ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 9 (508)

УДК 512

С.Н. ТРОНИН, Л.Д. ГАРЕЕВА

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАДАХ, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАДОЙ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП. I

В первой части данной работы строится и изучается бесконечное семейство операд (нелинейных и линейных), в которое входят многие известные примеры операд, ранее описанные отдельно друг от друга. Это, в частности, операды, компонентами которых являются симметрические или гипероктаэдральные группы. Несмотря на то, что речь идет об обобщении некоторых известных объектов, затруднительно указать в литературе место, где подобные выкладки были бы ранее явно проделаны даже для операды симметрических групп. Дано также описание многообразий алгебр над операдами построенного семейства. В число таких многообразий входят многообразия полугрупп, ассоциативных алгебр, а также многообразия полугрупп и ассоциативных алгебр с инволюцией.

Во второй части работы изучается операда, определенная на множестве диаграмм Юнга и некоторые связанные с ней операды. Описываются многообразия алгебр над этими операдами. Обозначения и терминология в данной работе в основном следуют [1].

1. Подстановки и разбиения

Пусть n — целое неотрицательное число. В данной работе через $[n]$ будет обозначаться либо множество $\{1,\dots,n\}$, либо множество $\{0,1,\dots,n\}$. Результаты первого параграфа справедливы в обоих случаях. Разбиением множества $[n]$ на m ($m>0$) частей будем называть упорядоченную последовательность целых положительных (в случае $[n]=\{1,\dots,n\}$) или неотрицательных (в случае $[n]=\{0,1,\dots,n\}$) чисел $\alpha=(n_1\dots n_m)$ такую, что $|\alpha|=n_1+\dots+n_m=n$. Множество всех разбиений числа n на m частей обозначим через $P(n,m)$.

Определим композицию $P(n,m)\times P(m,k)\to P(n,k)$ следующим образом. Пусть $\alpha\in P(n,m)$, $\beta\in P(m,k)$, $\beta=(m_1\dots m_k)$, $m_1+\dots+m_k=m$. Положим $\alpha=(n_{11}\dots n_{m_1 1}\dots n_{1k}\dots n_{m_k k})$. Тогда по определению $\alpha\beta\in P(n,k)$ есть $\Big(\sum\limits_{i=1}^{m_1} n_{i1}\dots\sum\limits_{i=1}^{m_k} n_{ik}\Big)$.

Лемма 1. *Относительно введенной только что операции композиции P является категорией с объектами $[n]$, $n=1,2,\dots$ (или $n=0,1,2,\dots$).*

Доказательство. Непосредственно проверяется ассоциативность определенной композиции. Единичный морфизм $1_{[n]}$ — это разбиение $\underbrace{(1\ 1\dots 1)}_{n}=1^n$. □

Имеет место функтор $P\times P\xrightarrow{\circ}P$, обладающий свойством строгой ассоциативности. $[n]\circ[k]=[n+k]$, и если $\alpha=(n_1\dots n_m)$, $\beta=(k_1\dots k_l)$, то $\alpha\circ\beta=(n_1\dots n_m\ k_1\dots k_l)$. Это значит, что выполнены тождества $([n]\circ[k])\circ[m]=[n]\circ([k]\circ[m])$, $(\alpha\circ\beta)\circ\gamma=\alpha\circ(\beta\circ\gamma)$ и $(\alpha\gamma)\circ\beta=(\alpha\circ\beta)(\gamma\circ 1_{[q]})=(\alpha\circ 1_{[p]})(\gamma\circ\beta)$, где $[n]\xrightarrow{\alpha}[m]\xrightarrow{\gamma}[k]$, $[p]\xrightarrow{\beta}[q]$.

В дальнейшем вместо $\alpha\circ\beta$ будем писать просто $\alpha\beta$, т.к. в каждом конкретном случае будет ясно, что имеется в виду: композиция морфизмов в категории P или функтор $\circ$.

На $P(n,m)$ определено правое действие группы подстановок m-й степени Σ_m: если $\alpha = (n_1 \dots n_m)$, $\sigma \in \Sigma_m$, то $\alpha\sigma = (n_{\sigma 1} \dots n_{\sigma m}) \in P(n,m)$. (Используем запись σi вместо $\sigma(i)$.) Вообще, для каждого множества X имеет место действие $X^m \times \Sigma_m \to X^m$ такое, что если $\overline{x} = (x_1 \dots x_m) \in X^m$, то $\overline{x}\sigma = (x_{\sigma 1} \dots x_{\sigma m})$.

Следуя [1], определим операцию $P(n,m) \times \Sigma_m \to \Sigma_n$, $(\alpha, \sigma) \mapsto \alpha * \sigma$. Пусть $\alpha = (n_1 \dots n_m) \in P(n,m)$, X — некоторое множество, $\overline{x}_i \in X^{n_i}$ при $1 \le i \le m$, тогда

$$(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)(\alpha * \sigma) = \overline{x}_{\sigma 1} \dots \overline{x}_{\sigma m}. \tag{1}$$

Напомним, что гомоморфизмы групп $\Sigma_n \times \Sigma_m \to \Sigma_{n+m}$, $(\sigma, \tau) \to \sigma \times \tau$ определяются следующим образом: если $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma 1 & \sigma 2 & \dots & \sigma n \end{smallmatrix}\right)$, $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \tau 1 & \tau 2 & \dots & \tau m \end{smallmatrix}\right)$, то $\sigma \times \tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & n+m \\ \sigma 1 & \sigma 2 & \dots & \sigma n & n+\tau 1 & n+\tau 2 & \dots & n+\tau m \end{smallmatrix}\right)$. То же самое можно определить через действие Σ_n и Σ_m на X^n и X^m и Σ_{n+m} на X^{n+m}: если $\overline{x} \in X^n$, $\overline{y} \in X^m$, $\overline{x}\,\overline{y} \in X^{n+m}$, то

$$(\overline{x}\,\overline{y})(\sigma \times \tau) = (\overline{x}\sigma)(\overline{y}\tau). \tag{2}$$

Если $\alpha \in P(p,n)$, $\beta \in P(q,m)$, $\sigma \in \Sigma_n$, $\tau \in \Sigma_m$, то

$$(\alpha \circ \beta)(\sigma \times \tau) = (\alpha\beta)(\sigma \times \tau) = (\alpha\sigma)(\beta\tau). \tag{3}$$

Пусть $\beta = (k_1 \dots k_m) \in P(m,k)$, $\alpha_i \in P(n_i, k_i)$, $1 \le i \le m$, $n = n_1 + \dots + n_m$, $\sigma_i \in \Sigma_{k_i}$, $\sigma \in \Sigma_m$, тогда справедливы следующие тождества:

$$((\alpha_1 \dots \alpha_m)(\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m))\beta = (\alpha_1\sigma_1 \dots \alpha_m\sigma_m)\beta, \tag{4}$$

$$(\alpha_1 \dots \alpha_m)(\beta * \sigma) = \alpha_{\sigma 1} \dots \alpha_{\sigma m}, \tag{5}$$

где $\alpha_1 \dots \alpha_m = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_m$.

Сделаем несколько замечаний относительно разбиений с нулевыми компонентами. Положим $\Sigma_0 = \{\varepsilon_0\}$. Если в отображении

$$\Sigma_{n_1} \times \dots \times \Sigma_{n_i} \times \dots \times \Sigma_{n_m} \to \Sigma_{n_1 + \dots + n_m}, \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \mapsto \sigma_1 \times \dots \times \sigma_m,$$

встретится $n_i = 0$, то подразумевается, что в $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m$ соответствующий множитель $\sigma_i = \varepsilon_0$ пропускается. Если $n_1 = \dots = n_m = 0$, то весь результат есть ε_0. Если X — некоторое множество, то строка, соответствующая единственному элементу X^0, является пустой, и ее приписывание к любой другой строке $\overline{x}$ не меняет строку $\overline{x}$. С учетом этого надо понимать определения $\alpha\tau$ и $\alpha * \sigma$, если в $\alpha = (n_1 \dots n_m)$, имеются $n_i = 0$ ($\tau \in \Sigma_n$, $\sigma \in \Sigma_m$).

