Известия вузов. Математика
2016, №4, с. 87–99

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

В.Л. ТИМОХОВИЧ, Д.С. ФРОЛОВА

О СВОЙСТВАХ ИНФИМАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ

Аннотация. Изучаются свойства инфимальной топологии $\tau_{\inf}$, являющейся точной нижней гранью семейства всех топологий равномерной сходимости, заданных на множестве $C(X,Y)$ непрерывных отображений в метризуемое пространство Y. В качестве основных результатов получены необходимое и достаточное условие выполнения для топологии $\tau_{\inf}$ условия Фреше–Урысона, а также необходимые и достаточные условия совпадения $\tau_{\inf}$ с некоторой топологией равномерной сходимости τ_μ (“достижения” инфимума). Доказано, что для этого совпадения достаточно, чтобы топология $\tau_{\inf}$ удовлетворяла первой аксиоме счетности.

Ключевые слова: пространство отображений, топология равномерной сходимости, инфимальная топология.

УДК: 515.122

Введение

Пусть X и Y — произвольные топологические T_1-пространства, $C(X,Y)$ — множество всех непрерывных отображений X в Y ($C(X)$ при $Y = \mathbf{R}$), T — частично упорядоченное по включению ($t_1 \leq t_2$, если $t_1 \subset t_2$) семейство всех топологий на $C(X,Y)$. Семейство T является полной решеткой ([1], с. 19), т. е. для любого непустого подсемейства $L \subset T$ определены точные нижняя $\inf L$ и верхняя $\sup L$ грани ($\inf L = \cap\{t \mid t \in L\}$, а топология $\sup L$ задается предбазой $\cup\{t \mid t \in L\}$). Пусть Ω — множество всех допустимых (т. е. задающих топологию) метрик на Y. Если пространство Y метризуемо, т. е. $\Omega \neq \emptyset$, то каждая метрика $\rho \in \Omega$ порождает на $C(X,Y)$ топологию равномерной сходимости τ_μ, заданную метрикой $\mu = \mu(\rho)$,

$$\mu(f,g) = \sup\{\rho(f(x),g(x)) \mid x \in X\}.$$

Здесь допускается $\mu(f,g) = \infty$, что, очевидно, не влияет на определение топологии τ_μ. Тем самым определены семейство T_U всех топологий равномерной сходимости и топологии $\tau_{\inf} = \inf T_U$ (инфимальная) и $\tau_{\sup} = \sup T_U$ (супремальная). Некоторые основные свойства топологии $\tau_{\sup}$ установлены в работах [2]–[4]. Топология $\tau_{\inf}$ исследовалась в [5]–[7]. В предлагаемой статье продолжено рассмотрение топологии $\tau_{\inf}$. В качестве основных результатов при некоторых ограничениях на пространства X и Y получены необходимое и достаточное условие выполнения для топологии $\tau_{\inf}$ условия Фреше–Урысона (теоремы 2.1 и 2.2), а также необходимые и достаточные условия совпадения $\tau_{\inf}$ с некоторой топологией вида τ_μ (“достижения” инфимума, теоремы 3.1 и 3.2). Кроме того, для указанного совпадения достаточно, чтобы топология $\tau_{\inf}$ удовлетворяла первой аксиоме счетности (теорема 4.1).

Поступила 01.09.2014

Пространство, полученное заданием на $C(X,Y)$ топологии $\tau_{\inf}$ при $\Omega \neq \emptyset$, обозначено через $C_{\inf}(X,Y)$.

