необходимые обозначения. Пусть $C(X;Y)$ — пространство непрерывных отображений компакта X в метрическое пространство Y с топологией равномерной сходимости, а $C(X)=C(X;\mathbf{C})$. Если $\mathcal{X}$ — произвольное банахово пространство, то $\mathrm{End}(\mathcal{X})$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{X}$, а $\mathrm{Comp}(\mathcal{X})$ — идеал компактных операторов. Пространство фредгольмовых операторов из операторной алгебры $\mathcal{B}$ обозначим $\mathrm{Fr}(\mathcal{B})$. Для $\Phi\in C(X;\mathrm{Fr}(\mathrm{End}(\mathcal{X})))$ через $\mathrm{IND}_X(\Phi)$ будем обозначать индекс семейства. Если $\mathcal{B}$ — произвольная банахова алгебра, то $\mathrm{Comm}(\mathcal{B})$ — ее коммутаторный идеал, $G\mathcal{B}$ — группа обратимых элементов, а $L(n;\mathcal{B})$ — банахова алгебра $n\times n$-матриц над $\mathcal{B}$. Элементы из $L(n;\mathcal{B})$ будем записывать в виде $\|b_{i,j}\|_{i,j=0}^{n-1}$.

Пусть Γ — простой замкнутый ориентированный ляпуновский контур; κ — неотрицательная измеримая почти всюду отличная от нуля функция на Γ, $1<p<\infty$; $L_{p,\kappa}(\Gamma)$ — весовое L_p-пространство с нормой $\|f\|=\Big(\int|f(t)|^p\kappa(t)dt\Big)^{1/p}$ и $L^m_{p,\kappa}(\Gamma)$ — пространство m-вектор-функций с элементами из $L_{p,\kappa}(\Gamma)$; S_κ — сингулярный интегральный оператор Коши в $L_{p,\kappa}(\Gamma)$; $P^{\pm}_\kappa=\frac12(I_\kappa\pm S_\kappa)$, где I_κ — единичный оператор; $A_p(\Gamma)$ — класс весов Макенхаупта на Γ, для которых, напомним, оператор S_κ ограничен. Изометрический изоморфизм $N_\kappa: L_{p,\kappa}(\Gamma)\to L_p(\Gamma)$, определяемый формулой $N_\kappa(f)=\kappa^{1/p}f$, порождает изоморфизм подобия $\widehat{N}_\kappa:\mathrm{End}(L_{p,\kappa}(\Gamma))\to \mathrm{End}(L_p(\Gamma))$. Далее будем полагать, что $\kappa\in A_p(\Gamma)$, и зафиксируем вытекающее из теоремы Феффермана представление

$$\ln(\kappa)=u+S_1v, \tag{1}$$

где $u, v \in L_\infty(\Gamma)$ ([5], сс. 247, 256). Пусть $\mathrm{Diff}_H(\Gamma)$ — группа диффеоморфизмов Γ с ненулевой гёльдеровской производной. Рассмотрим в пространстве $L_{p,\kappa}(\Gamma)$ оператор взвешенного сдвига $\tau_{\alpha,\kappa}$:

$$(\tau_{\alpha,\kappa}\varphi)(t) = (\kappa(\alpha(t)) \cdot \kappa(t)^{-1})^{1/p}\varphi(\alpha(t)) \quad (\alpha \in \mathrm{Diff}_H(\Gamma)).$$

Ясно, что $\widehat{N}_\kappa(\tau_{\alpha,\kappa}) = \tau_{\alpha,1}$ — оператор обычного сдвига в $L_p(\Gamma)$ [1]–[2]. *Далее при $\kappa = 1$ в различных обозначениях значок веса будем пропускать.* Будем полагать, что замкнутая алгебра $\mathcal{A}$ ($\subset L_\infty(\Gamma)$) принадлежит классу T_Δ, где $\Delta \subset \mathrm{Diff}_H(\Gamma)$, если $f \circ \alpha \in \mathcal{A}$ для всех $f \in \mathcal{A}$ и $\alpha \in \Delta$. Через $\mathcal{M}_\kappa(\mathcal{A};\Delta)$ обозначим замкнутую подалгебру алгебры $\mathrm{End}(L_{p,\kappa}(\Gamma))$, порожденную S_κ, $\{\tau_{\alpha,\kappa}\}_{\alpha\in\Delta}$ и операторами умножения M_a на функции $a \in \mathcal{A}$.