Лемма 2. *Пусть $\alpha \in P(n,m)$, $\sigma, \tau \in \Sigma_m$. Тогда*

$$\alpha * (\sigma\tau) = (\alpha * \sigma)(\alpha\sigma * \tau). \tag{6}$$

Доказательство. Используя определение (1), выбираем достаточно большое X (напр., $|X| \ge n$) и сравниваем действие левой и правой частей (6) на произвольной строке длины $n = n_1 + \dots + n_m$ из $X^{n_1 + \dots + n_m}$. Эту строку можно представить в виде $\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m$, где $\overline{x}_i$ — подстроки длины n_i, $\overline{x}_i \in X^{n_i}$. Тогда

$$(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)(\alpha * (\sigma\tau)) = \overline{x}_{\sigma\tau 1} \dots \overline{x}_{\sigma\tau m}, \quad (\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)(\alpha * \sigma) = (\overline{x}_{\sigma 1} \dots \overline{x}_{\sigma m}).$$

Последовательность длин подстрок $\overline{x}_{\sigma i}$ в строке $\overline{x}_{\sigma 1} \dots \overline{x}_{\sigma m}$ — это $\alpha\sigma = (n_{\sigma 1} \dots n_{\sigma m}) \in P(n,m)$. Для данного разбиения существует подстановка $(\alpha\sigma) * \tau$, и по определению $(\overline{x}_{\sigma 1} \dots \overline{x}_{\sigma m}) \cdot ((\alpha\sigma) * \tau) = \overline{x}_{\sigma\tau 1} \dots \overline{x}_{\sigma\tau m}$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $\beta = (k_1 \dots k_m) \in P(k,m)$, $\gamma = (n_{11} \dots n_{k_1 1} \dots n_{1m} \dots n_{k_m m}) \in P(n,k)$, $\sigma \in \Sigma_m$, $\gamma\beta = (n_{11} + \dots + n_{k_1 1} \dots n_{1m} + \dots + n_{k_m m}) \in P(n,k)$. Тогда*

$$(\gamma\beta) * \sigma = \gamma * (\beta * \sigma). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\overline{x} = \overline{x}_1 \dots \overline{x}_m \in X^n$, $\overline{x}_i \in X^{n_i}$, $n_i = n_{1,i} + \dots + n_{k_i,i}$, $\overline{x}_i = \overline{x}_{1i} \dots \overline{x}_{k_i i}$, $\overline{x}_{j,i} \in X^{n_{j,i}}$. Разбиение $\gamma \in P(n,k)$ соответствует разбиению $\overline{x}$ на подстроки $\overline{x}_{j,i}$, поэтому $\overline{x}(\gamma * (\beta * \sigma)) = \overline{x}_{1,\sigma 1} \dots \overline{x}_{k_{\sigma 1},\sigma 1} \dots \overline{x}_{1,\sigma m} \dots \overline{x}_{k_{\sigma m},\sigma m}$. С другой стороны, т. к. $\overline{x}_i$ — строка длины $n_{1,i} + \dots + n_{k_i,i}$, разбиение $\overline{x}$ на подстроки $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_m$ соответствует разбиению $\gamma\beta$ и поэтому

$$\overline{x}((\gamma\beta) * \sigma) = \overline{x}_{\sigma 1} \dots \overline{x}_{\sigma m} = \underbrace{\overline{x}_{1,\sigma 1} \dots \overline{x}_{k_{\sigma 1},\sigma 1}}_{\overline{x}_{\sigma 1}} \dots \underbrace{\overline{x}_{1,\sigma m} \dots \overline{x}_{k_{\sigma m},\sigma m}}_{\overline{x}_{\sigma m}}. \quad \square$$

Лемма 4. *При тех же соглашениях о γ, β, σ, имеет место тождество*

$$(\gamma\beta)\sigma = (\gamma(\beta * \sigma))(\beta\sigma). \tag{8}$$

Доказательство. Имеем $\gamma\beta = \left(\sum\limits_{i=1}^{k_1} n_{i1} \dots \sum\limits_{i=1}^{k_m} n_{im}\right)$, $(\gamma\beta)\sigma = \left(\sum\limits_{i=1}^{k_{\sigma 1}} n_{i\sigma 1} \dots \sum\limits_{i=1}^{k_{\sigma} m} n_{i\sigma m}\right)$. Для вычисления $\gamma(\beta * \sigma)$ надо представить γ как строку, разбитую на подстроки $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_m$, $\gamma_i = (n_{1,i} \dots n_{k_i,i})$, и тогда $\gamma(\beta * \sigma) = (\gamma_{\sigma 1} \dots \gamma_{\sigma m}) = (n_{1,\sigma 1} \dots n_{k_{\sigma 1},\sigma 1} \dots n_{1,\sigma m} \dots n_{k_{\sigma m},\sigma m})$. Далее, $\beta\sigma = (k_{\sigma 1} \dots k_{\sigma m})$, а $\gamma_{\sigma i}$ содержит $k_{\sigma i}$ компонент. Поэтому композиция упорядоченных разбиений $(\gamma(\beta * \sigma))(\beta\sigma)$ равна по определению $\Bigg(\underbrace{\sum\limits_{i=1}^{k_{\sigma 1}} n_{i,\sigma 1}}_{\left(\substack{\text{сумма всех} \\ \text{компонент } \gamma_{\sigma 1}}\right)} \quad \dots \quad \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{k_{\sigma} m} n_{i,\sigma m}}_{\left(\substack{\text{сумма всех} \\ \text{компонент } \gamma_{\sigma m}}\right)} \Bigg)$. $\square$

Лемма 5. *Пусть $\alpha = (n_1 \dots n_m) \in P(n,m)$, $\sigma \in \Sigma_m$, $\tau_i \in \Sigma_{n_i}$, $1 \le i \le m$. Тогда имеет место тождество*

$$(\tau_1 \times \dots \times \tau_m)(\alpha * \sigma) = (\alpha * \sigma)(\tau_{\sigma 1} \times \dots \times \tau_{\sigma m}). \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим строку $\overline{x} \in X^n$, $\overline{x} = \overline{x}_1 \dots \overline{x}_m$, $\overline{x}_i \in X^{n_i}$. Тогда

$$(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)((\tau_1 \times \dots \times \tau_m)(\alpha * \sigma)) = ((\overline{x}_1\tau_1) \dots (\overline{x}_m\tau_m))(\alpha * \sigma) = (\overline{x}_{\sigma 1}\tau_{\sigma 1}) \dots (\overline{x}_{\sigma m}\tau_{\sigma m}).$$

С другой стороны, $(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)(\alpha * \sigma) = (\overline{x}_{\sigma 1} \dots \overline{x}_{\sigma m})$. Согласно тождеству (2) будем иметь

$$(\overline{x}_{\sigma 1} \dots \overline{x}_{\sigma m})(\tau_{\sigma 1} \times \dots \times \tau_{\sigma m}) = (\overline{x}_{\sigma 1}\tau_{\sigma 1}) \dots (\overline{x}_{\sigma m}\tau_{\sigma m}). \quad \square$$

Лемма 6. *Пусть $\alpha_i = (n_{1i} \dots n_{k_i i}) \in P(n_i, k_i)$, $\sigma \in \Sigma_m$, $\tau_i \in \Sigma_{k_i}$, $\beta = (k_1 \dots k_m)$. Тогда имеют место тождества*

$$(\alpha_1 \dots \alpha_m) * (\tau_1 \times \dots \times \tau_m) = (\alpha_1 * \tau_1) \times \dots \times (\alpha_m * \tau_m), \tag{10}$$

$$(\alpha_1 \dots \alpha_m) * ((\tau_1 \times \dots \times \tau_m)(\beta * \sigma)) = ((\alpha_1 * \tau_1) \times \dots \times (\alpha_m * \tau_m))(((\alpha_1 \dots \alpha_m)\beta) * \sigma). \tag{11}$$

Доказательство. Тождество (10) есть частный случай (11), но удобно сначала доказать (10), а (11) вывести из (10). Пусть $\overline{x}_{ji} \in X^{n_{ji}}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k_i$, $\overline{x}_i = \overline{x}_{1i} \dots \overline{x}_{k_i i}$, $\overline{x} = \overline{x}_1 \dots \overline{x}_m$. Тогда

$$\overline{x}((\alpha_1 * \tau_1) \times \dots \times (\alpha_m * \tau_m)) = (\overline{x}_1(\alpha_1 * \tau_1)) \dots (\overline{x}_m(\alpha_m * \tau_m)) = \overline{x}_{\tau_1 1,1} \dots \overline{x}_{\tau_1 k_1,1} \dots \overline{x}_{\tau_m 1,m} \dots \overline{x}_{\tau_m k_m,m}.$$

Поскольку $(\overline{y}_1 \dots \overline{y}_m)(\tau_1 \times \dots \times \tau_m) = (\overline{y}_1\tau_1, \dots, \overline{y}_m\tau_m)$, то при $\overline{y}_i = ((1,i) \dots (k_i,i))$ будем иметь $\overline{y}_i\tau_i = ((\tau_i 1, i) \dots (\tau_i k_i, i))$. Длины подстрок $\overline{x}_{j,i}$ в строке $\overline{x}$ образуют разбиение $\alpha_1 \dots \alpha_m$, а значит, действие на $\overline{x}$ подстановки $(\alpha_1 \dots \alpha_m) * (\tau_1 \times \dots \times \tau_m)$ фактически сводится к действию $\tau_1 \times \dots \times \tau_m$ на строку индексов $\overline{x}$, т. е. на $\overline{y}_1 \dots \overline{y}_m$. Поэтому результат равен $\overline{x}_{\tau_1 1,1} ... \overline{x}_{\tau_1 k_1,1} ... \overline{x}_{\tau_m 1,m} ... \overline{x}_{\tau_m k_m,m}$. Это доказывает (10).