Обозначения и понятия. Пусть τ и φ — топология пространства X и семейство всех замкнутых в X множеств; τ' и φ' — то же самое для пространства Y. Для произвольных $A \subset X$, $x \in X$, метрики ρ на X (не обязательно допустимой) и $\varepsilon > 0$ обозначим: $\tau(A) = \{U \in \tau \mid A \subset U\}$, $\tau(x) = \tau(\{x\})$, $[A]_X$ или $[A]_\tau$ — замыкание A в X, $\mathrm{int}_X A$ или $\mathrm{int}_\tau A$ — внутренность A в X, $B_\rho(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$, $(\widetilde{X}^\rho, \widetilde{\rho})$ — пополнение метрического пространства (X,ρ). Для обозначения сходимости последовательности $(x_n \mid n \in \mathbf{N}) \subset X$ к точке x относительно топологии τ (метрики ρ) используется запись вида $x_n \underset{\tau}{\longrightarrow} x$ ($x_n \underset{\rho}{\longrightarrow} x$ соответственно). Здесь и далее различаются последовательность $(x_n \mid n \in \mathbf{N})$ (т.е. отображение $\mathbf{N}$ в X) и множество $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, а запись (условная) вида $(x_n \mid n \in \mathbf{N}) \subset X$ означает, что $x_n \in X$ для любого $n \in \mathbf{N}$.

Пространство X называют секвенциальным ([8], с. 94), если соотношение $A \notin \varphi$ влечет существование точки $x \in X \setminus A$ и последовательности $(a_n \mid n \in \mathbf{N}) \subset A$, сходящейся к x. Говорят, что X (топология τ) удовлетворяет условию Фреше–Урысона (или X — пространство Фреше–Урысона ([8], с. 94)), если для любых $A \subset X$ и $x \in [A]_X$ можно выбрать последовательность $(a_n \mid n \in \mathbf{N}) \subset A$, сходящуюся к x.

Семейство α некоторых множеств в X называют дискретным в X, если каждая точка пространства X имеет окрестность, пересекающуюся не более чем с одним элементом α. Множество A будем называть дискретным, если оно дискретно как подпространство. Отметим, что A дискретно и замкнуто в X тогда и только тогда, когда дискретно в X семейство $\{\{a\} \mid a \in A\}$.

Скажем, что X удовлетворяет условию (DFCC) (Discrete Finite Chain Condition ([9], с. 178)), если любое дискретное в X семейство непустых открытых в X множеств конечно. В классе вполне регулярных пространств условие (DFCC) равносильно псевдокомпактности, а в классе нормальных пространств — счетной компактности. Вполне регулярное пространство X называют псевдокомпактным, если ограничена любая функция $f \in C(X)$ ([8], с.310).

Обозначим далее ω_1 — первое несчетное трансфинитное число, $W(\omega_1)$ — вполне упорядоченное множество всех порядковых чисел λ, $0 \leq \lambda < \omega_1$. Отметим, что $W(\omega_1)$ несчетно ([8], с. 25).

1. Предварительные рассмотрения

В этой части пространство Y считаем метризуемым, если речь идет о пространстве $C_{\inf}(X,Y)$ (топологии $\tau_{\inf}$) или о топологиях вида τ_μ (утверждения 1.1–1.5, 1.7 и 1.11). В остальном Y произвольное, если это не оговорено особо.

Утверждение 1.1 ([6])**.** *Пространство $C_{\inf}(X,Y)$ хаусдорфово и секвенциально.*

Утверждение 1.2 ([6])**.** *Пусть $(f_n \mid n \in \mathbf{N}) \subset C(X,Y)$, $f \in C(X,Y)$ и $f_n \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f$. Тогда можно выбрать метрику $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega$, и подпоследовательность отображений f_{n_i}, $n_1 < n_2 < \cdots$, такие, что $f_{n_i} \underset{\mu}{\longrightarrow} f$.*

Утверждение 1.3. *Пусть $(f_n \mid n \in \mathbf{N}) \subset C(X,Y)$, $f \in C(X,Y)$ и $f_n \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f$. Если множество $[f(X)]_Y$ компактно, то $f_n \underset{\mu}{\longrightarrow} f$ для любой метрики $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega$.*

