Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №2, с. 86–102 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0018*

А.Г. ЧЕНЦОВ

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕННОМ СОБЛЮДЕНИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Аннотация. Рассматривается абстрактная задача о соблюдении ограничений асимптотического характера. Предлагается весьма общий подход к построению "несеквенциальных" множеств притяжения в пространстве обобщенных элементов, формализуемых в виде конечно-аддитивных мер. Иссследуется вопрос о существовании и структуре асимптотики, универсальной в диапазоне асимптотических ограничений без предположения о компактифицируемости пространства обычных решений.

Ключевые слова: битопологическое пространство, конечно-аддитивная мера, расширение.

УДК: 517.972.8

Abstract. We consider an abstract problem on fulfilling asymptotic constraints. We propose a very general approach to constructing "nonsequential" attraction sets in the space of generalized elements formalizable as finitely additive measures. We study the existence and the structure of the asymptote universal in the range of "asymptotic constraints" not requiring the compactifiability of the space of usual solutions.

Keywords: bitopological space, finitely additive measure, extension.

1. Введение

Используем следующие сокращения: БТП (битопологическое пространство), к.-а. (конечно-аддитивная), МП (множество притяжения), ОД (область достижимости), ОУ (обобщенное управление), ТП (топологическое пространство).

Статья посвящена вопросам, связанным с построением корректных расширений абстрактных задач управления, не обладающих устойчивостью при ослаблении ограничений. В ([1],гл. 3) введены понятия точных, (секвенциальных) приближенных и обобщенных управлений. Два последних типа управлений рассматриваются в настоящей работе в следующей редакции: приближенные управления отождествляются с направленностями, а обобщенные — с к.-а. мерами. В связи с использованием направленностей отметим замечания в работах [2], [3]. Управления-меры широко использовались для реализации скользящих режимов [1], [4]–[7]; к.-а. меры как ОУ использовались в [8]–[11] и в целом ряде других работ.

Поступила 08.06.2009

Работа выполнена в рамках программы Президиума Российской Академии наук (проекты 09-П-1-1007, 09-П-1-1014) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (09-01-00436, 10-01-96020, 10-01-00356).

Рассматриваемая проблема может быть связана с некоторыми задачами управления линейными системами в условиях ограничений интегрального характера, включающих моментную компоненту (возможно также "присутствие" импульсных ограничений) ([8], § 6.5; [9], гл. 1, 2). При ослаблении этих ограничений возможно скачкообразное изменение в сторону улучшения результирующих показателей процесса. Это связано с появлением новых управлений, допустимых при ослабленных ограничениях. Последнее обстоятельство представляет и самостоятельный интерес, но также играет ключевую роль в исследовании потенциально достижимого качества в наиболее интересном с практической точки зрения случае, когда ограничения соблюдаются с высокой, но все же конечной степенью точности (монографии [8]–[11]). Сейчас ограничимся анализом простейшей скалярной системы

$$\dot{x}(t) = b(t)f(t), \quad 0 \le t \le 2, \quad x(0) = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $b = b(\cdot)$ — вещественнозначная функция на промежутке $[0, 2[$, для которой $b(t) \triangleq t$ при $t \in [0, 1[$ и $b(t) \triangleq t - 1$ при $t \in [1, 2[$ (здесь и ниже $\triangleq$ — равенство по определению), а $f \in F$, где F — множество всех вещественнозначных неотрицательных кусочно-постоянных и непрерывных справа функций на $[0, 2[$, для каждой из которых интеграл на $[0, 1[$ не превосходит единицы. Полагая, что $\varphi_f = (\varphi_f(t),\ 0 \le t \le 2)$ — траектория системы (1.1), порожденная управлением $f \in F$, накладываем промежуточное условие $1 \le \varphi_f(1)$. Нас интересует ОД в последний момент времени: $G_\partial \triangleq \{\varphi_f(2) : f \in F,\ 1 \le \varphi_f(1)\}$. Разумеется, $G_\partial = \emptyset$, так как

$$\varphi_f(1) = \int_0^1 b(t)f(t)dt = \int_0^1 tf(t)dt < 1 \quad \forall f \in F. \tag{1.2}$$

Если промежуточное условие на выбор $f \in F$ ослаблено до требования $1 - \varepsilon < \varphi_f(1)$, где $\varepsilon \in]0, \infty[$, то $G_\partial^{(\varepsilon)} \triangleq \{\varphi_f(2) : f \in F,\ 1 - \varepsilon < \varphi_f(1)\} \approx [1, \infty[$ (при этом $[1, \infty[\subset G_\partial^{(\varepsilon)}$). Множество $[1, \infty[$ можно рассматривать в качестве регуляризированной ОД, что естественно с практической точки зрения (более содержательные примеры в [8]–[11]). Упомянутое множество можно связать с действием некоторых ОУ, для которых удается "исправить" ситуацию (1.2), используя идею локализации сужения $f \in F$ (на $[0, 1[$) в сколь угодно малой левой полуокрестности точки $t = 1$. Будем говорить далее только о сужениях $f \in F$ на промежуток $[0, 1[$ (и их обобщенных аналогах), поскольку последующий фрагмент управления может выбираться произвольно и на соблюдение промежуточного условия влияния не оказывает. Строгое определение ОУ связано с выходом за пределы F, так как точная реализация промежуточного условия требует осуществления импульсного воздействия в момент $t = 1$.

Подобно [1] при построении ОУ будем использовать меры. В рассматриваемом случае, однако, логично определять их на подмножестве $[0, 2[$. Ограничение на интеграл, используемое в определении F, имеет импульсный характер. Простейший вариант ОУ представляет мера Дирака. В связи с характером промежуточного условия имеет смысл ограничиться рассмотрением меры Дирака, сосредоточенной в точке $t = 1$. Характер функции $b = b(\cdot)$ позволяет рассматривать нужные меры на естественной полуалгебре "стрелки" $[0, 2[$, определяемой в виде семейства всех промежутков $[p, q[$, $0 \le p \le q \le 2$ (функция b является равномерным пределом кусочно-постоянных и непрерывных справа вещественнозначных функций на $[0, 2[$). Упомянутая мера Дирака при интегрировании функции b реализует ее значение в точке 1, т. е. число 0, что не позволяет использовать ее в качестве ОУ, соблюдающего промежуточное условие. Однако имеется к.-а. нормированная мера на упомянутой "стрелке", сосредоточенная в сколь угодно малой левой полуокрестности точки $t = 1$ (для осуществления такой возможности требуется именно конечная аддитивность; более точно, здесь реализуется так называемая чисто к.-а. мера). Действие этой меры на b доставляет

предел слева в точке $t = 1$, т. е. как раз необходимое для реализации промежуточного условия единичное значение импульса. Упомянутая мера, рассматриваемая при соответствующей формализации как ОУ, определяет предельное поведение системы (1.1) при действии очень "коротких" единичных прямоугольных импульсов из F, что аналогично в идейном отношении свойству ОУ в ([1], гл. III, IV), где исследовался случай геометрических ограничений на выбор управлений. Последующие конструкции ориентированы на к.-а. реализацию ОУ, вариант которой был только что рассмотрен в связи с промежуточным условием в виде неравенства (будем относить такие условия к моментным ограничениям, имея в виду расширительное толкование последних). Упомянутая интерпретация эффекта произведения разрывной функции на обобщенную применима и в общей постановке, рассматриваемой ниже.

В данной работе проблема, связанная с появлением новых допустимых управлений при ослаблении исходной системы ограничений, рассматривается как самостоятельная задача. Само ослабление условий можно осуществлять различными способами. В частности, можно использовать более и менее полные ослабления исходных ограничений. Если при этом реагирующие управления обладают общей асимптотикой, можно говорить об асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений. Это свойство представляет не только теоретический, но и серьезный практический интерес, поскольку определяет направления, в которых задача груба, что немаловажно в вопросах инженерной реализации.

Данная задача важна и для исследования асимптотического поведения областей достижимости, а также пучков траекторий управляемых систем при последовательном ослаблении стандартных ограничений; при осуществлении такого исследования важно помимо асимптотического анализа "почти допустимых" управлений построить расширение соответствующего целевого оператора. Последнее легко реализуется в условиях компактифицируемости пространства обычных управлений, что в линейных задачах управления обычно связано с наличием ресурсной компоненты в составе системы ограничений. Если задача некомпактифицируема, то проблема усложняется: требуются дополнительные условия на выбор целевого оператора (в рамках одного из подходов требуется, чтобы при расширении получалось совершенное отображение; свойства непрерывности данного отображения, вообще говоря, недостаточно). С этой точки зрения также представляется естественным выделить ту часть задачи об асимптотической достижимости, которая не связана с данным затруднением. Эта часть может рассматриваться как задача о соблюдаемости ограничений асимптотического характера.

В данной работе затрагивается и еще один вопрос, связанный с выбором исходного множества возможных управлений. Для целого ряда естественных вариантов этого множества в [8], [9], [11] были получены условия асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений. Эти условия связаны со ступенчатостью части компонент интегрантов, участвующих в формировании ограничений моментного характера. Вопрос о справедливости упомянутых условий для произвольных (и не возмущаемых) множеств возможных управлений исследовался лишь частично. В настоящей работе после изложения специальной топологической конструкции обращаемся к данному вопросу как в общей постановке, так и в более конкретной форме (в случае неотрицательных управлений).