Переходя к (11), положим $\tau = \tau_1 \times \dots \times \tau_m$, $\mu = \beta * \sigma$, $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_m$. Тогда левая часть (11) есть $\alpha * (\tau\mu) = (\alpha * \tau)(\alpha\tau * \mu)$. Как уже доказано, $\alpha * \tau = (\alpha_1 \dots \alpha_m) * (\tau_1 \times \dots \times \tau_m) = (\alpha_1 * \tau_1) \times \dots \times (\alpha_m * \tau_m)$. Согласно (3) будем иметь $\alpha\tau = (\alpha_1 \dots \alpha_m)(\tau_1 \times \dots \times \tau_m) = (\alpha_1\tau_1) \dots (\alpha_m\tau_m)$, затем $\alpha\tau * \mu = (\beta\sigma) = ((\alpha\tau)\beta) * \sigma$. Согласно (4) $(\alpha\tau)\beta = \alpha\beta = (\alpha_1 \dots \alpha_m)\beta$. $\square$

Заметим еще, что вместо нашего обозначения $\sigma * \alpha$ в литературе употребляется $\sigma(n_1, \dots, n_m)$.

2. Описание семейства операд

Напомним определение операды.

Определение 1 ([1]–[4]). Операдой называется семейство множеств $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}(n) \mid n = 0,1,2,\dots$ или $n = 1,2,\dots\}$ вместе со следующим набором данных. На множестве $\mathfrak{R}(n)$ действует слева группа подстановок Σ_n. Для каждого упорядоченного набора целых положительных или неотрицательных чисел $n_1,\dots,n_m,m$ определена операция композиции $\mathfrak{R}(n_1)\times\cdots\times\mathfrak{R}(n_m)\times\mathfrak{R}(m)\longrightarrow\mathfrak{R}(n_1+\cdots+n_m)$, которую будем обозначать в виде $(\omega_1,\dots,\omega_m,\omega)\to(\omega_1\dots\omega_m)\omega = \omega_1\dots\omega_m\omega$. Должно быть выполнено свойство ассоциативности

$$(\omega_{1\,1}\omega_{2\,1}\dots\omega_{n_1\,1}\omega_1)(\omega_{1\,2}\omega_{2\,2}\dots\omega_{n_2\,2}\omega_2)\dots(\omega_{1\,m}\omega_{2\,m}\dots\omega_{n_m\,m}\omega_m)\omega = \\ = (\omega_{1\,1}\omega_{2\,1}\dots\omega_{n_1\,1}\dots\omega_{1\,m}\omega_{2\,m}\dots\omega_{n_m\,m})(\omega_1\omega_2\dots\omega_m\omega).$$

Предполагается также наличие единицы $\varepsilon\in\mathfrak{R}(1)$ такой, что $(\varepsilon\dots\varepsilon)\omega=\omega$ и $\omega\varepsilon=\omega$ для любого $\omega\in\mathfrak{R}(m)$. В частности, $\mathfrak{R}(1)$ будет полугруппой с единицей ε. Должны также выполняться два свойства, связывающие композиции и действия симметрических групп. Во-первых,

$$(\tau_1\omega_1)(\tau_2\omega_2)\dots(\tau_m\omega_m)\omega = (\tau_1\times\tau_2\times\cdots\times\tau_m)(\omega_1\omega_2\dots\omega_m\omega).$$

Во-вторых, любая упорядоченная последовательность $\omega_1\in\mathfrak{R}(n_1),\dots,\omega_m\in\mathfrak{R}(n_m)$ определяет разбиение $\alpha=(n_1,\dots,n_m)$, и при $\sigma\in\Sigma_m$ должно быть выполнено соотношение

$$\omega_1\omega_2\dots\omega_m(\sigma\omega) = (\alpha*\sigma)(\omega_{\sigma1}\omega_{\sigma2}\dots\omega_{\sigma m}\omega).$$

Будем различать операды, в которых определены или не определены нулевые компоненты. Роль операд с нулевыми компонентами будет существенна в третьем параграфе, результаты второго параграфа справедливы в обоих случаях.

Пусть K — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. K-линейная операда — это операда $\mathfrak{K}$, все компоненты $\mathfrak{K}(n)$ которой являются K-модулями, причем действие Σ_n на $\mathfrak{K}(n)$ перестановочно с умножением на элементы K, так что $\mathfrak{K}(n)$ есть левый $K\Sigma_n$-модуль, и операции композиции являются K-линейными по всем аргументам, взятым из компонент операды с ненулевыми номерами. При этом $\mathfrak{K}(1)$ становится ассоциативной K-алгеброй, и единица K отождествляется с ε — единицей операды $\mathfrak{K}$. Из нелинейной операды $\mathfrak{R}$ очевидным образом можно получить K-линейную операду $K\mathfrak{R}$, взяв $\mathfrak{R}(n)$ в качестве базиса свободного K-модуля — компоненты $K\mathfrak{R}(n)$ линейной операды $K\mathfrak{R}$. Операция композиции в получающейся операде определяется "по линейности" через композицию в $\mathfrak{R}$.

Напомним [1], что по любому моноиду G можно построить (нелинейную) операду, n-я компонента которой есть G^n. Будем обозначать эту операду снова через G, так что $G(n)=G^n$, и композиция определяется следующим образом. Пусть $\overline{g}=(g_1\dots g_n)\in G^n$, $g_1,\dots,g_k,x\in G$. Тогда полагаем $\overline{g}x=(g_1x\dots g_nx)$. Если теперь $\omega_i=\overline{g}_i=(g_{1\,i}\dots g_{n_i\,i})\in G(n_i)$, $1\le i\le m$, $\omega=(x_1\dots x_m)\in G(m)$, то

$$\omega_1\dots\omega_m\omega = (\overline{g}_1x_1,\dots,\overline{g}_mx_m)\in G^{n_1+\ldots+n_m} = G(n_1+\ldots+n_m).$$

Линеаризацию этой операды будем обозначать через KG, так что $KG(n)=K[G^n]=KG^n$.

Пусть G — некоторый моноид (единица которого обозначается как 1), и пусть $\chi: G\to\{+1,-1\}$ — гомоморфизм моноидов (характер G). Определим $\nu_n: G\to\Sigma_n$ следующим образом. Если $\chi(g)=+1$, то $\nu_n(g)=\left(\begin{smallmatrix}1&2&\dots&n-1&n\\1&2&\dots&n-1&n\end{smallmatrix}\right)$, а если $\chi(g)=-1$, то $\nu_n(g)=\left(\begin{smallmatrix}1&2&\dots&n-1&n\\n&n-1&\dots&2&1\end{smallmatrix}\right)$. Легко проверить, что $\nu_n: G\to\Sigma_n$ — гомоморфизм моноидов.

Положим $\mathfrak{R}(n)=\Sigma G_\chi(n)=\Sigma_n\times G^n$. На $\Sigma_n\times G^n$ определена структура полугруппы (группы, если G — группа) по формуле $(\sigma,\overline{g})(\tau,\overline{h})=(\sigma\tau,(\overline{g}\tau)\overline{h})$. Здесь $(\overline{g}\tau)\overline{h}=(g_{\tau(1)}h_1\dots g_{\tau(n)}h_n)$. На $\Sigma G_\chi(n)$ определяются левое и правое действия Σ_n: пусть $\sigma,\mu,\tau\in\Sigma_n$, $\overline{g}\in G^n$, тогда $\sigma(\tau,\overline{g})=(\sigma\tau,\overline{g})$, $(\tau,\overline{g})\mu=(\tau\mu,\overline{g}\mu)$. Очевидно, $(\sigma(\tau,\overline{g}))\mu=\sigma((\tau,\overline{g})\mu)$. Введем следующее обозначение.

Пусть n_s — целое положительное число, $h_k \in G$, тогда положим $(n_s, h_k) = (n_s, \chi(h_k)) = \nu_{n_s}(h_k)$. Если $\alpha = (n_1 \dots n_m)$, $\overline{h} = (h_1 \dots h_m) \in G^m$, то $(\alpha\sigma, \overline{h}) = (n_{\sigma 1}, h_1) \times \dots \times (n_{\sigma m}, h_m) \in \Sigma_{n_1 + \dots + n_m}$.

Определим композицию $\mathfrak{R}(n_1) \times \dots \times \mathfrak{R}(n_m) \times \mathfrak{R}(m) \to \mathfrak{R}(n_1 + \dots + n_m)$ по формуле

$$\begin{aligned}&(\tau_1, \overline{g}_1) \dots (\tau_m, \overline{g}_m)(\sigma, \overline{h}) = \\ &\quad = ((\alpha * \sigma)(\tau_{\sigma 1} \times \dots \times \tau_{\sigma m})(\alpha\sigma, \overline{h}), \overline{g}_{\sigma 1}(n_{\sigma 1}, h_1) \dots \overline{g}_{\sigma m}(n_{\sigma m}, h_m)\overline{h}) = \\ &\quad = ((\tau_1 \times \dots \times \tau_m)(\alpha * \sigma)(\alpha\sigma, \overline{h}), (\overline{g}_1 \dots \overline{g}_m)(\overline{h}\sigma^{-1})(\alpha * \sigma)(\alpha\sigma, \overline{h})) = \\ &\quad = (\tau_1 \times \dots \times \tau_m, \overline{g}_1 \dots \overline{g}_m(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha * \sigma)(\alpha\sigma, \overline{h}).\end{aligned}$$

Как обычно, положим $a^b = bab^{-1}$.