Доказательство. Допустим противное: для некоторых метрики $\mu_0 = \mu(\rho_0)$, $\rho_0 \in \Omega$, подпоследовательности отображений f_{n_k}, $n_1 < n_2 < \cdots$, и $\varepsilon > 0$ при всех $k \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $\mu_0(f, f_{n_k}) \geq \varepsilon$. Выберем точки $x_k \in X$, $k \in \mathbf{N}$, так, чтобы

$$\rho_0(f(x_k), f_{n_k}(x_k)) > \varepsilon/2, \tag{1}$$

и переобозначим $f_{n_k} = g_k$, $f(x_k) = y_k$, $g_k(x_k) = z_k$. В силу компактности $[f(X)]_Y$ и вследствие утверждения 1.2 найдутся метрика $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega$, последовательности $(g_{k_i} \mid i \in \mathbf{N})$ и $(y_{k_i} \mid i \in \mathbf{N})$, $k_1 < k_2 < \cdots$, и точка $\xi \in [f(X)]_Y$ такие, что

$$g_{k_i} \underset{\mu}{\longrightarrow} f \tag{2}$$

и

$$y_{k_i} \underset{\rho}{\longrightarrow} \xi. \tag{3}$$

Сходимость (2) влечет

$$\rho(y_{k_i}, z_{k_i}) \to 0. \tag{4}$$

В совокупности (3) и (4) влекут $z_{k_i} \underset{\rho}{\longrightarrow} \xi$, а следовательно, и

$$z_{k_i} \underset{\rho_0}{\longrightarrow} \xi. \tag{5}$$

Из (3) следует

$$y_{k_i} \underset{\rho_0}{\longrightarrow} \xi, \tag{6}$$

а из (5) и (6) вытекает $\rho_0(y_{k_i}, z_{k_i}) \to 0$, что противоречит неравенствам (1). □

Некоторое представление об устройстве топологии $\tau_{\inf}$ дает следующая конструкция. Каждой метрике $\rho \in \Omega$ поставим в соответствие интервал $I_\rho = (0;1)$ и обозначим $E = \prod(I_\rho \mid \rho \in \Omega)$ (декартово произведение интервалов I_ρ). Для произвольных $f \in C(X,Y)$ и $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho \mid \rho \in \Omega) \in E$ положим $O(f, \overline{\varepsilon}) = \cup\{B_{\mu(\rho)}(f, \varepsilon_\rho) \mid \rho \in \Omega\}$. Роль множеств вида $O(f, \overline{\varepsilon})$ в описании топологии $\tau_{\inf}$ поясняют следующие утверждения.

Утверждение 1.4. *Множество $H \subset C(X,Y)$ открыто в топологии $\tau_{\inf}$ тогда и только тогда, когда для любого $f \in H$ можно выбрать $\overline{\varepsilon} \in E$ так, чтобы $O(f, \overline{\varepsilon}) \subset H$.*

Доказательство следует непосредственно из определения топологии $\tau_{\inf}$.

Утверждение 1.5. *Топология $\tau_{\inf}$ удовлетворяет условию Фреше–Урысона тогда и только тогда, когда $f \in \operatorname{int}_{\tau_{\inf}} O(f, \overline{\varepsilon})$ для любого множества вида $O(f, \overline{\varepsilon})$.*

Доказательство. Пусть $\tau_{\inf}$ удовлетворяет условию Фреше–Урысона. Рассуждая от противного, допустим $f \notin \operatorname{int}_{\tau_{\inf}} O(f, \overline{\varepsilon})$, т.е. $f \in [C(X,Y) \setminus O(f, \overline{\varepsilon})]_{\tau_{\inf}}$ для некоторых $f \in C(X,Y)$ и $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho \mid \rho \in \Omega) \in E$. По условию Фреше–Урысона, а также в силу утверждения 1.2 найдутся метрика $\rho_0 \in \Omega$ и отображения $g_n \in C(X,Y) \setminus O(f, \overline{\varepsilon})$, $n \in \mathbf{N}$, такие, что $g_n \underset{\mu_0}{\longrightarrow} f$, где $\mu_0 = \mu(\rho_0)$. Но тогда с некоторого номера все g_n находятся в множестве $B_{\mu_0}(f, \varepsilon_{\rho_0})$, следовательно, и в $O(f, \overline{\varepsilon})$. Полученное противоречие доказывает *необходимость.*