С помощью методов и результатов работ [6]–[7] доказывается

Теорема 1. *Пусть $\kappa \in A_p(\Gamma)$, $\Delta \subset \mathrm{Diff}_H(\Gamma)$, $C(\Gamma)\bigcup\{u;v\} \subset \mathcal{A} \in T_\Delta$, $F_\varepsilon = M_{\exp((\varepsilon u - v)/p)}$ ($\varepsilon \in \{-1;0;+1\}$), $F = P^+F_0^2P^+ + P^-$. Тогда 1) $\widehat{N}_\kappa$ осуществляет изоморфизм подобия $\mathcal{M}_\kappa(\mathcal{A};\Delta)$ на $\mathcal{M}(\mathcal{A};\Delta)$; 2) $\widehat{N}_\kappa(S_\kappa) - S \in \mathrm{Comm}(\mathcal{M}(\mathcal{A};\emptyset))$, $F \in G\mathcal{M}(\mathcal{A};\emptyset)$ и*

$$\widehat{N}_\kappa(S_\kappa) = 2F_{+1}P^+F_{-1} - I. \tag{2}$$

В частном случае, когда $\Delta = \emptyset$, κ — степенной вес Хведелидзе и $\mathcal{A}$ — банахова алгебра кусочно-непрерывных функций, формула (2) доказана в [8] с помощью построенного ранее символического исчисления, а результат об изоморфизме в этой ситуации вытекает из локального анализа [9].

2^0. Пусть $\Xi \subset \Gamma$ и $\Xi \neq \emptyset$. Рассмотрим диффеоморфизм $\alpha = \alpha_1$ ($\in \mathrm{Diff}_H(\Gamma)$), порождающий циклическую группу порядка n. Пусть α_k — k-я итерация α. Предположим, что $\alpha(\Xi) = \Xi$ и точки из произвольной α-орбиты последовательно расположены вдоль Γ. Пусть $\mathcal{A} = PC(\Gamma;\Xi)$ — банахова алгебра кусочно-непрерывных на Γ и непрерывных на $\Gamma \setminus \Xi$ функций; $\kappa \in A_p(\Gamma)$ и в (1) $u, v \in PC(\Gamma;\Xi)$. На множестве $\Gamma(\Xi) = (\Gamma\setminus\Xi)\bigcup(\Xi\times\overline{R})$, где $\overline{R} = R\bigcup\{\pm\infty\}$, рассмотрим описанную в ([10], с. 20) топологию, совпадающую при $\Xi = \Gamma$ с топологией Гохберга–Крупника. С α свяжем гладкое (с ненулевой гёльдеровской производной) n-листное накрытие $\varrho : \Gamma \to \Gamma$, слои которого суть α-орбиты, и доопределим его до накрытия $\varrho_\Xi : \Gamma(\Xi) \to \Gamma(\varrho(\Xi))$, полагая $\varrho_\Xi(\xi, y) = (\varrho(\xi), y)$ для $(\xi, y) \in \Xi \times \overline{R}$. Зафиксируем точку $\zeta \in \varrho(\Xi)$ и рассмотрим непрерывное на $\Gamma(\varrho(\Xi)) \setminus \{\xi\} \times \overline{R}$ сечение $s_{\Xi,\zeta} : \Gamma(\varrho(\Xi)) \to \Gamma(\Xi)$ накрытия ϱ_Ξ.

Пусть $C_p(\overline{R})$ — замыкание пересечения $C(\overline{R})$ и пространства функций с ограниченной вариацией по норме L_p-мультипликаторов. В [10] при помощи локального метода [9] определен символ-эпиморфизм $\sigma_\Xi^m : L(m;\mathcal{M}(PC(\Gamma;\Xi);\emptyset)) \to \mathcal{N}_p^m(\Xi)$ с ядром $\mathrm{Comp}(L_p^m(\Gamma))$, где $\mathcal{N}_p^m(\Xi)$ — банахова алгебра отображений $M = (M_{j,k})_{j,k=1,2} : \Gamma(\Xi) \to L(2m, \mathbf{C})$, удовлетворяющих условиям 1) если $t \in \Xi$, то $M|_{\{t\}\times\overline{R}} \in L(2m; C_p(\overline{R}))$ и $M(t, \pm\infty)$ — диагональная матрица; 2) если $t \in \Gamma\setminus\Xi$, то $M_{12}(t) = M_{21}(t) = 0$; 3) $M_{11}, M_{12}, M_{21} \in L(m; C(\Gamma(\Xi)))$, $M_{22} \in L(m; C(\Gamma_-(\Xi)))$, где Γ_- — контур, отличающийся от Γ ориентацией. Построим эпиморфизм

$$\sigma_{\Xi,\kappa,\alpha} : \mathcal{M}_\kappa(PC(\Gamma;\Xi);\alpha) \to \mathcal{N}_p^n(\varrho(\Xi)). \tag{3}$$