Лемма 7. *Справедливы следующие тождества:*

$$((\tau_1, \overline{g}_1)\mu_1) \dots ((\tau_m, \overline{g}_m)\mu_m)(\sigma, \overline{h}) = ((\tau_1, \overline{g}_1) \dots (\tau_m, \overline{g}_m)(\sigma, \overline{h}))(\mu_{\sigma 1} \times \dots \times \mu_{\sigma m})^{(\alpha\sigma, \overline{h})}, \tag{12}$$

$$(\tau_1, \overline{g}_1) \dots (\tau_m, \overline{g}_m)((\sigma, \overline{h})\mu) = ((\tau_1, \overline{g}_1) \dots (\tau_m, \overline{g}_m)(\sigma, \overline{h}))(\alpha\sigma * \mu). \tag{13}$$

Доказательство. Сначала докажем (12).

$$\begin{aligned}&(\tau_1\mu_1, \overline{g}_1\mu_1) \dots (\tau_m\mu_m, \overline{g}_m\mu_m)(\sigma, \overline{h}) = \\ &\quad = (\tau_1\mu_1 \times \dots \times \tau_m\mu_m, (\overline{g}_1\mu_1) \dots (\overline{g}_m\mu_m)(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha * \sigma)(\alpha\sigma, \overline{h}) = \\ &\quad = ((\tau_1 \times \dots \times \tau_m)(\mu_1 \times \dots \times \mu_m), (\overline{g}_1 \dots \overline{g}_m)(\overline{h}\sigma^{-1})(\mu_1 \times \dots \times \mu_m))(\alpha * \sigma)(\alpha\sigma, \overline{h}) = \\ &\quad = (\tau_1 \times \dots \times \tau_m, (\overline{g}_1 \dots \overline{g}_m)(\overline{h}\sigma^{-1}))(\mu_1 \times \dots \times \mu_m)(\alpha * \sigma)(\alpha\sigma, \overline{h}) = \\ &\quad = (\tau_1 \times \dots \times \tau_m, (\overline{g}_1 \dots \overline{g}_m)(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha * \sigma)(\mu_{\sigma 1} \times \dots \times \mu_{\sigma m})(\alpha\sigma, \overline{h}) = \\ &\quad = (\tau_1 \times \dots \times \tau_m, (\overline{g}_1 \dots \overline{g}_m)(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha * \sigma)(\alpha\sigma, \overline{h})(\alpha\sigma, \overline{h})(\mu_{\sigma 1} \times \dots \times \mu_{\sigma m})(\alpha\sigma, \overline{h}) = \\ &\quad = (\tau_1 \times \dots \times \tau_m, (\overline{g}_1 \dots \overline{g}_m)(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha * \sigma)(\alpha\sigma, \overline{h})(\mu_{\sigma 1} \times \dots \times \mu_{\sigma m})^{(\alpha\sigma, \overline{h})} = \\ &\quad = ((\tau_1, \overline{g}_1) \dots (\tau_m, \overline{g}_m)(\sigma, \overline{h}))(\mu_{\sigma 1} \times \dots \times \mu_{\sigma m})^{(\alpha\sigma, \overline{h})}.\end{aligned}$$

Согласно лемме 5 имеет место тождество

$$\begin{aligned}&(\alpha\sigma * \mu)(\alpha\sigma\mu, \overline{h}\mu) = (\alpha\sigma * \mu)((n_{\sigma\mu 1}, h_{\mu 1}) \times \dots \times (n_{\sigma\mu m}, h_{\mu m})) = \\ &\qquad\qquad = ((n_{\sigma 1}, h_1) \times \dots \times (n_{\sigma m}, h_m))(\alpha\sigma * \mu) = (\alpha\sigma, \overline{h})(\alpha\sigma * \mu).\end{aligned}$$

Левая часть (13) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}&(\tau_1, \overline{g}_1) \dots (\tau_m, \overline{g}_m)((\sigma, \overline{h})\mu) = (\tau_1 \times \dots \times \tau_m, (\overline{g}_1 \dots \overline{g}_m)((\overline{h}\mu)(\sigma\mu)^{-1}))(\alpha * \sigma\mu)(\alpha\sigma\mu, \overline{h}\mu) = \\ &\quad = (\tau_1 \times \dots \times \tau_m, (\overline{g}_1 \dots \overline{g}_m)(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha * \sigma)(\alpha\sigma * \mu)(\alpha\sigma\mu, \overline{h}\mu) = \\ &\quad = (\tau_1 \times \dots \times \tau_m, (\overline{g}_1 \dots \overline{g}_m)(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha * \sigma)(\alpha\sigma, \overline{h})(\alpha\sigma * \mu) = \\ &\quad = ((\tau_1, \overline{g}_1) \dots (\tau_m, \overline{g}_m)(\sigma, \overline{h}))(\alpha\sigma * \mu). \quad \square\end{aligned}$$

Лемма 8. *Пусть $\alpha = (n_1 \dots n_m)$, n_i — целые положительные числа, $\overline{g} = (g_1 \dots g_m)$, $g_i \in G$, $\sigma \in \Sigma_m$. Тогда*

$$(\alpha\sigma, \overline{g}\sigma) = (\alpha * \sigma)^{-1}(\alpha, \overline{g})(\alpha * \sigma). \tag{14}$$

Доказательство. Согласно лемме 5

$$(\alpha * \sigma)(\alpha\sigma, \overline{g}\sigma) = (\alpha * \sigma)((n_{\sigma 1}, g_{\sigma 1}) \times \dots \times (n_{\sigma m}, g_{\sigma m})) = ((n_1, g_1) \times \dots \times (n_m, g_m))(\alpha * \sigma),$$

что равносильно (14). $\square$

Лемма 9. *Пусть даны* $l_1, \ldots, l_n$ *— целые положительные числа,* $\alpha = (l_1 \ldots l_n)$, $l = l_1 + \cdots + l_n$, $g \in G$. *Тогда имеет место тождество*

$$((l_1, g) \times \cdots \times (l_n, g))(\alpha * (n, g)) = (l, g). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $M(\sigma)$ — матрица подстановки $\sigma \in \Sigma_n$. Тогда $M(\sigma\times\tau) = \left(\begin{smallmatrix} M(\sigma) & 0 \\ 0 & M(\tau) \end{smallmatrix}\right)$. Для доказательства (15) рассмотрим два случая: $\chi(g) = 1$ и $\chi(g) = -1$. В первом случае равенство тривиально, т. к. $(n, g) = 1$, $(l, g) = 1$, $(l_i, g) = 1$. Пусть $\chi(g) = -1$, тогда

$$M((l, g)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим эту $l \times l$–матрицу через E_l^*. Тогда

$$A = M((\alpha, \underbrace{g \ldots g}_{n})) = \begin{pmatrix} M((l_1, g)) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M((l_2, g)) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & M((l_n, g)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{l_1}^* & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & E_{l_2}^* & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & E_{l_n}^* \end{pmatrix},$$

$$B = M((\alpha * (n, g))) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & E_{l_1} \\ 0 & 0 & \ldots & E_{l_2} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & E_{l_n - 1} & \ldots & 0 & 0 \\ E_{l_n} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где E_k — единичная $k \times k$ – матрица. Теперь доказательство (15) сводится к доказательству равенства $AB = E_l^*$. Положим $A = (A_1, \ldots, A_n)^T$, A_i — матрица размера $l_i \times l$, $A_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ij}, \ldots, A_{in})$, где A_{ij} — блок размера $l_i \times l_j$, $A_{ii} = E_{l_i}^*$, $A_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Пусть $B = (B_1, \ldots, B_n)$, где B_{ij} — блок размера $l_i \times l_{n-j+1}$, $B_{n+1-j,j} = E_{l_{n+1-j}}$, в остальных случаях $B_{ij} = 0$. Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \ldots & A_1B_n \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \ldots & A_2B_n \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ A_nB_1 & A_nB_2 & \ldots & A_nB_n \end{pmatrix},$$

где $A_iB_j = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$ — блок размера $l_i \times l_{n-j+1}$. Утверждается, что для каждого j справедливо $A_{n+1-j}B_j = E_{l_{n+1-j}}^*$, а при $i \neq n+1-j$ имеет место равенство $A_iB_j = 0$. Действительно, $A_{n+1-j}B_j = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{n+1-j,k}B_{kj}$, $A_{n+1-j,n+1-j} = E_{l_{n+1-j}}^*$, $B_{n+1-j,j} = E_{l_{n+1-j}}$, в остальных слагаемых оба множителя равны нулю.