Докажем *достаточность.* Опять же допустим от противного, что существуют множество $H \subset C(X,Y)$ и отображение $f \in [H]_{\tau_{\inf}}$, к которому не сходится относительно $\tau_{\inf}$ никакая последовательность, содержащаяся в H. Тогда для любой метрики $\rho \in \Omega$ можно подобрать ε_ρ, $0 < \varepsilon_\rho < 1$, так, чтобы $B_{\mu(\rho)}(f, \varepsilon_\rho) \cap H = \emptyset$. Очевидно, $O(f, \overline{\varepsilon}) \cap H = \emptyset$, где $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho \mid \rho \in \Omega)$, что противоречит условию и соотношению $f \in [H]_{\tau_{\inf}}$. □

В дальнейшем понадобятся следующие определения.

Определение 1.1 ([2])**.** Пространство Y назовем локально подвижным в точке $y_0 \in Y$, если для любой ее окрестности $V \in \tau'(y_0)$ найдется отображение $h \in C(Y,Y)$ такое, что $h(V) \subset V$, $h(z) = z$ при $z \in Y \setminus V$ и $h(y_0) \neq y_0$. Y назовем локально подвижным, если оно локально подвижно в каждой своей точке. Очевидно, при этом Y не содержит изолированных точек.

Замечание. О тройке (y_0, V, h) скажем, что она согласована с определением 1.1.

Определение 1.2 ([5])**.** Упорядоченную пару (U, V) открытых в Y множеств назовем отмеченной, если $\emptyset \neq V \subset U$ и для любой упорядоченной пары (x, y) точек множества V найдется отображение $h \in C(Y,Y)$, для которого $h(U) \subset U$, $h(z) = z$ при $z \in Y \setminus U$ и $h(x) = y$. Скажем, что пространство Y локально транзитивно подвижно, если для любых точки $y \in Y$ и ее окрестности $U \in \tau'(y)$ можно подобрать окрестность $V \in \tau'(y)$ так, чтобы пара (U, V) была отмеченной.

Очевидно, любое локально транзитивно подвижное пространство локально подвижно в каждой своей неизолированной точке. Примечательно, что определение 1.2 допускает следующее усиление.

Утверждение 1.6 ([5])**.** *Если пространство Y локально транзитивно подвижно, а непустое множество $F \subset Y$ связно и компактно, то для каждой его окрестности $U \in \tau'(F)$ можно указать окрестность $V \in \tau'(F)$ так, чтобы пара (U, V) была отмеченной.*

Определение 1.3 ([6])**.** Пространство Y назовем локально DC-связанным, если для любой точки $y_0 \in Y$ найдется ее окрестность $V \in \tau'(y_0)$ такая, что каково бы ни было бесконечное дискретное и замкнутое в Y множество $A \subset V$, существует дискретное в Y семейство связных компактных множеств F_n, где $F_n \cap A \neq \emptyset$ и $F_n \cap (Y \setminus V) \neq \emptyset$ при любом $n \in \mathbf{N}$.

Определение 1.4 ([6])**.** Скажем, что упорядоченная пара пространств (X, Y) удовлетворяет условию (T_*), если при любом выборе точки $y_0 \in Y$ и ее окрестности $V \in \tau'(y_0)$ найдется окрестность $W \in \tau'(y_0)$, $W \subset V$, со свойством: для любых точки $z \in W$ и непустого открытого в X множества U существует отображение $h \in C(X, Y)$, для которого $z \in h(U) \subset V$ и $h(x) = y_0$ при $x \in X \setminus U$.

Замечание. О тройке (y_0, V, W) скажем, что она согласована с условием (T_*).