2. Общие обозначения и определения

Используем кванторы, символы def (по определению) и $\triangleq$ (равно по определению); $\exists!$ заменяет фразу "существует и единственно". Впрочем, кванторы и связки используются

только для замены соответствующих словесных высказываний, т. е. для сокращения записи основных положений. Множество, все элементы которого сами являются множествами, называем семейством. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то через $\{x;y\}$ обозначаем неупорядоченную пару ([12], с. 60), содержащую x и y. Тогда $\{x\} \triangleq \{x;x\}$ — одноэлементное множество для всякого объекта x. Через $\mathcal{P}(H)$ ($\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества H. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений, действующих из A в B. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $(f|C) \in B^C$ есть def обычное сужение f на множество C, $(f|C)(x) \triangleq f(x) \quad \forall x \in C$; $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$. Символ $\circ$ используем при обозначении суперпозиций. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$, то $f^{-1}[\mathcal{B}] \triangleq \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$. Семейства упомянутого типа используются ниже в качестве ограничений асимптотического характера. В этом случае множества семейства $\mathcal{B}$ соответствуют зачастую ослабленным аналогам традиционных ограничений (в примере, рассмотренном ранее, в этом качестве использовались ослабления фиксированного неравенства). Множества из $f^{-1}[\mathcal{B}]$ в этом случае являются множествами допустимых элементов для ослабленных в той или иной степени стандартных ограничений. Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\dots\}$. Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами, $\overline{1,m} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq m\} \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Если X — множество и $k \in \mathbb{N}$, то $X^k \triangleq X^{\overline{1,k}}$ есть (строго говоря) множество всех отображений (кортежей) $(x_i)_{i\in\overline{1,k}} : \overline{1,k} \longrightarrow X$. Линейные операции, умножение и порядок в пространствах вещественнозначных функций определяем поточечно. Если A — множество, то через $\beta[A]$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$ таких, что $\forall A_1 \in \mathcal{A}$, $\forall A_2 \in \mathcal{A} \quad \exists A_3 \in \mathcal{A} : A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

Элементы топологии. Если (X,τ) — ТП и $A \in \mathcal{P}(X)$, то

1) через $\mathrm{cl}(A,\tau)$ обозначаем замыкание A в (X,τ);

2) $\tau|_A \triangleq \{A \cap G : G \in \tau\}$ есть топология A, индуцированная из (X,τ);

3) $\mathcal{N}^0_\tau[A] \triangleq \{G \in \tau \mid A \subset G\}$ и, кроме того, $\mathcal{N}_\tau[A] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists G \in \mathcal{N}^0_\tau[A] : G \subset H\}$ (семейство всех окрестностей [13] A в ТП (X,τ)).

Через $\mathfrak{F}[\tau]$ обозначаем семейство всех замкнутых в ТП (X,τ) подмножеств множества X. Если (X,τ) — ТП и $x \in X$, то полагаем $\mathcal{N}^0_\tau(x) \triangleq \mathcal{N}^0_\tau[\{x\}]$ и $\mathcal{N}_\tau(x) \triangleq \mathcal{N}_\tau[\{x\}]$ (фильтр [13], [14] окрестностей точки x). Произвольную направленность в множестве X отождествляем с триплетом вида $(D,\preceq,h)$, где $(D,\preceq)$, $D \neq \emptyset$, — направленное множество, $h \in X^D$. Если τ — топология X и $x \in X$, то

$$((D,\preceq,h) \xrightarrow{\tau} x) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall H \in \mathcal{N}_\tau(x)\ \exists d_1 \in D\ \forall d_2 \in D\ ((d_1 \preceq d_2) \Longrightarrow (h(d_2) \in H)))$$

(введена обычная сходимость по Мору–Смиту). Если $(\mathbb{D},\sqsubseteq,h)$ — направленность в множестве P, то

$$(P - \mathrm{ass})[\mathbb{D};\sqsubseteq;h] \triangleq \{Q \in \mathcal{P}(P) \mid \exists d_1 \in \mathbb{D}\ \forall d_2 \in \mathbb{D}\ ((d_1 \sqsubseteq d_2) \Longrightarrow (h(d_2) \in Q))\}$$

есть фильтр [13] множества P, ассоциированный с $(\mathbb{D},\sqsubseteq,h)$.

Множества притяжения. Если A — непустое множество, (X,τ) — ТП, $r \in X^A$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то через $(\mathbf{as})[A;X;\tau;r;\mathcal{A}]$ обозначаем множество всех $x \in X$, для каждого из которых существует такая направленность $(D,\preceq,h)$ в множестве A, что

$$(\mathcal{A} \subset (A - \mathrm{ass})[D;\preceq;h])\ \&\ ((D,\preceq,r\circ h) \xrightarrow{\tau} x). \tag{2.1}$$

Условимся называть $(\mathbf{as})[A;X;\tau;r;\mathcal{A}]$ МП, отвечающим семейству $\mathcal{A}$, рассматриваемому как ограничения асимптотического характера. В связи с вопросом секвенциальной реализации МП отметим [9] (с. 38). Если $\mathcal{A}\in\beta[A]$, то

$$(\mathbf{as})[A;X;\tau;r;\mathcal{A}]=\bigcap_{U\in\mathcal{A}}\mathrm{cl}(r^1(U),\tau); \tag{2.2}$$

МП (2.1), (2.2) будут основным предметом последующего анализа (упомянутые МП допускают естественные представления в классах фильтров и ультрафильтров [11], § 4.9). В качестве (X,τ) для исследования свойств ОД в задачах управления часто используется конечномерное арифметическое пространство в топологии покоординатной сходимости (в примере раздела 1 — вещественная прямая). Если же говорить о построении множества допустимых ОУ, то в качестве (X,τ) используется нередко то или иное пространство мер в $*$-слабой топологии. Второй вариант для настоящей работы более важен, но мы будем в его рамках использовать и другие оснащения соответствующего пространства мер.

Серьезный интерес представляет изучение зависимости МП (2.1), (2.2) при изменении $\mathcal{A}$ и выяснение условий совпадения этих МП при различных значениях $\mathcal{A}$, что можно интерпретировать как асимптотическую эквивалентность и в целом ряде практически интересных случаев связывать со свойством асимптотической нечувствительности при возмущении части ограничений [8]–[11]. Добавим к этому возможность изменения топологии пространства, в котором конструируется МП, что с идейной точки зрения отвечает изменению варианта аппроксимативной реализации элементов МП.

В связи с последним замечанием рассмотрим БТП: триплет (T,τ_1,τ_2) называем БТП, если T — множество, τ_1 и τ_2 — топологии T, причем $\tau_1\subset\tau_2$.

Если (X,τ_1) и (Y,τ_2) суть два ТП, то через $C(X,\tau_1,Y,\tau_2)$ обозначаем множество всех непрерывных в смысле τ_1 и τ_2 отображений из Y^X. Если же (X,τ) — ТП и $Y\in\mathcal{P}(X)$, то через $\widetilde{\mathfrak{N}}^\natural_\tau[Y]$ обозначаем множество всех таких семейств $\mathcal{Y}\in\mathcal{P}'(\mathcal{N}_\tau[Y])$, что

$$\forall x\in X\setminus Y\ \exists O_1\in\mathcal{Y}\ \exists O_2\in\mathcal{N}_\tau(x):O_1\cap O_2=\emptyset; \tag{2.3}$$

семейства из $\widetilde{\mathfrak{N}}^\natural_\tau[Y]$ — неполные (вообще говоря) семейства окрестностей Y. В приводимых ниже положениях настоящего раздела последовательно развивается идея универсальной в диапазоне реализации МП в виде непрерывного прообраза множества, определяющего стандартные ограничения. Этот прообраз по смыслу соответствует множеству допустимых ОУ в традиционных конструкциях расширений [1]. Тем самым в упомянутых положениях выясняются потенциальные возможности, связанные с применением широко понимаемых обобщенных задач управления.

Предложение 2.1. *Если F — непустое множество, (U,τ) и (V,θ) — два ТП, $m\in V^F$, $V=\mathrm{cl}(m^1(F),\theta)$, $Y\in\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{Y}\in\widetilde{\mathfrak{N}}^\natural_\tau[Y]$ и $g\in C(V,\theta,U,\tau)$, то*

$$g^{-1}(Y)=(\mathbf{as})[F;V;\theta;m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{Y}]]=(\mathbf{as})[F;V;\theta;m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{N}_\tau[Y]]]. \tag{2.4}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ второе и третье множества в (2.4) соответственно. Тогда (см. (2.3)) $(g\circ m)^{-1}[\mathcal{Y}]\subset(g\circ m)^{-1}[\mathcal{N}_\tau[Y]]$, откуда легко следует (см. (2.1)) очевидное вложение для МП

$$\mathbf{A}_2\subset\mathbf{A}_1. \tag{2.5}$$

Пусть $z\in\mathbf{A}_1$. Используя определение МП, подберем (см. (2.1)) направленность $(D,\preceq,\varphi)$ в F, для которой

$$((g\circ m)^{-1}[\mathcal{Y}]\subset(F-\mathrm{ass})[D;\preceq;\varphi])\ \&\ ((D,\preceq,m\circ\varphi)\xrightarrow{\theta}z). \tag{2.6}$$