Если $i \neq n+1-j$, то в $A_iB_j = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$ ненулевой множитель A_{ii} умножается на нулевой B_{ij}, а ненулевой $B_{n+1-j,j}$ — на нулевой $A_{i,n+1-j}$. Поэтому

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & A_1B_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & A_{n-1}B_2 & \ldots & 0 \\ A_nB_1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = E_l^*. \quad \square$$

Теорема 1. *Семейство* $\Sigma G_\chi = \{\Sigma G_\chi(n) \mid n = 0,1,2\dots\}$ *вместе с введенной операцией композиции является операдой.*

Доказательство. Единицей операды является элемент $\varepsilon = (1,1) \in \Sigma_1 \times G$. Проверим выполнение свойств единицы:

$$(\varepsilon\dots\varepsilon)(\sigma,\overline{h}) = (1,1)\dots(1,1)(\sigma,\overline{h}) =$$
$$= (1\times\dots\times 1,(1\dots 1)(\overline{h}\sigma^{-1}))((1\dots 1)*\sigma)((1\dots 1)\sigma,\overline{h}) = (1,\overline{h}\sigma^{-1})\sigma = (\sigma,\overline{h}),$$
$$(\sigma,\overline{h})(1,1) = (\sigma,\overline{h}(1\cdot 1^{-1}))(1*1)(1\cdot 1,1) = (\sigma,\overline{h}).$$

Тождества, связывающие композиции и действия групп подстановок, проверяются следующими вычислениями:

$$\begin{aligned}
&(\mu_1(\tau_1,\overline{g}_1)\dots\mu_m(\tau_m,\overline{g}_m))(\sigma,\overline{h}) =\\
&\quad= ((\mu_1\tau_1)\times\dots\times(\mu_m\tau_m),\overline{g}_1\dots\overline{g}_m(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha*\sigma)(\alpha\sigma,\overline{h}) =\\
&\quad= ((\mu_1\times\dots\times\mu_m)(\tau_1\times\dots\times\tau_m),\overline{g}_1\dots\overline{g}_m(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha*\sigma)(\alpha\sigma,\overline{h}) =\\
&\quad= (\mu_1\times\dots\times\mu_m)((\tau_1\times\dots\times\tau_m,\overline{g}_1\dots\overline{g}_m(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha*\sigma)(\alpha\sigma,\overline{h})) =\\
&\quad= (\mu_1\times\dots\times\mu_m)(\tau_1,\overline{g}_1)\dots(\tau_m,\overline{g}_m)(\sigma,\overline{h});\\
&(\alpha*\mu)((\tau_{\mu 1},\overline{g}_{\mu 1})\dots(\tau_{\mu m},\overline{g}_{\mu m})(\sigma,\overline{h})) =\\
&\quad= (\alpha*\mu)(\tau_{\mu 1}\times\dots\times\tau_{\mu m},\overline{g}_{\mu 1}\dots\overline{g}_{\mu m}(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha\mu*\sigma)(\alpha\mu\sigma,\overline{h}) =\\
&\quad= ((\alpha*\mu)(\tau_{\mu 1}\times\dots\times\tau_{\mu m}),\overline{g}_{\mu 1}\dots\overline{g}_{\mu m}(\overline{h}\sigma^{-1}))(\alpha\mu*\sigma)(\alpha\mu\sigma,\overline{h}) =\\
&\quad= ((\tau_1\times\dots\times\tau_m)(\alpha*\mu),\overline{g}_1\dots\overline{g}_m(\overline{h}\sigma^{-1}\mu^{-1})(\alpha*\mu))(\alpha\mu*\sigma)(\alpha\mu\sigma,\overline{h}) =\\
&\quad= (\tau_1\times\dots\times\tau_m,\overline{g}_1\dots\overline{g}_m(\overline{h}\sigma^{-1}\mu^{-1}))(\alpha*\mu)(\alpha\mu*\sigma)(\alpha\mu\sigma,\overline{h}) =\\
&\quad= ((\tau_1\times\dots\times\tau_m,\overline{g}_1\dots\overline{g}_m(\overline{h}(\mu\sigma)^{-1}))(\alpha*\mu\sigma)(\alpha(\mu\sigma),\overline{h})) = (\tau_1,\overline{g}_1)\dots(\tau_m,\overline{g}_m)(\mu(\sigma,\overline{h})).
\end{aligned}$$

Покажем ассоциативность композиции. Пусть $(\tau_{ij},\overline{g}_{ij}) \in \Sigma G_\chi(k_{ij})$, $(\sigma_j,\overline{h}_j) \in \Sigma G_\chi(n_j)$, $(\mu,\overline{p}) \in \Sigma G_\chi(m)$, $i = 1,\dots,n_j$, $j = 1,\dots,m$.

Требуется доказать, что

$$\begin{aligned}
&((\tau_{11},\overline{g}_{11})\dots(\tau_{n_1 1},\overline{g}_{n_1 1})(\sigma_1,\overline{h}_1))\dots((\tau_{1m},\overline{g}_{1m})\dots(\tau_{n_m m},\overline{g}_{n_m m})(\sigma_m,\overline{h}_m))(\mu,\overline{p}) =\\
&\qquad= ((\tau_{11},\overline{g}_{11})\dots(\tau_{n_m m},\overline{g}_{n_m m}))((\sigma_1,\overline{h}_1)\dots(\sigma_m,\overline{h}_m)(\mu,\overline{p})). \qquad (16)
\end{aligned}$$

Положим $\alpha_i = (k_{1i}\dots k_{n_i i})$, $1 \le i \le m$, $k_i = k_{1i}+\dots+k_{n_i i}$, $\beta = (k_1\dots k_m)$, $\alpha = (n_1\dots n_m)$, $\overline{h} = \overline{h}_1\dots\overline{h}_m$, $\gamma = \alpha_1\circ\dots\circ\alpha_m = \alpha_1\dots\alpha_m$, $\gamma\alpha = \beta$ (это композиция морфизмов в категории P). Пусть также $\pi_i = (\alpha_i*\sigma_i)(\alpha_i\sigma_i,\overline{h}_i)$, $\tau_i = \tau_{1i}\times\dots\times\tau_{mi}$, $\overline{g}_i = \overline{g}_{1i}\dots\overline{g}_{n_i i}$, $\sigma = \sigma_1\times\dots\times\sigma_m$, $\pi = (\alpha*\mu)(\alpha\mu,\overline{p})$, $\nu = (\alpha\mu,\overline{p})$.

Так как

$$(\tau_{1i},\overline{g}_{1i})\dots(\tau_{n_i i},\overline{g}_{n_i i})(\sigma_i,\overline{h}_i) = (\tau_{1i}\times\dots\times\tau_{n_i i},\overline{g}_{1i}\dots\overline{g}_{n_i i}(\overline{h}_i\sigma_i^{-1}))(\alpha_i*\sigma_i)(\alpha_i\sigma_i,\overline{h}_i) = (\tau_i,\overline{g}_i(\overline{h}_i\sigma_i^{-1}))\pi_i,$$

то согласно тождеству (12) получим

$$((\tau_1,\overline{g}_1(\overline{h}_1\sigma_1^{-1}))\dots((\tau_m,\overline{g}_m(\overline{h}_m\sigma_m^{-1}))(\mu,\overline{p})))(\pi_{\mu 1}\times\dots\times\pi_{\mu m})^{(\beta\mu,\overline{p})} =$$
$$= (\tau_1\times\dots\times\tau_m,(\overline{g}_1\dots\overline{g}_m)((\overline{h}_1\sigma_1^{-1})\dots(\overline{h}_m\sigma_m^{-1})(\overline{p}\mu^{-1})))(\beta*\mu)(\beta\mu,\overline{p})(\beta\mu,\overline{p})\times$$
$$\times(\pi_{\mu 1}\times\dots\times\pi_{\mu m})(\beta\mu,\overline{p}) = (\tau_1\times\dots\times\tau_m,(\overline{g}_1\dots\overline{g}_m)((\overline{h}_1\sigma_1^{-1})\dots(\overline{h}_m\sigma_m^{-1})(\overline{p}\mu^{-1})))\times$$
$$\times(\beta*\mu)(\pi_{\mu 1}\times\dots\times\pi_{\mu m})(\beta\mu,\overline{p}).$$

Итак, левая часть (16) равна

$$(\tau_1 \times \dots \times \tau_m, (\overline{g}_1 \dots \overline{g}_m)(\overline{h}_1 \sigma_1^{-1} \dots \overline{h}_m \sigma_m^{-1}(\overline{p}\mu^{-1})))(\beta * \mu)(\pi_{\mu 1} \times \dots \times \pi_{\mu m})(\beta\mu, \overline{p}). \tag{17}$$

Преобразуем правую часть (16):

$$((\tau_{11}, \overline{g}_{11}) \dots (\tau_{n_m m}, \overline{g}_{n_m m}))((\sigma_1, \overline{h}_1) \dots (\sigma_m, \overline{h}_m)(\mu, \overline{p})) =$$
$$= ((\tau_{11}, \overline{g}_{11}) \dots (\tau_{n_m m}, \overline{g}_{n_m m}))((\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m, \overline{h}_1 \dots \overline{h}_m(\overline{p}\mu^{-1}))(\alpha * \mu)(\alpha\mu, \overline{p})) =$$
$$= ((\tau_{11}, \overline{g}_{11}) \dots (\tau_{n_m m}, \overline{g}_{n_m m}))(\sigma, \overline{h}(\overline{p}\mu^{-1}))(\gamma\sigma * \pi).$$

Применяя тождество (12), видим, что последнее выражение равно

$$(\tau_{11} \times \dots \times \tau_{n_m m}, (\overline{g}_{11} \dots \overline{g}_{n_m m})((\overline{h}(\overline{p}\mu^{-1}))\sigma^{-1}))(\gamma * \sigma)(\gamma\sigma, \overline{h}(\overline{p}\mu^{-1}))(\gamma\sigma * \pi). \tag{18}$$