Введем матрицу $B \in C(\Gamma; GL(2n;\mathbf{C}))$, для которой $B((\alpha_k)(z)) = B(z)\|\delta_{h+k,g}E^{(2)}\|_{h,g=0}^{n-1}$, где $k \in \{0;\dots;n-1\}$, $\delta_{h,g}$ — символ Кронекера, $E^{(m)}$ — единичная $m\times m$-матрица. Для $A \in \{S_\kappa; M_a; \tau_{\alpha,\kappa}\}$ определим $\sigma_{\Xi,\kappa,\alpha}(A) = (B\widetilde{A}B^{-1}) \circ s_{\Xi,\zeta} \in \mathcal{N}_p^n(\varrho(\Xi))$, где

$$\widetilde{A} = \begin{cases} \|\sigma_\Xi(\delta_{l,k}(2F_{+1}P^+F^{-1}F_{-1} - I))(t)\|_{l,k=0}^{n-1}, & \text{если } A = S_\kappa; \\ \|\sigma_\Xi(\delta_{l,k}M_{a(\alpha_{-l})})(t)\|_{l,k=0}^{n-1}, & \text{если } A = M_a; \\ \|\delta_{l+1,k}E^{(2)}\|_{l,k=0}^{n-1}, & \text{если } A = \tau_{\alpha,\kappa}. \end{cases}$$

С помощью теоремы 1 и результатов [10] доказывается

Лемма. *Соответствие* $A \to \sigma_{\Xi,\kappa,\alpha}(A)$ $(A \in \{S_\kappa; M_a; \tau_{\alpha,\kappa}\})$ *единственным образом продолжается до эпиморфизма* (3) *с ядром* $\mathrm{Comp}(L_{p,\kappa}(\Gamma))$.

Пусть X — связный пунктированный компакт с отмеченной точкой x_0. Определим символ-гомоморфизм

$$\Sigma^m_{X,\Xi,\kappa,\alpha} : C(X; L(m; \mathcal{M}_\kappa(PC(\Gamma;\Xi);\alpha))) \to C(X; \mathcal{N}_p^{nm}(\varrho(\Xi)))$$

равенством $(\Sigma^m_{X,\Xi,\kappa,\alpha}(\Phi))(x) = \sigma^m_{\Xi,\kappa,\alpha}(\Phi(x))$, где $x \in X$, $\sigma^m_{\Xi,\kappa,\alpha}$ — расширение (3) до эпиморфизма алгебры $L(m; \mathcal{M}_\kappa(PC(\Gamma;\Xi);\alpha))$ $(\subset \mathrm{End}(L^m_{p,\kappa}(\Gamma)))$ на алгебру $\mathcal{N}_p^{nm}(\varrho(\Xi))$.

Теорема 2. $\Sigma^m_{X,\Xi,\kappa,\alpha}$ *— эпиморфизм с ядром* $C(X; \mathrm{Comp}(L^m_{p,\kappa}(\Gamma)))$. *Семейство* Φ *из* $C(X; L(m; \mathcal{M}_\kappa(PC(\Gamma;\Xi);\alpha)))$ *фредгольмово тогда и только тогда, когда* $\Sigma^m_{X,\Xi,\kappa,\alpha}(\Phi) \in C(X; G\mathcal{N}_p^{nm}(\varrho(\Xi)))$.