В силу непрерывности g из (2.6) следует ([10], (2.5.4)) сходимость

$$(D, \preceq, g \circ m \circ \varphi) \xrightarrow{\tau} g(z). \tag{2.7}$$

Покажем, что $g(z) \in Y$. Предположим противное, т. е. $g(z) \in U \setminus Y$. Тогда (см. (2.3)) имеем для некоторых $M_1 \in \mathcal{Y}$ и $M_2 \in \mathcal{N}_\tau(g(z))$ равенство $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, откуда

$$(g \circ m)^{-1}(M_1) \cap (g \circ m)^{-1}(M_2) = (g \circ m)^{-1}(M_1 \cap M_2) = \emptyset, \tag{2.8}$$

где $(g \circ m)^{-1}(M_1) \in (g \circ m)^{-1}[\mathcal{Y}]$. С учетом (2.6) получим включение

$$(g \circ m)^{-1}(M_1) \in (F - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi]. \tag{2.9}$$

С другой стороны, из (2.7) при некотором $d' \in D$ имеем свойство: $\forall d \in D$

$$(d' \preceq d) \Longrightarrow ((g \circ m \circ \varphi)(d) \in M_2). \tag{2.10}$$

При $d \in D$ получим $((g \circ m \circ \varphi)(d) \in M_2) \Longleftrightarrow (\varphi(d) \in (g \circ m)^{-1}(M_2))$, а тогда из (2.10) следует

$$(g \circ m)^{-1}(M_2) \in (F - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi]. \tag{2.11}$$

По аксиомам фильтра [13] из (2.9) и (2.11) имеем включение

$$(g \circ m)^{-1}(M_1) \cap (g \circ m)^{-1}(M_2) \in (F - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi],$$

а тогда невозможно (2.8), так как фильтр состоит только из непустых множеств. Противоречие доказывает справедливость включения $g(z) \in Y$. Тогда $z \in g^{-1}(Y)$. Так как выбор z был произвольным, то

$$\mathbf{A}_1 \subset g^{-1}(Y). \tag{2.12}$$

Пусть $v \in g^{-1}(Y)$. Тогда $v \in V$ и $g(v) \in Y$,

$$\mathcal{N}_\tau[Y] \subset \mathcal{N}_\tau(g(v)). \tag{2.13}$$

Поскольку $v \in \mathrm{cl}(m^1(F), \theta)$, имеем ([10], (2.3.11)) (с использованием аксиомы выбора) для некоторой направленности $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi)$ в F сходимость

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, m \circ \psi) \xrightarrow{\theta} v. \tag{2.14}$$

Как следствие получаем из (2.14) свойство сходимости

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, g \circ m \circ \psi) \xrightarrow{\tau} g(v) \tag{2.15}$$

(использовали непрерывность g). Из (2.13), (2.15) имеем при $\mathbb{O} \in \mathcal{N}_\tau[Y]$ для некоторого $\mathbf{d} \in \mathbb{D}$ свойство: $\forall \delta \in \mathbb{D}$

$$(\mathbf{d} \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow ((g \circ m)(\psi(\delta)) \in \mathbb{O}).$$

Иными словами, $\psi(\delta) \in (g \circ m)^{-1}(\mathbb{O})$ при $\delta \in \mathbb{D}$, $\mathbf{d} \sqsubseteq \delta$. Это означает, что $(g \circ m)^{-1}(\mathbb{O}) \in (F - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \psi]$. Поскольку выбор $\mathbb{O}$ был произвольным, то

$$(g \circ m)^{-1}[\mathcal{N}_\tau[Y]] \subset (F - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \psi]. \tag{2.16}$$

Тогда (см. (2.14), (2.16)) $v \in (\mathbf{as})[F; V; \theta; m; (g \circ m)^{-1}[\mathcal{N}_\tau[Y]]]$, т. е. $v \in \mathbf{A}_2$. Вложение $g^{-1}(Y) \subset \mathbf{A}_2$ установлено, откуда с учетом (2.5) и (2.12) имеем требуемую цепочку равенств

$$\mathbf{A}_1 = g^{-1}(Y) = \mathbf{A}_2. \qquad \square$$

Следуя в идейном отношении конструкциям ([11], § 19), рассмотрим битопологический вариант предложения 2.1 (фактически здесь используется неполная модель расширения [11]).

Теорема 2.1. *Пусть F — непустое множество, $(U,\tau_{\mathbf{l}},\tau_{\mathbf{u}})$ и $(V,t_{\mathbf{l}},t_{\mathbf{u}})$ — два БТП, $m\in V^F$, $V=\mathrm{cl}(m^1(F),t_{\mathbf{u}})$, $Y\in\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{Y}\in\widetilde{\mathfrak{N}}^{\natural}_{\tau_{\mathbf{l}}}[Y]$ и*

$$g\in C(V,t_{\mathbf{l}},U,\tau_{\mathbf{l}})\cap C(V,t_{\mathbf{u}},U,\tau_{\mathbf{u}}). \tag{2.17}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$g^{-1}[Y]=(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{l}};m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{Y}]]=(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{u}};m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[Y]]]. \tag{2.18}$$

Доказательство. Через $\mathbf{A_l}$ и $\mathbf{A_u}$ обозначаем соответственно второе и третье множества в (2.18). Поскольку $t_{\mathbf{l}}\subset t_{\mathbf{u}}$, имеем цепочку равенств

$$V=\mathrm{cl}(m^1(F),t_{\mathbf{u}})=\mathrm{cl}(m^1(F),t_{\mathbf{l}}). \tag{2.19}$$

Так как $\tau_{\mathbf{l}}\subset\tau_{\mathbf{u}}$, имеем вложение $\mathcal{N}^0_{\tau_{\mathbf{l}}}[Y]\subset\mathcal{N}^0_{\tau_{\mathbf{u}}}[Y]$ и, как следствие,

$$\mathcal{Y}\subset\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{l}}}[Y]\subset\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[Y]. \tag{2.20}$$

Кроме того, при $x\in U$ непременно $\mathcal{N}^0_{\tau_{\mathbf{l}}}(x)\subset\mathcal{N}^0_{\tau_{\mathbf{u}}}(x)$ и, как следствие, $\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{l}}}(x)\subset\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}(x)$. С учетом (2.3) и (2.20) получаем свойство $\mathcal{Y}\in\widetilde{\mathfrak{N}}^{\natural}_{\tau_{\mathbf{u}}}[Y]$. Воспользуемся предложением 2.1. Действительно, $(U,\tau_{\mathbf{l}})$ и $(V,t_{\mathbf{l}})$ суть два ТП, $m\in V^F$, $V=\mathrm{cl}(m^1(F),t_{\mathbf{l}})$ (см. (2.19)), $Y\in\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{Y}\in\widetilde{\mathfrak{N}}^{\natural}_{\tau_{\mathbf{l}}}[Y]$ и $g\in C(V,t_{\mathbf{l}},U,\tau_{\mathbf{l}})$. Поэтому из предложения 2.1 получим

$$g^{-1}(Y)=\mathbf{A_l}=(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{l}};m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{l}}}[Y]]]. \tag{2.21}$$

С другой стороны, $(U,\tau_{\mathbf{u}})$ и $(V,t_{\mathbf{u}})$ — два ТП, $m\in V^F$, $V=\mathrm{cl}(m^1(F),t_{\mathbf{u}})$ (см. (2.19)), $Y\in\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{Y}\in\widetilde{\mathfrak{N}}^{\natural}_{\tau_{\mathbf{u}}}[Y]$ и $g\in C(V,t_{\mathbf{u}},U,\tau_{\mathbf{u}})$. Тогда согласно предложению 2.1 $g^{-1}(Y)=\mathbf{A_u}=(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{u}};m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{Y}]]$. С учетом (2.21) запишем цепочку равенств

$$g^{-1}(Y)=\mathbf{A_l}=\mathbf{A_u}. \qquad \square$$

Условимся о соглашении: если $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — непустые семейства, то

$$(\mathcal{F}_1\dashv\mathcal{F}_2)\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}(\forall M\in\mathcal{F}_1\ \exists N\in\mathcal{F}_2:N\subset M);$$

введено свойство π-вписанности $\mathcal{F}_2$ в $\mathcal{F}_1$. Из (2.1) и аксиом фильтра следует утверждение: если A, (X,τ) и r удовлетворяют условиям, определяющим (2.1), $\mathcal{A}_1\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, $\mathcal{A}_2\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$ и $\mathcal{A}_1\dashv\mathcal{A}_2$, то непременно $(\mathbf{as})[A;X;\tau;r;\mathcal{A}_2]\subset(\mathbf{as})[A;X;\tau;r;\mathcal{A}_1]$. Для всяких непустых семейств $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ полагаем $(\mathcal{F}_1\dashv\mathcal{F}_2\dashv\mathcal{F}_3)\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}((\mathcal{F}_1\dashv\mathcal{F}_2)\ \&\ (\mathcal{F}_2\dashv\mathcal{F}_3))$.

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда $\forall\mathcal{F}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(F))$

$$((g\circ m)^{-1}[\mathcal{Y}]\dashv\mathcal{F}\dashv(g\circ m)^{-1}[\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[Y]])\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow(g^{-1}(Y)=(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{l}};m;\mathcal{F}]=(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{u}};m;\mathcal{F}]). \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(F))$ и истинна посылка доказываемой импликации (2.22). Тогда (см. (2.1))

$$(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{u}};m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[Y]]]\subset(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{l}};m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[Y]]]\subset$$
$$\subset(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{l}};m;\mathcal{F}]\subset(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{l}};m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{Y}]].$$

Из условия посылки доказываемой импликации (2.22) следует

$$(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{u}};m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[Y]]]\subset(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{u}};m;\mathcal{F}]\subset$$
$$\subset(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{u}};m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{Y}]]\subset(\mathbf{as})[F;V;t_{\mathbf{l}};m;(g\circ m)^{-1}[\mathcal{Y}]].$$

С учетом теоремы 2.1 (см. (2.18)) получаем утверждение следствия доказываемой импликации (2.22). $\square$

В теореме 2.1 и следствии 2.1 имеем утверждение об асимптотической эквивалентности в диапазоне ограничений асимптотического характера. Через $(\mathrm{top})[X]$ обозначаем множество всех топологий произвольного множества X. Следующее положение определяет весьма общий вариант универсальной реализации МП в диапазонах ограничений асимптотического характера и топологий пространства обобщенных элементов (в случае задач управления — пространства ОУ).