Итак, проверка (5) сводится к проверке равенства (17) = (18). Ясно, что

$$\tau_1 \times \dots \times \tau_m = \tau_{11} \times \dots \times \tau_{n_m m}, \quad \overline{g}_1 \dots \overline{g}_m = \overline{g}_{11} \dots \overline{g}_{n_m m},$$
$$\overline{h}(\overline{p}\mu^{-1})(\sigma_1^{-1} \times \dots \times \sigma_m^{-1}) = (\overline{h}_1 \sigma_1^{-1}) \dots (\overline{h}_m \sigma_m^{-1})(\overline{p}\mu^{-1}).$$

Отсюда следует, что доказательство равенства (17) = (18) сводится к доказательству равенства подстановок

$$(\beta * \mu)(\pi_{\mu 1} \times \dots \times \pi_{\mu m})(\beta\mu, \overline{p}) = (\gamma * \sigma)(\gamma\sigma, \overline{h}(\overline{p}\mu^{-1}))(\gamma\sigma * \pi). \tag{19}$$

Обозначим левую часть этого предполагаемого равенства через L, правую — через R. Тогда

$$L = (\beta * \mu)((\alpha_{\mu 1} * \sigma_{\mu 1}) \times \dots \times (\alpha_{\mu m} * \sigma_{\mu m}))((\alpha_{\mu 1}\sigma_{\mu 1}, \overline{h}_{\mu 1}) \times \dots \times (\alpha_{\mu m}\sigma_{\mu m}, \overline{h}_{\mu m}))(\beta\mu, \overline{p}). \tag{20}$$

В силу (10) будем иметь $(\gamma * \sigma) = (\alpha_1 \dots \alpha_m) * (\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m) = (\alpha_1 * \sigma_1) \times \dots \times (\alpha_m * \sigma_m)$. Кроме того, $\gamma\sigma = (\alpha_1\sigma_1) \dots (\alpha_m\sigma_m)$, $\overline{h}(\overline{p}\mu^{-1}) = (\overline{h}_1 p_{1\mu}) \dots (\overline{h}_m p_{m\mu})$, $(\gamma\sigma, \overline{h}(\overline{p}\mu^{-1})) = (\alpha_1\sigma_1, \overline{h}_1 p_{1\mu}) \times \dots \times (\alpha_m\sigma_m, \overline{h}_m p_{m\mu})$. Согласно (9) имеет место тождество $(\gamma\sigma, \overline{h}(\overline{p}\mu^{-1}))(\gamma\sigma * \pi) = (\gamma\sigma * \pi)(\gamma\sigma\pi, \overline{h}(\overline{p}\mu^{-1})\pi)$. Так как $(\gamma * \sigma)(\gamma\sigma * \pi) = (\gamma * (\sigma\pi))$, то

$$R = (\gamma * \sigma\pi)(\gamma\sigma\pi, \overline{h}(\overline{p}\mu^{-1})\pi). \tag{21}$$

Здесь $\sigma\pi = (\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m)(\alpha * \mu)\nu = (\alpha * \mu)(\sigma_{\mu 1} \times \dots \times \sigma_{\mu m})\nu$. Согласно (7) имеем

$$\gamma * (\sigma\pi) = \gamma * ((\alpha * \mu)(\sigma_{\mu 1} \times \dots \times \sigma_{\mu m})\nu) = (\gamma(\alpha * \mu))((\gamma(\alpha * \mu)) * ((\sigma_{\mu 1} \times \dots \times \sigma_{\mu m})\nu)) =$$
$$= ((\gamma\alpha) * \mu)((\gamma(\alpha * \mu)) * ((\sigma_{\mu 1} \times \dots \times \sigma_{\mu m})\nu)) = (\beta * \mu)(\gamma(\alpha * \mu)) * ((\sigma_{\mu 1} \times \dots \times \sigma_{\mu m})\nu).$$

Сравнивая L и R, видим, что на $\beta * \mu$ можно "сократить", и равенство, которое нужно доказать, имеет вид

$$(\gamma(\alpha * \mu)) * ((\sigma_{\mu 1} \times \dots \times \sigma_{\mu m})\nu)(\gamma\sigma\pi, \overline{h}(\overline{p}\mu^{-1})\pi) =$$
$$= ((\alpha_{\mu 1} * \sigma_{\mu 1}) \times \dots \times (\alpha_{\mu m} * \sigma_{\mu m}))((\alpha_{\mu 1}\sigma_{\mu 1}, \overline{h}_{\mu 1}) \times \dots \times (\alpha_{\mu m}\sigma_{\mu m}, \overline{h}_{\mu m}))(\beta\mu, \overline{p}). \tag{22}$$

Преобразуем левую часть (22):

$$(\gamma(\alpha * \mu)) * ((\sigma_{\mu 1} \times \dots \times \sigma_{\mu m})\nu) = ((\gamma(\alpha * \mu)) * (\sigma_{\mu 1} \times \dots \times \sigma_{\mu m}))((\gamma(\alpha * \mu))((\sigma_{\mu 1} \times \dots \times \sigma_{\mu m}) * \nu)).$$

Так как $\gamma(\alpha * \mu) = \alpha_{\mu 1} \dots \alpha_{\mu m}$, то $(\gamma(\alpha * \mu)) * (\sigma_{\mu 1} \times \dots \times \sigma_{\mu m}) = (\alpha_{\mu 1} * \sigma_{\mu 1}) \times \dots \times (\alpha_{\mu m} * \sigma_{\mu_m})$. Поэтому равенство (22) эквивалентно следующему:

$$((\alpha_{\mu 1}\sigma_{\mu 1}, \overline{h}_{\mu 1}) \times \dots \times (\alpha_{\mu m}\sigma_{\mu m}, \overline{h}_{\mu m}))(\beta\mu, \overline{p}) =$$
$$= ((\gamma(\alpha * \mu)(\sigma_{\mu 1} \times \dots \times \sigma_{\mu m})) * \nu)(\gamma\sigma\pi, \overline{h}(\overline{p}\mu^{-1})\pi). \tag{23}$$

Пусть $\xi = \gamma(\alpha * \mu)(\sigma_{\mu 1} \times \cdots \times \sigma_{\mu m}) = (\alpha_{\mu 1} \dots \alpha_{\mu m})(\sigma_{\mu 1} \times \cdots \times \sigma_{\mu m}) = (\alpha_{\mu 1}\sigma_{\mu 1}) \dots (\alpha_{\mu m}\sigma_{\mu m})$. Тогда

$$\gamma\sigma\pi = (\alpha_1 \dots \alpha_m)(\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_m)(\alpha * \mu)(\alpha\mu, \overline{p}) =$$
$$= ((\alpha_1\sigma_1) \dots (\alpha_m\sigma_m))(\alpha * \mu)(\alpha\mu, \overline{p}) = ((\alpha_{\mu 1}\sigma_{\mu 1}) \dots (\alpha_{\mu m}\sigma_{\mu m}))(\alpha\mu, \overline{p}) = \xi\nu.$$

Далее,

$$\overline{h}(\overline{p}\mu^{-1})\pi = ((\overline{h}_1 p_{1\mu}) \dots (\overline{h}_m p_{m\mu}))(\alpha * \mu)\nu = ((\overline{h}_{\mu 1} p_1) \dots (\overline{h}_{\mu m} p_m))\nu = \overline{r}\nu,$$

где $\overline{r} = (\overline{h}_{\mu 1} p_1) \dots (\overline{h}_{\mu m} p_m)$ — строка элементов моноида G.

К подстановке $(\gamma\sigma\pi, \overline{h}(\overline{p}\mu^{-1})\pi)$ применим тождество (14). Это дает $(\gamma\sigma\pi, \overline{h}(\overline{p}\mu^{-1})\pi) = (\xi\nu, \overline{r}\nu) = (\xi * \nu)^{-1}(\xi, \overline{r})(\xi * \nu)$, поэтому правая часть (23) равна $(\xi * \nu)(\xi * \nu)^{-1}(\xi, \overline{r})(\xi * \nu) = (\xi, \overline{r})(\xi * \nu)$.

Рассмотрим $(\xi, \overline{r}) = (\alpha_{\mu 1}\sigma_{\mu 1}, \overline{h}_{\mu 1} p_1) \times \cdots \times (\alpha_{\mu m}\sigma_{\mu m}, \overline{h}_{\mu m} p_m)$, где по определению

$$(\alpha_{\mu i}\sigma_{\mu i}, \overline{h}_{\mu i} p_i) = (k_{\sigma_{\mu i} 1, \mu i}, h_{1, \mu i} p_i) \times \cdots \times (k_{\sigma_{\mu i} n_{\mu i}, \mu i}, h_{n_{\mu i}, \mu i} p_i) =$$
$$= ((k_{\sigma_{\mu i} 1, \mu i}, h_{1, \mu i}) \times \cdots \times (k_{\sigma_{\mu i} n_{\mu i}, \mu i}, h_{n_{\mu i}, \mu i}))((k_{\sigma_{\mu i} 1, \mu i}, p_i) \times \cdots \times (k_{\sigma_{\mu i} n_{\mu i}, \mu i}, p_i)) =$$
$$= (\alpha_{\mu i}\sigma_{\mu i}, \overline{h}_{\mu i})(\alpha_{\mu i}\sigma_{\mu i}, \overline{p}_i).$$