В [6] указано, что условию (T_*) удовлетворяет любая пара (X, Y), где X вполне регулярно, а Y локально линейно связно. И обратно, если пара (X, Y) удовлетворяет условию (T_*), а X линейно связно, то Y локально линейно связно.

Далее опишем тривиальную (в смысле положения $\tau_{\inf}$ в решетке T) ситуацию, когда семейство T_U одноэлементное. Непосредственным следствием известной теоремы Хаусдорфа о продолжении метрики [10] (также [8], с. 439) является

Лемма 1.1. *Пусть семейство непустых замкнутых в метризуемом пространстве Y множеств F_s, $s \in S$, дискретно в Y, и на каждом F_s задана метрика ρ_s, согласованная с индуцированной топологией и удовлетворяющая условию $\rho_s(y, z) \leq 1$, $y, z \in F_s$. Тогда существует метрика $\rho \in \Omega$, удовлетворяющая условию $\rho(y, z) \leq 1$, $y, z \in Y$, и на каждом множестве F_s совпадающая с ρ_s.*

Утверждение 1.7. *Для совпадения всех топологий вида τ_μ достаточно, а если пространство Y локально подвижно в каждой неизолированной точке, то и необходимо, чтобы множество $[f(X)]_Y$ было компактно при любом $f \in C(X, Y)$.*

Доказательство. Достаточность, а также необходимость при локально подвижном Y доказаны в [2]. Докажем необходимость в указанной здесь ситуации. Для этого, рассуждая от противного, достаточно допустить, что существуют отображение $f \in C(X, Y)$ и состоящее из изолированных точек дискретное и замкнутое в Y множество $\{y_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset f(X)$ ($y_n \neq y_k$ при $n \neq k$). Положим $a_n = y_{2n-1}$, $b_n = y_{2n}$, $B_n = \{a_n, b_n\}$. Очевидно, семейство двоеточий $\{B_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ дискретно в Y. Лемма 1.1 позволяет выбрать метрики $\sigma, \sigma_1 \in \Omega$ такие, что $\sigma(a_n, b_n) < 1/n$ и $\sigma_1(a_n, b_n) = 1$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Определим отображения $h_n \in C(Y, Y)$: $h_n(a_n) = b_n$, $h_n(y) = y$ при $y \in Y \setminus \{a_n\}$ и положим $f_n = h_n \circ f$, $\mu = \mu(\sigma)$, $\mu_1 = \mu(\sigma_1)$. Ясно, что $f_n \in C(X, Y)$, $\mu(f, f_n) = 1/n$ и $\mu_1(f, f_n) = 1$ при любом $n \in \mathbf{N}$. Таким образом, $\tau_\mu \neq \tau_{\mu_1}$. Получили противоречие. □

Замечание. В работе [4] в более общем относительно отделимости пространства Y случае получен следующий результат. Если X вполне регулярно, а Y нормально и линейно связно, то эквивалентны условия: (a) $[f(X)]_Y$ счетно компактно для любого $f \in C(X, Y)$; (b) X псевдокомпактно или Y счетно компактно.

В работе [5] рассмотрены метрики определенного вида, возникающие на локально компактных пространствах со счетной базой ([5], теоремы 3.3 и 3.4). Обсудим некоторые их свойства.

Определение 1.5. Метрику ρ на пространстве Y назовем уплотняющей, если она допустима и пополнение $\widetilde{Y}^\rho$ — компакт с одноточечным наростом $\widetilde{Y}^\rho \setminus Y$. Совокупность всех уплотняющих метрик на Y обозначим через Ω_*.

Отметим как очевидное, что если $\Omega_* \neq \emptyset$, то пространство Y не компактно. Следующие два утверждения содержат геометрическую мотивацию введенного здесь термина и топологическую характеристику выделенного таким образом класса пространств.