Следствие 2.2. Пусть F, $(U, \tau_{\mathbf{l}}, \tau_{\mathbf{u}})$, $(V, t_{\mathbf{l}}, t_{\mathbf{u}})$, m, Y, $\mathcal{Y}$, g удовлетворяют условиям теоремы 2.1, $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(F))$ и $\mathbf{t} \in (\mathrm{top})[V]$. Тогда

$$(((g \circ m)^{-1}[\mathcal{Y}] \dashv \mathcal{F} \dashv (g \circ m)^{-1}[\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[Y]]) \,\&\, (t_{\mathbf{l}} \subset \mathbf{t} \subset t_{\mathbf{u}})) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (g^{-1}(Y) = (\mathbf{as})[F; V; \mathbf{t}; m; \mathcal{F}]). \quad (2.23)$$

Доказательство. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (2.23). С учетом следствия 2.1 имеем цепочку равенств

$$g^{-1}(Y) = (\mathbf{as})[F; V; t_{\mathbf{l}}; m; \mathcal{F}] = (\mathbf{as})[F; V; t_{\mathbf{u}}; m; \mathcal{F}]. \quad (2.24)$$

Для всяких направленности $(D, \preceq, h)$ в F и точки $v \in V$

$$((D, \preceq, m \circ h) \xrightarrow{t_{\mathbf{u}}} v) \Longrightarrow ((D, \preceq, m \circ h) \xrightarrow{\mathbf{t}} v), \quad (2.25)$$

$$((D, \preceq, m \circ h) \xrightarrow{\mathbf{t}} v) \Longrightarrow ((D, \preceq, m \circ h) \xrightarrow{t_{\mathbf{l}}} v). \quad (2.26)$$

Согласно (2.24), (2.25) имеем (см. (2.1)) вложение $(\mathbf{as})[F; V; t_{\mathbf{u}}; m; \mathcal{F}] \subset (\mathbf{as})[F; V; \mathbf{t}; m; \mathcal{F}]$ и, как следствие,

$$g^{-1}(Y) \subset (\mathbf{as})[F; V; \mathbf{t}; m; \mathcal{F}]. \quad (2.27)$$

В силу (2.1), (2.24), (2.26) $(\mathbf{as})[F; V; \mathbf{t}; m; \mathcal{F}] \subset (\mathbf{as})[F; V; t_{\mathbf{l}}; m; \mathcal{F}]$, а потому $(\mathbf{as})[F; V; \mathbf{t}; m; \mathcal{F}] \subset g^{-1}(Y)$. С учетом (2.27) $g^{-1}(Y) = (\mathbf{as})[F; V; \mathbf{t}; m; \mathcal{F}]$. □

3. Конечно-аддитивные меры как обобщенные элементы

В дальнейшем ориентируемся на вариант построения ОУ в классе к.-а. мер, имея, в частности, в виду рассуждения в примере раздела 1. Источником упомянутых конструкций послужили линейные задачи управления с возможной разрывностью правых частей соответствующих дифференциальных уравнений и импульсными ограничениями, что приводило к эффектам, имеющим смысл произведения разрывной функции на обобщенную (см. пример раздела 1). При исследовании этих вопросов оказались возможными широкие обобщения [8]–[11], естественные и с точки зрения топологических конструкций предыдущего раздела, определяющих весьма общий взгляд на проблему построения универсальных расширений. По этой причине логично рассматривать далее абстрактную версию. В этой связи всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E и полуалгебру $\mathcal{L}$ подмножества множества E. Через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ обозначаем [15] множество всех вещественнозначных к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную вариацию; как линейное пространство $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ порождается конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ всевозможных вещественнозначных неотрицательных к.-а. мер на $\mathcal{L}$. Если $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то $\mathbf{v}_\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ есть def вариация μ как функция множеств ([9], (3.4.8)).

Если $L \in \mathcal{L}$, то через χ_L обозначаем индикатор ([16], с. 56) множества L, являющийся функцией из E в $\{0; 1\}$, для которой $\chi_L(x) \triangleq 1$ при $x \in L$ и $\chi_L(y) \triangleq 0$ при $y \in E \setminus L$. Через $B_0(E, \mathcal{L})$ обозначаем линейную оболочку множества $\{\chi_L : L \in \mathcal{L}\}$, а через $B(E, \mathcal{L})$ — замыкание $B_0(E, \mathcal{L})$ в топологии sup-нормы $\|\cdot\|$ пространства $\mathbb{B}(E)$ всевозможных ограниченных вещественнозначных функций на E. Функции из $B(E, \mathcal{L})$ иногда называют ярусными.

Само $B(E,\mathcal{L})$ в оснащении sup-нормой, индуцированной из $(\mathbb{B}(E),\|\cdot\|)$, есть банахово пространство, у которого $B^*(E,\mathcal{L})$ — топологическое сопряженное $B(E,\mathcal{L})$ — изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме ([9], (3.4.15)). Конкретный изометрический изоморфизм определяется правилом

$$\mu \longmapsto \left(\int_E f\,d\mu\right)_{f\in B(E,\mathcal{L})} : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow B^*(E,\mathcal{L});$$

здесь и ниже интегрирование понимается в смысле ([15], гл. 3; [8]–[10]), что согласуется с ([17], гл. IV): на $B_0(E,\mathcal{L})$ (элементарный) интеграл определяется посредством конечных сумм, а затем продолжается на $B(E,\mathcal{L})$ по непрерывности в смысле топологии sup-нормы $\|\cdot\|$. Поскольку $(B(E,\mathcal{L}),\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ — двойственность, оснащаем $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ традиционной $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$ ([9], с. 41), получая локально выпуклый σ-компакт

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}),\tau_*(\mathcal{L})). \tag{3.1}$$

Если $f\in B(E,\mathcal{L})$ и $\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$, то через $f*\mu$ обозначаем ([8], с. 69) неопределенный μ-интеграл f, $f*\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$.

В [8], [9] введены топологии $\tau_\otimes(\mathcal{L})\in(\mathrm{top})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]$ и $\tau_0(\mathcal{L})\in(\mathrm{top})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]$: обозначая через $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})$ (через $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_d)$) топологию тихоновской $\mathcal{L}$-степени вещественной прямой $\mathbb{R}$ в обычной топологии $\tau_{\mathbb{R}}$ (в дискретной топологии τ_d), имеем ([9], с. 44)

$$\tau_\otimes(\mathcal{L})=\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})|_{\mathbb{A}(\mathcal{L})},\quad \tau_0(\mathcal{L})=\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_d)|_{\mathbb{A}(\mathcal{L})}. \tag{3.2}$$

Топологии $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$, вообще говоря, несравнимы, но $\tau_\otimes(\mathcal{L})$ слабее каждой из них ([9], с. 45). В последующих построениях используется погружение обычных управлений, понимаемых как ярусные функции, в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$; к.-а. меры из $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ играют роль ОУ. Своей целью полагаем выяснение условий, обеспечивающих построение МП, универсального относительно $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$, а также относительно асимптотических ограничений из заданного диапазона. При выборе целого ряда конкретных множеств обычных управлений в [9], [11], [18] указаны условия реализации весьма универсальных МП (например, [9], (3.9.15)). Здесь же рассмотрим весьма общие априорные ограничения на выбор обычных возможных управлений, допуская "уродливые" случаи, но ограничиваясь при этом топологиями $\tau_*(\mathcal{L})$, $\tau_0(\mathcal{L})$. В дальнейшем для соответствующих подпространств $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ также будет рассматриваться диапазон топологий. С учетом ([11], (20.2)) введем семейство

$$\mathfrak{K}[\mathcal{L}]\triangleq\{M\in\mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))\mid \tau_*(\mathcal{L})|_M\subset\tau_0(\mathcal{L})|_M\} \tag{3.3}$$

множеств сравнимости для топологий $\tau_*(\mathcal{L})$, $\tau_0(\mathcal{L})$. Из (3.3) вытекает свойство ([11], (20.5)): если $M\in\mathfrak{K}[\mathcal{L}]$, то

$$(M,\tau_*(\mathcal{L})|_M,\tau_0(\mathcal{L})|_M) \tag{3.4}$$

есть непустое БТП. Это свойство триплета (3.4) представляет интерес в связи с построениями раздела 2. Поиск более конкретных условий, обеспечивающих данное свойство, полезно связать с первой из топологий (3.2). Поэтому полагаем ([11], § 23)

$$\tau_S^{\otimes}(\mathcal{L})\triangleq\tau_\otimes(\mathcal{L})|_S=\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})|_S\ \ \forall S\in\mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L})). \tag{3.5}$$

Рассмотрим семейство

$$\mathfrak{C}^*[\mathcal{L}]\triangleq\{S\in\mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))\mid \mathcal{N}_{\tau_S^{\otimes}(\mathcal{L})}(\mu)\cap\mathbf{B}_*(\mathcal{L})\neq\emptyset\ \ \forall\mu\in S\}, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{B}_*(\mathcal{L})\triangleq\{H\in\mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))\mid\exists c\in[0,\infty[:\ \mathbf{v}_\mu(E)\le c\ \ \forall\mu\in H\}$. Множества из (3.6) порождают подпространства ТП (3.1), совпадающие ([11], § 23) с соответствующими подпространствами

$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_{\otimes}(\mathcal{L}))$:

$$\tau_*(\mathcal{L})|_S = \tau_S^{\otimes}(\mathcal{L}) = \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_S \quad \forall S \in \mathfrak{C}^*[\mathcal{L}]. \tag{3.7}$$

Как следствие, элементы (3.6) являются множествами сравнимости для топологий $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$: из (3.7) вытекает вложение $\mathfrak{C}^*[\mathcal{L}] \subset \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$.