Здесь $\overline{p}_i = \underbrace{p_i \dots p_i}_{n_{\mu i}}$. Таким образом,

$$(\xi, \overline{r}) = ((\alpha_{\mu 1}\sigma_{\mu 1}, \overline{h}_1) \times \cdots \times (\alpha_{\mu m}\sigma_{\mu m}, \overline{h}_m))((\alpha_{\mu 1}\sigma_{\mu 1}, p_1) \times \cdots \times (\alpha_{\mu m}\sigma_{\mu m}, p_m)).$$

Отсюда видно, что (12) равносильно равенству

$$(\beta\mu, \overline{p}) = ((\alpha_{\mu 1}\sigma_{\mu 1}, p_1) \times \cdots \times (\alpha_{\mu m}\sigma_{\mu m}, p_m))(\xi * \nu). \tag{24}$$

Так как $\nu = (\alpha\mu, \overline{p}) = (n_{\mu 1}, p_1) \times \cdots \times (n_{\mu m}, p_m)$, $\xi = (\alpha_{\mu 1}\sigma_{\mu 1}) \dots (\alpha_{\mu m}\sigma_{\mu m})$, то из леммы 6 следует

$$\xi * \nu = ((\alpha_{\mu 1}\sigma_{\mu 1}) * (n_{\mu 1}, p_1)) \times \cdots \times ((\alpha_{\mu m}\sigma_{\mu m}) * (n_{\mu m}, p_m)) = \prod_{i=1}^{m}((\alpha_{\mu i}\sigma_{\mu i}) * (n_{\mu i}, p_i)). \tag{25}$$

Теперь (24) переписывается в виде

$$\prod_{i=1}^{m}(k_{\mu i}, p_i) = \prod_{i=1}^{m}(\alpha_{\mu i}\sigma_{\mu i}, \overline{p}_i)((\alpha_{\mu i}\sigma_{\mu i}) * (n_{\mu i}, p_i)),$$

что следовало бы из равенств (для всех $1 \le i \le m$)

$$(k_{\mu i}, p_i) = (\alpha_{\mu i}\sigma_{\mu i}, p_i)((\alpha_{\mu i}\sigma_{\mu i}) * (n_{\mu i}, p_i)).$$

Но справедливость этих равенств следует из леммы 9. $\square$

Пример 1. Пусть $G = \{1\}$. В этом случае $\Sigma_n \times G^n \cong \Sigma_n$. Гомоморфизм χ тривиален. Получаем операду Σ, компоненты которой $\Sigma(n) = \Sigma_n$, а композиция сводится к следующему: $\tau_1 \dots \tau_m\sigma = (\tau_1 \times \cdots \times \tau_m)(\alpha * \sigma)$.

Пример 2. Пусть $G = \{+1, -1\} \cong \Sigma_2$. Тогда $\Sigma_n \times G$ — это гипероктаэдральная группа, которая будет обозначаться через Oct_n. Полагая χ тождественным отображением, получаем операду, описанную кратко в примере 2.1 ([5], с. 278). Будем называть ее гипероктаэдральной операдой и обозначать через Oct.

3. Описание алгебр

Определение 2. Пусть $\mathfrak{R}$ — операда, вообще говоря, нелинейная. Алгеброй над операдой $\mathfrak{R}$ называется множество A вместе с заданными для каждого $n \geq 1$ (или $n \geq 0$, если определена компонента $\mathfrak{R}(0)$) операциями композиции $A^m \times \mathfrak{R}(m) \longrightarrow A$, $(a_1, \ldots, a_m, \omega) \mapsto a_1 a_2 \ldots a_m \omega$, для которых $a\varepsilon = a$ для любого $a \in A$, и выполнено тождество ассоциативности

$$(a_{1\,1}a_{2\,1} \ldots a_{n_1\,1}\omega_1)(a_{1\,2}a_{2\,2} \ldots a_{n_2\,2}\omega_2) \ldots (a_{1\,m}a_{2\,m} \ldots a_{n_m\,m}\omega_m)\omega = \\ = (a_{1\,1}a_{2\,1} \ldots a_{n_1\,1} \ldots a_{1\,m}a_{2\,m} \ldots a_{n_m\,m})(\omega_1\omega_2 \ldots \omega_m\omega)$$

и свойство, связывающее композицию с действием группы подстановок $(a_1 ... a_m)(\sigma\omega) = a_{\sigma 1} ... a_{\sigma m}\omega$, при $\sigma \in \Sigma_m$. Если в операде $\mathfrak{R}$ есть нулевая компонента $\mathfrak{R}(0)$, то в случае $m = 0$ композиция в алгебре A сводится к отображению $\mathfrak{R}(0) \to A$, образ которого есть множество констант A. Если операда $\mathfrak{R}$ K-линейна, то алгебры над $\mathfrak{R}$ обычно тоже предполагаются линейными, т. е. являются K-модулями, и при $n > 0$ композиция линейна по каждому аргументу.

Пусть $\mathrm{Alg}(\mathfrak{R})$ есть категория алгебр над операдой $\mathfrak{R}$.

Теорема 2. *Многообразие $\mathrm{Alg}(\Sigma G_\chi)$ рационально эквивалентно многообразию $\mathfrak{M}$ универсальных алгебр следующего вида. Алгебра A этого многообразия — это полугруппа с операцией умножения $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, снабженная правым действием $A \times G \to A$, $(a, g) \mapsto a^g$, таким, что*

$$(a_1 \cdot a_2)^g = \begin{cases} a_1^g \cdot a_2^g & \text{при } \ \chi(g) = +1; \\ a_2^g \cdot a_1^g & \text{при } \ \chi(g) = -1. \end{cases} \tag{26}$$

Унарные операции вида $a \mapsto a^g$ входят в сигнатуру многообразия $\mathfrak{M}$. Если в состав операды ΣG_χ входит нулевая компонента, то объекты $\mathfrak{M}$ суть полугруппы с единицей (обозначаемой через e), причем $e^g = e$ для всех $g \in G$. Если K — коммутативное кольцо,то $Alg(\Sigma G_\chi)$ рационально эквивалентно многообразию ассоциативных K-алгебр (с единицей, если в операде есть нулевая компонента), на которых справа K-линейно действует G, и выполнены тождества (26).

Доказательство. Напомним, что многообразия $\mathrm{Alg}(\Sigma G_\chi)$ и $\mathfrak{M}$ рационально эквивалентны, если существует изоморфизм (а не просто эквивалентность) категорий $\Phi : \mathrm{Alg}(\Sigma G_\chi) \to \mathfrak{M}$ такой, что $U_2\Phi = U_1$, где $U_1 : \mathrm{Alg}(\Sigma G_\chi) \to \mathrm{Set}$, $U_2 : \mathfrak{M} \to \mathrm{Set}$ — “забывающие” функторы в категорию множеств, сопоставляющие алгебре A множество A (см. [6], [7]). Пусть A — алгебра над ΣG_χ. Так как $\Sigma G_\chi(1) \cong G$, то композиция $A \times \Sigma G_\chi(1) \to A$ определяет правое действие $A \times G \to A$ такое, что $a^g = a(\varepsilon_1, g)$. Здесь ε_1 — единица в группе Σ_1, и для любого $n > 0$ через ε_n далее будет обозначаться единичная подстановка n-го порядка. Положим $\omega = (\varepsilon_2, (11))$, и пусть $a_1 \cdot a_2 = a_1 a_2 \omega$ для $a_1, a_2 \in A$. Проверим, что эта операция ассоциативна:

$$(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = ((a_1 a_2 \omega) a_3)\omega = a_1 a_2 a_3 (\omega\varepsilon\omega) = \\ = (a_1 a_2 a_3)((\varepsilon_2, (11), (\varepsilon_1, 1))(\varepsilon_2, (11)) = (a_1 a_2 a_3)(\varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2, (111)) = (a_1 a_2 a_3)(\varepsilon_3, (111)), \\ a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) = (a_1 a_2 a_3)(\varepsilon\omega\omega) = (a_1 a_2 a_3)(\varepsilon_3, (111)).$$

Если предполагается, что в ΣG_χ есть нулевая компонента, то она состоит из единственного элемента ε_0 и его действие на A сводится к выбору в A некоторого фиксированного элемента e. Проверим, что $a \cdot e = e \cdot a = a$ для любого $a \in A$. Выделяя, например, в выражении $a \cdot e = (ae)\omega$ ту составляющую, которая относится к операде, получим $\varepsilon\varepsilon_0\omega = (\varepsilon_1, 1) = \varepsilon$, что означает $a \cdot e = a$. Наконец, $(a_1 \cdot a_2)^g = (a_1 a_2 \omega)(\varepsilon_1, g) = a_1 a_2((\varepsilon_2, (11))(\varepsilon_1, g)) = a_1 a_2(\varepsilon_2, gg)$.

По определению композиции в операде ΣG_χ имеют место тождества

$$(\varepsilon_2, gg) = \begin{cases} (\varepsilon_1, g)(\varepsilon_1, g)(\varepsilon_2, 11), & \chi(g) = +1; \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)((\varepsilon_1, g)(\varepsilon_1, g)(\varepsilon_2, 11)), & \chi(g) = -1. \end{cases}$$

Случай $\chi(g) = +1$ очевиден. В случае $\chi(g) = -1$ получим

$$(a_1 \cdot a_2)^g = (a_1 a_2)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)(\varepsilon_1, g)(\varepsilon_1, g)\omega) = ((a_1 a_2)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right))((\varepsilon_1, g)(\varepsilon_1, g)\omega) = \\ = (a_2 a_1)((\varepsilon_1, g)(\varepsilon_1, g)\omega) = a_2^g \cdot a_1^g.$$

Функтор Φ сопоставляет алгебре A над операдой ΣG_χ множество A, снабженное действием моноида G и бинарной операцией умножения, описанными выше. Из определений следует, что гомоморфизмы ΣG_χ-алгебр сохраняют эти операции. Следовательно, имеет место функтор $\Phi : \mathrm{Alg}(\Sigma G_\chi) \to \mathfrak{M}$, и очевидно, что $U_2 \cdot \Phi = U_1$.