Утверждение 1.8. *Пусть метризуемое пространство Y не компактно и $\rho \in \Omega$. Метрика ρ уплотняющая тогда и только тогда, когда из любых бесконечных дизъюнктных дискретных и замкнутых в Y множеств A и B можно выбрать последовательности точек $a_n \in A$ и $b_n \in B$, $n \in \mathbf{N}$, так, чтобы $\rho(a_n, b_n) \to 0$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем *достаточность.* Допустим сначала, что метрика ρ не вполне ограничена, т. е. найдутся $\varepsilon > 0$ и точки $y_n \in Y$, $n \in \mathbf{N}$, для которых $\rho(y_n, y_k) \geq \varepsilon$ при $n \neq k$. Положим $a_n = y_{2n-1}$, $b_n = y_{2n}$, $A = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{b_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Множества A и B бесконечны, дизъюнктны, дискретны и замкнуты в Y, но $\rho(a_n, b_k) \geq \varepsilon$ для любых $n, k \in \mathbf{N}$. Получили противоречие. Таким образом, метрика ρ вполне ограничена, а поскольку Y не компактно, то ρ не является полной. Но тогда пополнение $\widetilde{Y}^\rho$ компактно ([8], с. 409) и $\widetilde{Y}^\rho \setminus Y \neq \emptyset$. Допустим теперь, что существуют точки $\xi_1 \in \widetilde{Y}^\rho \setminus Y$, $\xi_2 \in \widetilde{Y}^\rho \setminus Y$ и $\widetilde{\rho}(\xi_1, \xi_2) = \varepsilon > 0$. Это позволяет выбрать последовательности точек $u_n \in Y$ и $v_n \in Y$, $n \in \mathbf{N}$, так, чтобы $u_n \neq u_k$ и $v_n \neq v_k$ при $n \neq k$, $\widetilde{\rho}(\xi_1, u_n) < \varepsilon/n$ и $\widetilde{\rho}(\xi_2, v_n) < \varepsilon/n$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Рассматривая множества $U = \{u_n \mid n \geq 3\}$ и $V = \{v_n \mid n \geq 3\}$, вновь как и выше получаем противоречие. □

Утверждение 1.9 ([5]). *Хаусдорфово не компактное пространство Y допускает уплотняющую метрику тогда и только тогда, когда Y локально компактно и со счетной базой.*

Лемма 1.2. *Пусть Y — метризуемое локально компактное пространство со счетной базой, $y_n, z_n \in Y$, $n \in \mathbf{N}$, $\rho_0 \in \Omega$ и $\rho_0(y_n, z_n) \to 0$. Тогда*

a) *если Y компактно, то $\rho(y_n, z_n) \to 0$ для любой метрики $\rho \in \Omega$;*

b) *если Y не компактно, то $\rho(y_n, z_n) \to 0$ для любой метрики $\rho \in \Omega_*$ ($\Omega_* \neq \emptyset$ по утверждению 1.9).*

Доказательство. Допустим противное: $\rho(y_{n_k}, z_{n_k}) \geq \varepsilon$ для некоторых $\varepsilon > 0$ и последовательности номеров n_k, $n_1 < n_2 < \cdots$ ($\rho \in \Omega$ в случае a), $\rho \in \Omega_*$ в случае b)). Переобозначим $y_{n_k} = a_k$, $z_{n_k} = b_k$, $k \in \mathbf{N}$. В случае a) можно выбрать точку $\xi \in Y$ и подпоследовательность $(a_{k_i} \mid i \in \mathbf{N})$, $k_1 < k_2 < \cdots$, так, чтобы $a_{k_i} \underset{\tau'}{\longrightarrow} \xi$. Но тогда в силу сходимости $\rho_0(a_k, b_k) \to 0$ имеет место и сходимость $b_{k_i} \underset{\tau'}{\longrightarrow} \xi$, что противоречит неравенствам $\rho(a_k, b_k) \geq \varepsilon, k \in \mathbf{N}$. В случае b) достаточно рассмотреть ситуацию, когда сходящаяся в Y подпоследовательность не выделяется ни из $(a_k \mid k \in \mathbf{N})$, ни из $(b_k \mid k \in \mathbf{N})$ (в противном случае рассуждения те же, что и для a)). Вследствие компактности пополнения $\widetilde{Y}^\rho$ можно указать подпоследовательности $(a_{k_i} \mid i \in \mathbf{N})$ и $(b_{k_i} \mid i \in \mathbf{N})$, $k_1 < k_2 < \cdots$, такие, что $\widetilde{\rho}(\xi, a_{k_i}) \to 0$ и $\widetilde{\rho}(\xi, b_{k_i}) \to 0$, где $\{\xi\} = \widetilde{Y}^\rho \setminus Y$, что вновь противоречит неравенствам $\rho(a_k, b_k) \geq \varepsilon$. □