Пусть $\Lambda(X;\Xi)$ — подмножество всех тех отображений Γ в дискретную группу $K^{-1}(X)$, которые непрерывны на $\Gamma \setminus \Xi$, имеют в точках из Ξ односторонние пределы и непрерывны справа в этих точках. Групповая операция в $K^{-1}(X)$ индуцирует групповую операцию в $\Lambda(X;\Xi)$. В K-теории формулой Кюннета определяется эпиморфизм $\varrho : K^{-1}(X \times \Gamma(\Xi)) \to K^0(X) \otimes K^{-1}(\Gamma(\Xi))$, а конструкцией “сцепления” — изоморфизм $k_{X\times\Gamma(\Xi)} : [X \times \Gamma(\Xi); GL(\infty; \mathbf{C})] \to K^{-1}(X \times \Gamma(\Xi))$. Пусть $b_\Xi : K^{-1}(\Gamma(\Xi)) \to \mathrm{Z}$ — обобщающий понятие степени изоморфизм (3.1) из [9], а i_0 — тождественное преобразование $K^0(X)$. Для любого $\psi = (\psi_{i,j})^2_{i,j=1} \in GC(X; \mathcal{N}_p^m(\Xi))$ определим $\widehat{\psi} \in C(X \times \Gamma(\Xi); GL(2m; \mathbf{C}))$: если $x \in X$, то $\widehat{\psi}(x,t) = \mathrm{diag}[\psi_{1,1}(x,t); (\psi_{2,2}(x,t))^{-1}]$ для $t \in \Gamma \setminus \Xi$ и $\widehat{\psi}(x,t) = \mathrm{diag}[1; (\psi_{2,2}(x,(t_0,-\infty)))^{-1}]\psi(x,t)\,\mathrm{diag}[1; (\psi_{2,2}(x,(t_0,+\infty)))^{-1}]$ для $t = (t_0, y) \in \Xi \times \overline{R}$ (через $\mathrm{diag}[a_{1,1}; a_{2,2}]$ обозначается блочно-диагональная матрица с блоками $a_{1,1}$ и $a_{2,2}$). С помощью теорем 1, 2 и результатов [4], [10], [11] доказывается

Теорема 3. *Группы классов гомотопической эквивалентности*

$$[X; \mathrm{Fr}(L(m; \mathcal{M}_\kappa(PC(\Gamma;\Xi);\alpha)))], \quad [X; GL(m; \mathcal{M}_\kappa(PC(\Gamma;\Xi);\alpha))]$$

изоморфны группам $K^{-1}(X) \oplus \Lambda(\Xi;X) \oplus K^0(X)$, $K^{-1}(X) \oplus \Lambda(\Xi;X)$ *соответственно. Если* $\Phi \in C(X; \mathrm{Fr}(L(m; \mathcal{M}_\kappa(PC(\Gamma;\Xi);\alpha))))$, *то*

$$\mathrm{IND}_X(\Phi) = ((i_0 \otimes b_\Xi)\varrho k_{X\times\Gamma(\Xi)})([\widehat{\Sigma}^m_{X,\Xi,\kappa,\alpha}(\Phi)]).$$

Литература

1. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. *Уравнения с инволютивными операторами и их приложения.* – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1988. – 188 с.
2. Антоневич А.Б. *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход.* – Минск: Изд-во Университетское, 1988. – 230 с.
3. Чинь Нгок Минь, Симоненко И.Б. *Об индексе и гомотопической классификации семейств сингулярных интегральных операторов со сдвигом Карлемана* // ДАН СССР. – 1980. – Т. 263. – № 5. – С. 1070–1073.
4. Деундяк В.М., Золотых А.Е. *О структуре алгебры сингулярных интегральных операторов с разрывными коэффициентами и конечной группой сдвигов* // Дифференц. и интеграл. уравнения и комплексный анализ. – Элиста, 1993. – С. 25–35.
5. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* – М: Мир, 1984. – 469 с.
6. Георгиев К.А., Деундяк В.М. *Структура алгебр сингулярных интегральных операторов в весовых L_p-пространствах на окружности* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 2. – С. 84–87.
7. Георгиев К.А., Деундяк В.М. *Обобщение формулы Гохберга–Крупника для взвешенного сингулярного оператора Коши на случай общих коэффициентов и весов* // Дифференц. и интеграл. уравнения, анализ и алгебра. – Элиста, 1996. – С. 80–85.

8. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. *О сингулярных интегральных уравнениях с неограниченными коэффициентами* // Матем. исслед. – Кишинев, 1970. – Т. 5. – № 3. – С. 46–57.
9. Симоненко И.Б., Чинь Нгок Минь. *Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость.* – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1986. – 65 с.
10. Деундяк В.М., Симоненко И.Б., Чинь Нгок Минь. *Символы и гомотопическая классификация семейств одномерных сингулярных операторов с кусочно–непрерывными коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 12. – С. 17–27.
11. Деундяк В.М. *О гомотопических свойствах пространства обратимых матричных сингулярных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами* // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1988. – Т. 131. – № 3. – С. 481–484.

Донской государственный технический университет

Поступила 16.07.1999