Построим обратный к Φ функтор Ψ. Пусть A — алгебра из $\mathfrak{M}$. Определим композицию $A^n \times \Sigma G_\chi(n) \to A$ по формуле $(a_1 \dots a_n)(\sigma, g_1 \dots g_n) = a_{\sigma 1}^{g_1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma n}^{g_n}$. Ясно, что $a(\varepsilon_1, 1) = a^1 = a$.

Проверим ассоциативность. Пусть $\overline{x}_i = x_{i1} \dots x_{n_i i} \in A^{n_i}$, $(\tau_i, \overline{g}_i) \in \Sigma G_\chi(n_i)$, $\overline{g}_i = g_{i1} \dots g_{n_i i} \in G^{n_i}$, $(\sigma, \overline{h}) \in \Sigma G_\chi(m)$, $\overline{h}_i = h_1 \dots h_m \in G^m$, $\alpha = (n_1 \dots n_m)$, $\nu_i = \nu_i(h) = (n_i, h)$. Тогда

$$(\overline{x}_1(\tau_1, \overline{g}_1) \dots \overline{x}_m(\tau_m, \overline{g}_m))(\sigma, \overline{h}) = (\overline{x}_{\sigma 1}(\tau_{\sigma 1}, \overline{g}_{\sigma 1}))^{h_1} \cdot \dots \cdot (\overline{x}_{\sigma m}(\tau_{\sigma m}, \overline{g}_{\sigma m}))^{h_m}.$$

Вычислим $y_i = (\overline{x}_{\sigma i}(\tau_{\sigma i}, \overline{g}_{\sigma i}))^{h_i} = (x_{\tau_{\sigma i} 1, \sigma i}^{g_{1,\sigma i}} \cdot \dots \cdot x_{\tau_{\sigma i} n_{\sigma i}, \sigma i}^{g_{n_{\sigma i}, \sigma i}})^{h_i}$. Если $\chi(g) = +1$, то $y_i = (x_{\tau_{\sigma i} 1, \sigma i})^{g_{1,\sigma i} \cdot h_i} \cdot \dots \cdot (x_{\tau_{\sigma i} n_{\sigma i}, \sigma i})^{g_{n_{\sigma i}, \sigma i} \cdot h_i}$. Если $\chi(g) = -1$, то $y_i = (x_{\tau_{\sigma i} n_{\sigma i}, \sigma i})^{g_{n_{\sigma i}, \sigma i} \cdot h_i} \cdot \dots \cdot (x_{\tau_{\sigma i} 1, \sigma i})^{g_{1,\sigma i} \cdot h_i}$.

Рассмотрим

$$z = (\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)((\tau_1, \overline{g}_1) \dots (\tau_m, \overline{g}_m)(\sigma, \overline{h})) = \\ = (\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)((\tau_1 \times \dots \times \tau_m)(\alpha * \sigma)(\nu_{\sigma 1} \times \dots \times \nu_{\sigma m}), (\overline{g}_{\sigma 1} \nu_{\sigma 1} \dots \overline{g}_{\sigma m} \nu_{\sigma m} \overline{h})).$$

Заметим, что

$$(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)((\tau_1 \times \dots \times \tau_m)(\alpha * \sigma)) = (\overline{x}_1 \tau_1 \dots \overline{x}_m \tau_m)(\alpha * \sigma) = (\overline{x}_{\sigma 1} \tau_{\sigma 1} \dots \overline{x}_{\sigma m} \tau_{\sigma m}).$$

Из определения операции композиции следует $z = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_m$, где множители z_i устроены следующим образом. При $\chi(g) = +1$ это произведение всех элементов строки $(\overline{x}_{\sigma i} \tau_{\sigma i}) = (x_{\tau_{\sigma i} 1, \sigma i} \dots x_{\tau_{\sigma i} n_{\sigma i}, \sigma i})$, причем на $\tau_{j, \sigma i}$-й элемент действует соответствующий элемент из строки $\overline{g}_{\sigma i} h_i$, т. е. элемент $\overline{g}_{j, \sigma i} h_i \in G$. При $\chi(g) = -1$ имеем

$$\nu_{\sigma i} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n_{\sigma i}-1 & n_{\sigma i} \\ n_{\sigma i} & n_{\sigma i}-1 & \dots & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad (\overline{g}_{\sigma i} \nu_{si}) h_i = (g_{n_{\sigma i}, \sigma i} \cdot h_i \dots g_{1, \sigma i} \cdot h_i),$$

и z_i есть произведение всех элементов строки $\overline{x}_{\sigma i} \tau_{\sigma i}$, взятых в обратном порядке, на которых действуют соответствующие элементы из $(\overline{g}_{\sigma i} \nu_{si}) h_i$. В любом случае $z_i = y_i$. Из определения следует, что гомоморфизмы между алгебрами из многообразия $\mathfrak{M}$ превращаются в гомоморфизмы алгебр над операдой ΣG_χ. Таким образом, определен функтор $\Psi : \mathfrak{M} \to \mathrm{Alg}(\Sigma G_\chi)$. Легко проверить, что $\Phi\Psi$ — тождественный функтор. Убедимся, что $\Psi\Phi = \mathrm{Id}$. Пусть $A \in \mathrm{Alg}(\Sigma G_\chi)$, $B = \Phi(A)$, $C = \Psi(B)$. Покажем, что $C = A$. Очевидно, эти алгебры совпадают как множества. Пусть $x_1, \dots, x_n \in C = A$, $(\sigma, \overline{g}) \in \Sigma G_\chi$. Рассмотрим композицию $(x_1 \dots x_n)(\sigma, \overline{g})$ в C и покажем, что она совпадает с композицией в A. Так как $x_1 \dots x_n(\sigma, \overline{g}) = (x_1 \dots x_n)(\sigma(\varepsilon_n, \overline{g})) = ((x_1 \dots x_n)\sigma)(\varepsilon_n, \overline{g}) = (x_{\sigma 1} \dots x_{\sigma n})(\varepsilon_n, \overline{g})$, то достаточно рассмотреть случай $g = \varepsilon_n$. При $n = 1, 2$ совпадение $x_1 \dots x_n(\varepsilon_n, \overline{g})$ в C и A проверяется непосредственно. Для $n > 2$ можно провести индукцию, используя то, что в операде ΣG_χ имеет место равенство $(\varepsilon_n, g_1 \dots g_{n-1} g_n) = (\varepsilon_{n-1}, g_1 \dots g_{n-1})(\varepsilon_1, g_n)(\varepsilon_2, 11)$. Для K-линейной операды $K\Sigma G_\chi$ проведенные выше рассуждения модифицируются очевидным образом. □

Пример 3 (продолжение примера 1). В силу $G = \{1\}$ действие моноида на алгебре $A \in \mathrm{Alg}(\Sigma G_\chi)$ вместе с соответствующим свойством вырождается в тождество, и многообразие алгебр над Σ согласно теореме 2 рационально эквивалентно многообразию всех полугрупп (с единицей или без — в зависимости от того, предполагается ли наличие нулевой компоненты в операде). В случае линейной операды $K\Sigma$ соответствующее многообразие рационально эквивалентно многообразию всех ассоциативных K-алгебр.

Пример 4 (продолжение примера 2). Многообразие всех алгебр $\mathrm{Alg}(\mathrm{Oct})$ рационально эквивалентно многообразию всех полугрупп с инволюцией (см. пример 2.1 из [5], с. 278).

Литература

1. Тронин С.Н., Копп О.А. *Матричные линейные операды* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – №. 6. – С. 53–62.
2. Смирнов В.А. *Симплициальные и операдные методы в теории гомотопий.* – М.: Изд-во “Факториал Пресс”, 2002. – 272 с.
3. Ginzburg V., Kapranov M. *Koszul duality for operads* // Duke Math. J. – 1994. – V. 76. – № 1. – P. 203–272.
4. *Operads*: *Proceedings of Renaissance Conferences* / J.-L. Loday, J.D. Stasheff, A.A. Voronov (Eds.) – Contemporary Math., 1997. – V. 202. – 443 p.
5. Kapranov M. *Operads and Algebraic Geometry* // Proc. Int. Congr. Math. Berlin, 1998. August 18–27. V. II: Invited Lectures (Documenta Mathematica. Extra Volume ICM. II. – P. 277–286).
6. Мальцев А.И. *Структурная характеристика некоторых классов алгебр* // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120. – № 1. – С. 29–32.
7. Пинус А.Г. *Инварианты отношения рациональной эквивалентности* // Сиб. матем. журн. – 2000. – Т. 41. – № 2. – С. 430–436

Казанский государственный университет

Поступила 04.06.2002