Утверждение 1.10 (дополняет утверждение 1.3)**.** *Пусть* $\Omega_* \neq \emptyset$, $(f_n \mid n \in \mathbf{N}) \subset C(X, Y)$, $f \in C(X, Y)$ *и* $f_n \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f$. *Тогда* $f_n \underset{\mu_*}{\longrightarrow} f$ *для любой метрики* $\mu_* = \mu(\rho_*)$, *где* $\rho_* \in \Omega_*$.

Доказательство Рассуждая от противного, допустим, что $\mu_*(f, f_{n_k}) \geq \varepsilon$ для некоторых $\varepsilon > 0$, $\mu_* = \mu(\rho_*)$, где $\rho_* \in \Omega_*$, и номеров $n_1 < n_2 < \cdots$. Выберем точки $x_k \in X$ так, чтобы $\rho_*(f(x_k), f_{n_k}(x_k)) > \varepsilon/2$ при любом $k \in \mathbf{N}$, и переобозначим $f_{n_k} = g_k$, $f(x_k) = y_k$, $g_k(x_k) = z_k$. В силу утверждения 1.2 можно указать метрику $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega$, и последовательность номеров k_i, $k_1 < k_2 < \cdots$, таким образом, что $\mu(f, g_{k_i}) \to 0$. Но тогда $\rho(y_{k_i}, z_{k_i}) \to 0$, а следовательно, и $\rho_*(y_{k_i}, z_{k_i}) \to 0$ (по лемме 1.2), что противоречит неравенствам

$$\rho_*(y_k, z_k) > \varepsilon/2. \qquad \square$$

В силу секвенциальности $C_{\inf}(X, Y)$ (утверждение 1.1) как простое следствие из утверждений 1.9 и 1.10 получается

Теорема 1.1 ([5])**.** *Если метризуемое некомпактное пространство* Y *локально компактно и со счетной базой, то* $\tau_{\inf} = \tau_{\mu_*}$ *для любой метрики* $\mu_* = \mu(\rho_*)$, *где* $\rho_* \in \Omega_*$ ($\Omega_* \neq \emptyset$ *по утверждению* 1.9).

Сказанное выше (определение 1.5 и далее) дополним известной теоремой Александрова–Урысона о метризуемости локально компактного пространства.

Теорема 1.2 ([11], с. 107)**.** *Локально компактное хаусдорфово пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно представимо в виде дизъюнктного объединения открыто-замкнутых подпространств, имеющих счетную базу.*

Завершим эту часть установлением связи между сходимостью последовательности в $C_{\inf}(X, Y)$ и ее непрерывной сходимостью в смысле Аренса–Дугунджи.

Определение 1.6 (в [12] для направленности, понятия более общего, чем последовательность)**.** Говорят, что последовательность $(f_n \mid n \in \mathbf{N}) \subset C(X, Y)$ непрерывно сходится к $f \in C(X, Y)$ (кратко $f_n \underset{(c)}{\longrightarrow} f$), если для любых $x \in X$ и окрестности $V \in \tau'(f(x))$ найдутся окрестность $U \in \tau(x)$ и $m \in \mathbf{N}$ такие, что $\cup\{f_n(U) \mid n \geq m\} \subset V$. (Задания топологии на $C(X, Y)$ не требуется!)