4. Битопологические расширения в классе конечно-аддитивных мер

Рассмотрим один из вариантов погружения объектов, именуемых обычными управлениями (имеются в виду ярусные функции на E), в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$; упомянутый вариант связан с построением неопределенного интеграла по фиксированной к.-а. мере. Данная конструкция использовалась, в частности, при расширении некоторых задач импульсного управления; в этом случае упомянутая мера определялась в виде сужения меры Лебега и обладала свойством счетной аддитивности. Последнее свойство не является существенным для последующих построений. Итак, фиксируем $\eta \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, получая в виде $(E, \mathcal{L}, \eta)$ вариант к.-а. пространства с мерой. Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L}))$, элементы $\mathbf{F}$ (а это — ярусные вещественнозначные функции на E) рассматриваем в качестве возможных (обычных) управлений. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и кортеж

$$(\mathbf{s}_i)_{i \in \overline{1,n}} \in B(E, \mathcal{L})^n. \tag{4.1}$$

Пусть, наконец, $\mathbf{Y} \in \mathfrak{F}[\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}] \setminus \{\emptyset\}$, где $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ есть def топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$. Итак, $\mathbf{Y}$ — непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, определяющее (моментное) ограничение

$$\left(\int_E \mathbf{s}_i f \, d\eta \right)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathbf{Y} \tag{4.2}$$

на выбор $f \in \mathbf{F}$ (в задачах управления такие ограничения могут возникать в результате учета краевых и промежуточных условий; см. пример раздела 1). Оснащаем $\mathbb{R}^n$ нормой $\|\cdot\|_n$, определяемой правилом

$$(x_i)_{i \in \overline{1,n}} \longmapsto \max_{i \in \overline{1,n}} |x_i| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty[. \tag{4.3}$$

Топология $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ порождена нормой $\|\cdot\|_n$. Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то $\mathbf{B}_n^0(x, \varepsilon) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\|_n < \varepsilon\}$ (открытый шар). Тогда

$$\mathcal{O}_n[\mathbf{Y}; \varepsilon] \triangleq \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbf{Y} : \|y - z\|_n < \varepsilon\} = \bigcup_{y \in \mathbf{Y}} \mathbf{B}_n^0(y, \varepsilon) \in \tau_{\mathbb{R}}^{(n)} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[.$$

Введены открытые ε-окрестности $\mathbf{Y}$ в норме (4.3), $\varepsilon > 0$. Если эти окрестности использовать в (4.2) вместо Y, то при переборе ε, $\varepsilon > 0$, реализуется ограничение асимптотического характера. Пусть

$$\mathfrak{Y} \triangleq \{\mathcal{O}_n[\mathbf{Y}; \varepsilon] : \varepsilon \in]0, \infty[\}; \tag{4.4}$$

получаем (непустое) семейство окрестностей $\mathbf{Y}$. Согласно (2.3)

$$\mathfrak{Y} \in \widetilde{\mathfrak{N}}^{\natural}_{\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}}[\mathbf{Y}]. \tag{4.5}$$

Действительно, если $x_* \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{Y}$, то в силу замкнутости $\mathbf{Y}$ при некотором $\varepsilon^* \in]0, \infty[$ имеем $\mathbf{B}_n^0(x_*, \varepsilon^*) \cap \mathbf{Y} = \emptyset$, так как $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{Y}$ — открытое множество, а тогда $\varepsilon_* \triangleq \frac{\varepsilon^*}{2} \in]0, \infty[$: $\mathbf{B}_n^0(x_*, \varepsilon_*) \cap \mathcal{O}_n[\mathbf{Y}; \varepsilon_*] = \emptyset$. С учетом (2.3) имеем свойство (4.5).

Рассмотрим другой вариант асимптотических ограничений. Для этого введем некоторые определения. Через $\mathbf{d}$ обозначим дискретную метрику $\mathbb{R}$: $\mathbf{d}$ переводит $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\{0; 1\}$, $(\mathbf{d}(x, x) \triangleq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$ & $(\mathbf{d}(u, v) \triangleq 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{R} \setminus \{u\})$. Пусть $\mathbb{M} \in \mathcal{P}(\overline{1, n})$, т. е.

$\mathbb{M}$ есть подмножество $\overline{1,n}$. Если $(\mathrm{Dist})[\mathbb{R}]$ — множество всех метрик $\mathbb{R}$, то определяем кортеж $(\rho_i)_{i\in\overline{1,n}} : \overline{1,n} \longrightarrow (\mathrm{Dist})[\mathbb{R}]$ условиями 1) при $j \in \mathbb{M}$ $\rho_j \triangleq \mathbf{d}$; 2) при $j \in \overline{1,n} \setminus \mathbb{M}$ ρ_j есть def обычная метрика-модуль. Пусть $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty[$ есть метрика $\mathbb{R}^n$, определяемая правилом: $\forall (x'_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n$, $\forall (x''_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n$

$$\rho((x'_i)_{i\in\overline{1,n}}, (x''_i)_{i\in\overline{1,n}}) \triangleq \max_{i\in\overline{1,n}} \rho_i(x'_i, x''_i). \tag{4.6}$$

Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, то $\mathfrak{B}^0_n(x,\varepsilon) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$. Введены открытые шары в $(\mathbb{R}^n, \rho)$;

$$\mathcal{O}^{(n)}[\mathbf{Y};\varepsilon] \triangleq \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbf{Y} : \rho(y,z) < \varepsilon\} = \bigcup_{y\in\mathbf{Y}} \mathfrak{B}^0_n(y,\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in]0,\infty[.$$

В топологии $\overline{\tau}^{(n)}_{\mathbb{R}}$ множества $\mathbb{R}^n$, порожденной метрикой ρ, имеем свойство: $\mathcal{O}^{(n)}[\mathbf{Y};\varepsilon] \in \overline{\tau}^{(n)}_{\mathbb{R}}$ $\forall \varepsilon \in]0,\infty[$. Тогда $\mathcal{O}^{(n)}[\mathbf{Y};\varepsilon] \subset \mathcal{O}_n[\mathbf{Y};\varepsilon]$ $\forall \varepsilon \in]0,1]$. Заметим, что использование при $\varepsilon < 1$ ε-окрестности $\mathbf{Y}$ в метрике ρ отвечает ситуации, когда (4.2) ослабляется лишь в направлении компонент с индексами из $\overline{1,n} \setminus \mathbb{M}$. Следовательно, речь идет о неполном возмущении моментного ограничения. При этом $\tau^{(n)}_{\mathbb{R}} \subset \overline{\tau}^{(n)}_{\mathbb{R}}$, а триплет $(\mathbb{R}^n, \tau^{(n)}_{\mathbb{R}}, \overline{\tau}^{(n)}_{\mathbb{R}})$ есть БТП. С учетом этого полагаем в дальнейшем, что $\tau^{(n)}_{\mathbf{l}} \triangleq \tau^{(n)}_{\mathbb{R}}$, $\tau^{(n)}_{\mathbf{u}} \triangleq \overline{\tau}^{(n)}_{\mathbb{R}}$; при этом реализуется БТП

$$(\mathbb{R}^n, \tau^{(n)}_{\mathbf{l}}, \tau^{(n)}_{\mathbf{u}}), \tag{4.7}$$

которое по смыслу соответствует БТП $(U, \tau_{\mathbf{l}}, \tau_{\mathbf{u}})$ теоремы 2.1. Используем (в качестве m теоремы 2.1) следующее правило погружения $\mathbf{F}$ в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$:

$$\mathbf{m} \triangleq (f * \eta)_{f\in\mathbf{F}} \in \mathbb{A}(\mathcal{L})^{\mathbf{F}}. \tag{4.8}$$

Итак, $\mathbf{m}$ сопоставляет обычному управлению $f \in \mathbf{F}$ к.-а. меру на $\mathcal{L}$, являющуюся неопределенным η-интегралом f. С учетом (4.8) введем

$$\mathbf{K} \triangleq \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_0(\mathcal{L})). \tag{4.9}$$

Элементы $\mathbf{K}$ рассматриваются в качестве ОУ. Использование $\tau_0(\mathcal{L})$ в (4.9), на первый взгляд, не вполне логично; более естественно использовать $\tau_*(\mathcal{L})$. Правда, для целого ряда конкретных постановок, имеющих своим источником линейные задачи управления с импульсными ограничениями [8]–[10], множество $\mathbf{F}$ оказывается таким, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_0(\mathcal{L})) \tag{4.10}$$

(например, [9], § 3.7; [19]). В общем же случае приходится признать, что обращение в (4.9) к $\tau_0(\mathcal{L})$, согласующееся с логикой (3.4), является платой за существенную универсальность конструируемого МП: формируя пространство ОУ на основе (4.9), “вырезаем” удобный для целей битопологического расширения фрагмент $B^*(E,\mathcal{L})$.

До конца настоящего раздела постулируем следующие два условия.

Условие 4.1. $\mathbf{K} \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$.

Условие 4.2. $\mathbf{s}_i \in B_0(E,\mathcal{L})$ $\forall i \in \mathbb{M}$.

Замечание 4.1. Условие 4.1 характеризует $\mathbf{K}$ как множество сравнимости. В ([11], § 20) указан достаточно широкий класс множеств сравнимости, охватывающий многие важные с практической точки зрения постановки (в частности, [11], (20.4)); это касается компактифицируемых задач ([8], гл. 4) и ([9], гл. 3), соответствующих линейным задачам управления с импульсными ограничениями и возможной разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях. Отметим и случаи некомпактифицируемых задач в ([11], часть 3; [18]).

Условие 4.2 доставляет в естественных для теории управления постановках свойство асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений (упомянутая часть как раз и определяется множеством $\mathbb{M}$); варианты данного свойства указаны, в частности, в [20].

Конкретизируя (3.4), получаем следующее БТП: $(\mathbf{K}, \tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}, \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}})$, $\mathbf{K} \neq \emptyset$. Далее полагаем

$$\mathbf{t_l} \triangleq \tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}, \quad \mathbf{t_u} \triangleq \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}, \tag{4.11}$$

получая вышеупомянутое БТП в виде $(\mathbf{K}, \mathbf{t_l}, \mathbf{t_u})$. Итак, имеем пару БТП $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbf{l}}^{(n)}, \tau_{\mathbf{u}}^{(n)})$, $(\mathbf{K}, \mathbf{t_l}, \mathbf{t_u})$, определяемых в (4.7), (4.11). Введем отображение $\mathbf{g} : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ по правилу: $\forall \mu \in \mathbf{K}$

$$\mathbf{g}(\mu) \triangleq \left(\int_E \mathbf{s}_i d\mu \right)_{i \in \overline{1,n}}. \tag{4.12}$$

В терминах $\mathbf{g}$ (4.12) определяется естественное расширение (4.2) в виде условия $\mathbf{g}(\mu) \in \mathbf{Y}$, определяющего множество допустимых ОУ (в примере раздела 1 подобная операция сводилась к восстановлению в конструируемом классе ОУ точного промежуточного условия в виде соответствующего нестрогого неравенства).

Предложение 4.1. $\mathbf{g} \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t_l}, \mathbb{R}^n, \tau_{\mathbf{l}}^{(n)}) \cap C(\mathbf{K}, \mathbf{t_u}, \mathbb{R}^n, \tau_{\mathbf{u}}^{(n)})$.

Доказательство осуществляется по схеме обоснования предложения 5.1 работы [20] и в данном изложении опущено.

Пусть

$$\mathbb{S} \triangleq \mathbf{g} \circ \mathbf{m}. \tag{4.13}$$

С учетом (4.8), (4.12) и (4.13) получаем, что $\mathbb{S}$ есть ([8], (3.4.11)) отображение

$$f \longmapsto \left(\int_E \mathbf{s}_i f \, d\eta \right)_{i \in \overline{1,n}} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbb{R}^n. \tag{4.14}$$

Теорема 4.1. *Если* $\mathbf{t} \in (\mathrm{top})[\mathbf{K}]$ *и* $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{F}))$, *то*

$$((\mathbb{S}^{-1}[\mathfrak{Y}] \dashv \mathcal{F} \dashv \mathbb{S}^{-1}[\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}^{(n)}}[\mathbf{Y}]]) \,\&\, (\mathbf{t_l} \subset \mathbf{t} \subset \mathbf{t_u})) \Longrightarrow ((\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbf{K}; \mathbf{t}; \mathbf{m}; \mathcal{F}] = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})). \tag{4.15}$$

Доказательство сводится к конкретизации условий следствия 2.2. В самом деле, полагаем в этих условиях

$$F = \mathbf{F}, \quad (U, \tau_{\mathbf{l}}, \tau_{\mathbf{u}}) = (\mathbb{R}^{(n)}, \tau_{\mathbf{l}}^{(n)}, \tau_{\mathbf{u}}^{(n)}), \quad (V, t_{\mathbf{l}}, t_{\mathbf{u}}) = (\mathbf{K}, \mathbf{t_l}, \mathbf{t_u}),$$
$$m = \mathbf{m}, \quad Y = \mathbf{Y}, \quad \mathcal{Y} = \mathfrak{Y}, \quad g = \mathbf{g}.$$

При этом $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$ (см. (4.8), (4.9)). Согласно (4.9), (4.11) имеем цепочку равенств

$$\mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \mathbf{t_u}) = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_0(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \mathbf{K}.$$

Кроме того, справедливо (4.5). Наконец, используем предложение 4.1, реализуя версию (2.17). Импликация (4.15) вытекает из следствия 2.2. □

5. Случай неотрицательных управлений

В данном разделе, сохраняя предположение о выполнении условия 4.2, рассмотрим один более конкретный случай выбора множества $\mathbf{F}$ (возможных управлений), для которого одновременно выполняются (4.10) и условие 4.1. Равенство (4.10) отвечает естественной и часто используемой идее применения $*$-слабой топологии, хорошо согласующейся, в частности, с логикой расширения задач управления [20], [19]. Пример раздела 1 является наглядной иллюстрацией последующих построений.

Пусть далее $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(B^+(E,\mathcal{L}))$, где $B^+(E,\mathcal{L})$ есть def множество всех неотрицательных функций из $B(E,\mathcal{L})$. Через $B_0^+(E,\mathcal{L})$ обозначим множество всех неотрицательных функций из $B_0(E,\mathcal{L})$;

$$\mathbb{F} \triangleq \left\{ \int_E f\, d\eta : f \in \mathbf{F} \right\}.$$

Условие 5.1. *Множество* $\mathbb{F}$ *замкнуто в* $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}) : \mathbb{F} \in \mathfrak{F}[\tau_{\mathbb{R}}]$.

Условие 5.2. $\forall f \in \mathbf{F}$, $\forall g \in B_0^+(E,\mathcal{L})$ $\left(\int\limits_E f\, d\eta = \int\limits_E g\, d\eta \right) \Longrightarrow (g \in \mathbf{F})$.

Предложение 5.1. *При условиях* 5.1 *и* 5.2 $\mathbf{K} \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$ *и, кроме того, справедливо равенство* (4.10).

Доказательство. Рассмотрим конус

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ ((\eta(L) = 0) \Longrightarrow (\mu(L) = 0))\}. \tag{5.1}$$

Тогда ([9], сс. 44, 53) из (5.1) имеем свойство $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \in \mathfrak{F}[\tau_0(\mathcal{L})]$ и, поскольку $\mathbf{F} \subset B^+(E,\mathcal{L})$, то согласно (4.8), (4.9) и теореме 3.7.3 из [9] $\mathbf{K} \subset (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \subset (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. С учетом транзитивности операции перехода к подпространству ТП для топологий

$$\tau_*^+(\mathcal{L}) \triangleq \tau_*(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]}, \quad \tau_0^+(\mathcal{L}) \triangleq \tau_0(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]}$$

конуса $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ имеем соотношения ([9], (3.5.7))

$$\tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}} = \tau_*^+(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}} \subset \tau_0^+(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}} = \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}, \tag{5.2}$$

что означает согласно (3.3) выполнение условия 4.1.

Осталось проверить справедливость (4.10). С учетом (5.2) имеем вложения $\mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_*(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} \subset \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_*(\mathcal{L}))$, где согласно (4.9) $\mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_0(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \mathbf{K}$. Итак,

$$\mathbf{K} \subset \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_*(\mathcal{L})). \tag{5.3}$$

Поскольку $\mathbf{F} \subset B^+(E,\mathcal{L})$, с учетом (4.8) и теоремы 3.7.3 в [9] получим вложение $\mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_*(\mathcal{L})) \subset (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$. Пусть $\mu_* \in \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_*(\mathcal{L}))$. Тогда, в частности, $\mu_* \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$. По выбору μ_* ([14], с. 89) для некоторой направленности $(D, \preceq, h)$ в $\mathbf{F}$ имеем сходимость

$$(D, \preceq, \mathbf{m} \circ h) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})} \mu_*. \tag{5.4}$$

Как следствие, $(D, \preceq, \mathbf{m} \circ h) \xrightarrow{\tau_\otimes(\mathcal{L})} \mu_*$ (см. (5.4) и определения раздела 3), а тогда $(D, \preceq, \mathbf{m} \circ h) \xrightarrow{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})} \mu_*$. Последнее означает, в частности, сходимость

$$(D, \preceq, ((\mathbf{m} \circ h)(d)(E))_{d \in D}) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} \mu_*(E). \tag{5.5}$$

Согласно (4.8) при $\delta \in D$ справедлива ([8], с. 69) цепочка равенств

$$(\mathbf{m} \circ h)(\delta)(E) = \mathbf{m}(h(\delta))(E) = (h(\delta) * \eta)(E) = \int_E h(\delta) d\eta \in \mathbb{F}, \tag{5.6}$$

так как $h(\delta) \in \mathbf{F}$. Из условия 5.1 и (5.5) вытекает $\mu_*(E) \in \mathbb{F}$. С учетом определения $\mathbb{F}$ подберем такое управление $\varphi \in \mathbf{F}$, что

$$\mu_*(E) = \int_E \varphi\, d\eta. \tag{5.7}$$

Через $\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех непустых конечных подсемейств $\mathcal{L}$. Следуя ([8], сс. 57, 83), оснащаем непустое множество $\mathcal{D} \triangleq \left\{\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}) \,\middle|\, \left(E = \bigcup\limits_{L \in \mathcal{K}} L\right) \,\&\, (\forall A \in \mathcal{K},\, \forall B \in \mathcal{K}\ ((A \cap B \neq \emptyset) \Longrightarrow (A = B)))\right\}$ (всех конечных $\mathcal{L}$-разбиений "единицы" E) направлением $\prec$ ([8], (4.3.1)), порожденным свойством вписанности (одного разбиения из $\mathcal{D}$ в другое). При $\mathcal{K} \in \mathcal{D}$ определяем $\Theta^+_{\mu_*}[\mathcal{K}] \in B^+_0(E, \mathcal{L})$ в согласии с ([8], (4.3.5)) (см. также ([8], сс. 83, 84)), получая равенство

$$\mu_*(E) = \int_E \Theta^+_{\mu_*}[\mathcal{K}] d\eta \tag{5.8}$$

(напомним, что $\mu_* \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$). Из (5.7), (5.8) следует

$$\int_E \Theta^+_{\mu_*}[\mathcal{K}] d\eta = \int_E \varphi\, d\eta \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{D}. \tag{5.9}$$

Поскольку $\varphi \in \mathbf{F}$, из условия 5.2 и (5.9) следует система включений $\Theta^+_{\mu_*}[\mathcal{K}] \in \mathbf{F} \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{D}$. Полагая, как и в ([8], с. 84), $\Theta^+_{\mu_*}[\cdot]*\eta \triangleq (\Theta^+_{\mu_*}[\mathcal{K}]*\eta)_{\mathcal{K} \in \mathcal{D}}$, имеем в виде $(\mathcal{D}, \prec, \Theta^+_{\mu_*}[\cdot]*\eta)$ направленность в $\mathbf{m}^1(\mathbf{F})$ (см. (4.8)), которая сходится к μ_* (по лемме 4.3.1 в [8]): $(\mathcal{D}, \prec, \Theta^+_{\mu_*}[\cdot] * \eta) \xrightarrow{\tau_0(\mathcal{L})} \mu_*$. Поэтому $\mu_* \in \mathbf{K}$ (см. (4.9)). Поскольку выбор μ_* был произвольным, вложение, противоположное (5.3), установлено. Осталось учесть (4.9). □

Напомним, что топологии $\mathbf{t_l}$ и $\mathbf{t_u}$ определены в (4.11). Из предложения 5.1 следует, что при условиях 5.1, 5.2 $(\mathbf{K}, \mathbf{t_l}, \mathbf{t_u})$ есть БТП (точнее, вариант БТП (3.4)). К этому добавим и то, что в рассматриваемом случае $\mathbf{F} \subset B^+(E, \mathcal{L})$ согласно (3.5) и ([8], (4.2.12)) $\tau^{\otimes}_{\mathbf{K}}(\mathcal{L}) = \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}} = \tau^+_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}} = \tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}} = \mathbf{t_l}$. Предложение 5.1 доставляет при условиях 4.2, 5.1 и 5.2 вариант теоремы 4.1, дополненный равенством (4.10): имеем весьма общий случай ситуации, когда $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})$ (множество допустимых ОУ) определяет асимптотику обычных управлений, универсальную в диапазоне ограничений асимптотического характера и топологий пространства ОУ. Эта асимптотика весьма естественна (в силу (4.9), (4.10)) с точки зрения погружения обычных управлений в подходящее пространство линейных непрерывных функционалов (см. теорему 3.6.1 в [15]). Отметим два обстоятельства: 1) рассматриваемый здесь случай неотрицательных управлений охватывает ([9], гл. 1, 2) многие постановки неустойчивых задач управления линейными системами, что, в частности, иллюстрируется примером раздела 1; 2) условия 4.2, 5.1 и 5.2, используемые в данном разделе, формулируются в терминах исходной задачи и допускают непосредственную проверку. Можно указать и точный вид множества $\mathbf{K}$ (т. е. вид множества ОУ). Справедливо (см. (5.1))

Предложение 5.2. *При условиях* 5.1 *и* 5.2 *справедливо равенство*

$$\mathbf{K} = \{\mu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \mid \mu(E) \in \mathbb{F}\}. \tag{5.10}$$

Доказательство. Обозначим через Ω множество в правой части (5.10). Выберем произвольно $\mu_* \in \mathbf{K}$. Тогда $\mu_* \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$ ([9], с. 53). По определению $\mathbf{K}$ (4.9) для некоторой направленности $(D, \preceq, h)$ в $\mathbf{F}$ имеем сходимость $(D, \preceq, \mathbf{m} \circ h) \xrightarrow{\tau_0(\mathcal{L})} \mu_*$. Поскольку $\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) \subset \tau_0(\mathcal{L})$, это означает сходимость в смысле топологии $\tau_{\otimes}(\mathcal{L})$, а тогда $(D, \preceq, \mathbf{m} \circ h) \xrightarrow{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})} \mu_*$. В частности, имеем (5.5). С учетом (5.6) и замкнутости $\mathbb{F}$ получаем включение $\mu_*(E) \in \mathbb{F}$. Поэтому $\mu_* \in \Omega$, чем завершается обоснование вложения $\mathbf{K} \subset \Omega$.

Пусть $\mu^* \in \Omega$, т. е. $\mu^* \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$ и при этом $\mu^*(E) \in \mathbb{F}$. Рассмотрим непустое направленное множество $(\mathcal{D}, \prec)$ ([8], с. 83); см. также доказательство предложения 5.1. При $\mathcal{K} \in \mathcal{D}$

конструируем $\Theta^+_{\mu^*}[\mathcal{K}] \in B^+_0(E,\mathcal{L})$ ([8], (4.3.5)–(4.3.7)) со свойством

$$\int_E \Theta^+_{\mu^*}[\mathcal{K}]d\eta = \mu^*(E) \in \mathbb{F}. \tag{5.11}$$

По определению $\mathbb{F}$ для некоторого управления $f^* \in \mathbf{F}$

$$\int_E f^* d\eta = \int_E \Theta^+_{\mu^*}[\mathcal{K}]d\eta \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathcal{D}.$$

Используя условие 5.2, получаем $\Theta^+_{\mu^*}[\mathcal{K}] \in \mathbf{F} \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathcal{D}$. Полагая $\Theta^+_{\mu^*}[\cdot] * \eta \triangleq (\Theta^+_{\mu^*}[\mathcal{K}] * \eta)_{\mathcal{K}\in\mathcal{D}}$, имеем направленность $(\mathcal{D}, \prec, \Theta^+_{\mu^*}[\cdot] * \eta)$ в $\mathbf{m}^1(\mathbf{F})$ (см. (4.8)), которая сходится ([8], сс. 84, 85) в топологии $\tau_0(\mathcal{L})$ к μ^*. Тогда $\mu^* \in \mathbf{K}$ (см. (4.9)). Вложение $\Omega \subset \mathbf{K}$ установлено. □

Отметим в заключение при $\eta(E) \neq 0$ конкретный вариант множества $\mathbf{F}$, полагая, что $\mathbf{T}$ есть непустое замкнутое (в смысле $\tau_{\mathbb{R}}$) подмножество $[0,\infty[$ и

$$\mathbf{F} = \left\{ f \in B^+_0(E,\mathcal{L}) \,\Big|\, \int_E f\, d\eta \in \mathbf{T} \right\};$$

данное множество непусто и удовлетворяет условиям 5.1, 5.2. При этом $\mathbb{F} = \mathbf{T}$, поскольку при $t \in \mathbf{T}$ для функции-константы $f_t \in B^+_0(E,\mathcal{L})$,

$$f_t(x) \triangleq \frac{t}{\eta(E)} \ \ \forall x \in E,$$

η-интеграл совпадает с t; ясно, что $f_t \in \mathbf{F}$.

В данной работе рассматривался простейший вариант отображения $\mathbb{S}$ (4.14), определяемого посредством $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$ и используемого для формирования “вилки” ограничений асимптотического характера. Более общая конструкция реализуется по аналогии с разделом 5 работы [20]. Распространение на случай векторных управлений осуществляется по схеме, подобной [21], где рассматривалась задача об асимптотической достижимости. В связи с условиями 5.1 и 5.2 отметим построения [22].

Замечание 5.1. Рассмотрим пример построения топологии из диапазона, определяемого в (4.15) посредством $\mathbf{t_l}$ и $\mathbf{t_u}$, которая отлична и $\mathbf{t_l}$, и от $\mathbf{t_u}$. Пусть в данном замечании $\eta(E) \neq 0$ и

$$\mathbf{F} = \left\{ f \in B^+_0(E,\mathcal{L}) \,\Big|\, \int_E f\, d\eta \leq 1 \right\}$$

(здесь условия 5.1, 5.2 выполнены; $\mathbb{F} = [0,1]$). Согласно (4.9) и лемме 4.3.2 из [8] имеем равенство

$$\mathbf{K} = \{\mu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \mid \mu(E) \leq 1\} = \mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2 \tag{5.12}$$

(см. также предложение 5.2), где $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \mid \mu(E) < 1\}$ и $\mathbf{K}_2 \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \mid \mu(E) = 1\}$. Следуем определениям (4.11). Согласно предложению 5.1 $\mathbf{K} \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$, а тогда $(\mathbf{K}, \mathbf{t_l}, \mathbf{t_u})$ есть БТП (конкретный вариант БТП (3.4)). Согласно (4.11) ([8], с. 81) $\mathbf{t_u}$ есть семейство всех таких множеств $G \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$, что $\forall \mu \in G \ \exists \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$:

$$\{\nu \in \mathbf{K} \mid \mu(L) = \nu(L) \ \ \forall L \in \mathcal{K}\} \subset G. \tag{5.13}$$

Тогда, как легко видеть, $\mathbf{K}_1 \in \mathbf{t_u}$ и $\mathbf{K}_2 \in \mathbf{t_u}$ (если $\mu \in \mathbf{K}_1$ или $\mu \in \mathbf{K}_2$, то в (5.13) следует полагать $\mathcal{K} = \{E\}$). Поскольку $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2 = \emptyset$, то (см. (5.12)) $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ суть непустые открыто-замкнутые множества в $(\mathbf{K}, \mathbf{t_u})$, порождающие разбиение $\mathbf{K}$. Если $\tau' \in (\mathrm{top})[\mathbf{K}_1]$ и $\tau'' \in (\mathrm{top})[\mathbf{K}_2]$, то, как известно ([14], с. 123),

$$\tau' \oplus \tau'' \triangleq \{G \in \mathcal{P}(\mathbf{K}) \mid (G \cap \mathbf{K}_1 \in \tau') \,\&\, (G \cap \mathbf{K}_2 \in \tau'')\} \in (\mathrm{top})[\mathbf{K}], \tag{5.14}$$

а ТП $(\mathbf{K}, \tau' \oplus \tau'')$ есть сумма $(\mathbf{K}_1, \tau')$ и $(\mathbf{K}_2, \tau'')$. В частности, определена топология

$$\mathbf{t_u}|_{\mathbf{K}_1} \oplus \mathbf{t_u}|_{\mathbf{K}_2} \in (\mathrm{top})[\mathbf{K}], \tag{5.15}$$

для которой $\mathbf{t_u} = \mathbf{t_u}|_{\mathbf{K}_1} \oplus \mathbf{t_u}|_{\mathbf{K}_2}$, поскольку $\mathbf{K}_1 \in \mathbf{t_u}$ и $\mathbf{K}_2 \in \mathbf{t_u}$. Итак, $(\mathbf{K}, \mathbf{t_u})$ есть сумма двух своих подпространств. Для топологии $\widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}} \triangleq \mathbf{t_l}|_{\mathbf{K}_1} \oplus \mathbf{t_l}|_{\mathbf{K}_2} \in (\mathrm{top})[\mathbf{K}]$ имеем согласно (5.14), (5.15) вложения

$$\mathbf{t_l} \subset \widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}} \subset \mathbf{t_u}. \tag{5.16}$$

В (5.16) учтен также тот факт, что ([20], (5.2)) $\mathbf{K}_1 \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$ и $\mathbf{K}_2 \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$. Отметим, что согласно (5.14) $(\mathbf{t_l}|_{\mathbf{K}_1} \subset \widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}})$ & $(\mathbf{t_l}|_{\mathbf{K}_2} \subset \widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}})$, в частности, $\mathbf{K}_2 \in \widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}}$. Вместе с тем, из определения и простейших свойств $*$-слабой топологии вытекает, что $\mathbf{K}_2 \notin \mathbf{t_l}$. Тогда $\mathbf{K}_2 \in \widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}} \setminus \mathbf{t_l}$, поэтому $\widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}} \neq \mathbf{t_l}$.

Поскольку одноэлементное множество $\{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}\}$ является ([8], с. 81) окрестностью $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ в топологии $\mathbf{t_u}|_{\mathbf{K}_1} = \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}_1} \in (\mathrm{top})[\mathbf{K}_1]$, то

$$\mathbf{t_u}|_{\mathbf{K}_1} \setminus \mathbf{t_l}|_{\mathbf{K}_1} \neq \emptyset.$$

Выберем произвольно $\mathbb{G} \in \mathbf{t_u}|_{\mathbf{K}_1} \setminus \mathbf{t_l}|_{\mathbf{K}_1}$. Тогда, в частности, $\mathbb{G} \in \mathbf{t_u}$ (поскольку $(\mathbf{K}, \mathbf{t_u})$ есть сумма двух своих подпространств), но $\mathbb{G} \notin \mathbf{t_l}|_{\mathbf{K}_1}$. Кроме того, имеем по выбору $\mathbb{G}$ вложение $\mathbb{G} \subset \mathbf{K}_1$, а тогда (см. (5.14)) $\mathbb{G} \notin \widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}}$. Следовательно, $\mathbb{G} \in \mathbf{t_u} \setminus \widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}}$ и, таким образом, $\widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}} \neq \mathbf{t_u}$. Итак, имеем (5.16) и $(\widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}} \neq \mathbf{t_l})$ & $(\widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}} \neq \mathbf{t_u})$. Следовательно, топология $\widetilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{l}}$ обладает необходимыми свойствами, а условия на выбор $\mathbf{t}$ в формулировке посылки импликации (4.15) действительно имеют диапазонный характер ($\mathbf{t}$ может не совпадать ни с $\mathbf{t_l}$, ни с $\mathbf{t_u}$).

В связи с условиями на $\mathcal{F}$ в посылке (4.15) отметим пример промежуточного семейства $\widetilde{\mathcal{F}} \triangleq \{\mathbb{S}^{-1}(\mathcal{O}^{(n)}[\mathbf{Y}; \varepsilon]) : \varepsilon \in]0, \infty[\}$. Тогда (см. раздел 4) $\mathbb{S}^{-1}[\mathfrak{Y}] \dashv \widetilde{\mathcal{F}}$; здесь, в частности, учитываем (4.4). С другой стороны, $\mathcal{O}^{(n)}[\mathbf{Y}; \varepsilon] \in \mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}^{(n)}}[\mathbf{Y}] \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[$. Поэтому $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathbb{S}^{-1}[\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}^{(n)}}[\mathbf{Y}]]$ и, в частности, $\widetilde{\mathcal{F}} \dashv \mathbb{S}^{-1}[\mathcal{N}_{\tau_{\mathbf{u}}^{(n)}}[\mathbf{Y}]]$. Итак, в первом условии посылки (4.15) можно полагать $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$; разумеется, здесь интересен случай $\mathbb{M} \neq \emptyset$, для которого метрика ρ отлична от метрики, порожденной нормой $\|\cdot\|_n$.

Литература

[1] Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями* (Наука, М., 1977).

[2] Гольштейн Е.Г. *Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения* (Наука, М., 1971).

[3] Даффин Р.Дж. *Бесконечные программы*, в сб. “Линейные неравенства и смежные вопросы” (Ин. лит., М., 1959), С. 263–267.

[4] Гамкрелидзе Р.В. *Основы оптимального управления* (Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1975).

[5] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры* (Наука, М., 1974).

[6] Красовский Н.Н. *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата* (Наука, М., 1985).

[7] Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления* (Наука, М., 1981).

[8] Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems* (Plenum Publishing Corporation, London, Moscow, 1996).

[9] Chentsov A.G. *Asymptotic attainability* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1997).

[10] Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 2002).

[11] Chentsov A.G. *Finitely additive measures and extensions of abstract control problems*, J. Math. Sci. **133** (2), 1045–1206 (2006) (Contemporary Mathematics and its Applications, V. 17, Optimal Control, 2006).

[12] Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств* (Мир, М., 1970).

[13] Бурбаки Н. *Общая топология* (Наука, М., 1968).

[14] Энгелькинг Р. *Общая топология* (Мир, М., 1986).
[15] Ченцов А.Г. *Элементы конечно-аддитивной теории меры*, I (УГТУ-УПИ, Екатеринбург, 2008).
[16] Неве Ж. *Математические основы теории вероятностей* (Мир, М., 1969).
[17] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория* (Ин. лит., М., 1962).
[18] Chentsov A.G. *Universal properties of generalized integral constraints in the class of finitely additive measures*, Func. Differ. Equ. **5** (1–2), 69–105 (1998).
[19] Ченцов А.Г. *К вопросу о компактификации пучка траекторий одной абстрактной управляемой системы*, Изв. вузов. Математика, № 5, 55–66 (2006).
[20] Ченцов А.Г. *К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер*, Изв. вузов. Математика, № 2, 58–80 (2002).
[21] Ченцов А.Г. *Расширения в классе конечно-аддитивных мер и условия асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений*, Вестн. Удмуртск. ун-та, вып. 1, 131–152 (2009).
[22] Chentsov A.G., Tarasova S.I. *Well-posed extensions of unstable control problems*, Proc. of the 14th International Workshop on Dynamics and Control "Advances in Mechanics: Dynamics and Control" (Nauka, Moscow, 2008), pp. 61–68.

А.Г. Ченцов

заведующий отделом,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, д. 16, г. Екатеринбург, 620219,

`e-mail:` chentsov@imm.uran.ru

A.G.Chentsov

Head of the Department,
Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16 S. Kovalevskaya str., Ekaterinburg, 620219 Russia,

`e-mail:` chentsov@imm.uran.ru