Утверждение 1.11. *Если* $(f_n \mid n \in \mathbf{N}) \subset C(X, Y)$, $f \in C(X, Y)$ *и* $f_n \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f$, *то и* $f_n \underset{(c)}{\longrightarrow} f$.

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что существуют такие $x_0 \in X$ и $V \in \tau'(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, что при любом выборе $U \in \tau(x_0)$ и $m \in \mathbf{N}$ найдется $n \geq m$, для которого $f_n(U) \not\subset V$. Фиксируем некоторую метрику $\rho_0 \in \Omega$. Используя допущение, выберем окрестности $U_k \in \tau(x_0)$, $k \in \mathbf{N}$, и последовательность номеров n_k, $n_1 < n_2 < \cdots$, так, чтобы $f(U_k) \subset B_{\rho_0}(y_0, 1/k)$, но $f_{n_k}(U) \not\subset V$ для каждого $k \in \mathbf{N}$. Фиксируем точки $x_k \in U_k$, для которых $f_{n_k}(x_k) \notin V$, и переобозначим $f_{n_k} = g_k$, $f(x_k) = y_k$, $g_k(x_k) = z_k$. В силу утверждения 1.2 найдутся подпоследовательность $(g_{k_i} \mid i \in \mathbf{N})$, $k_1 < k_2 < \cdots$, и метрика $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega$, такие, что $\mu(f, g_{k_i}) \to 0$. Отметим, что $\rho_0(y_0, y_k) < 1/k$, и, следовательно, $\rho(y_0, y_k) \to 0$. Кроме того, $\rho(y_{k_i}, z_{k_i}) \to 0$. Таким образом, $\rho(y_0, z_{k_i}) \le \rho(y_0, y_{k_i}) + \rho(y_{k_i}, z_{k_i}) \to 0$, что противоречит соотношению $\{z_k \mid k \in \mathbf{N}\} \subset Y \setminus V$. □

Определение 1.7. Открытое покрытие $\{X_n^s \mid s \in S, n \in \mathbf{N}\}$ пространства X назовем σ-разбиением, если множества $\cup\{X_n^s \mid n \in \mathbf{N}\}$ и $\cup\{X_n^t \mid n \in \mathbf{N}\}$ дизъюнктны при $s \neq t$. Если при этом $X_1^s \subset X_2^s \subset \dots$ для любого $s \in S$, то σ-разбиение назовем монотонным.

Понятия монотонного σ-разбиения пространства X и непрерывной сходимости в $C(X,Y)$ можно связать следующим образом. Пусть $\{H_s \mid s \in S\}$ — дизъюнктное семейство непустых открытых в Y множеств, $(f_n \mid n \in \mathbf{N}) \subset C(X,Y)$, $f \in C(X,Y)$, $f_n \xrightarrow[(c)]{} f$ и $f(X) \subset \cup\{H_s \mid s \in S\}$. Обозначим через X_n^s множество всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию: существует окрестность $U \in \tau(x)$, для которой

$$f(U) \cup (\cup\{f_k(U) \mid k \geq n\}) \subset H_s.$$

Утверждение 1.12. *Семейство $\{X_n^s \mid s \in S, n \in \mathbf{N}\}$ является монотонным σ-разбиением пространства X, причем, если каждое множество H_s открыто-замкнуто в Y, то и все множества X_n^s открыто-замкнуты в X.*

Доказательство. Нуждается в проверке лишь открыто-замкнутость множеств X_n^s. Допустим противное: $x \in [X_n^s]_X \setminus X_n^s$ для некоторых $s \in S$, $n \in \mathbf{N}$ и $x \in X$. Соотношение $x \in X_k^t$, $t \neq s$, невозможно, поскольку $X_k^t \cap X_n^s = \emptyset$, откуда $x \in X_m^s$, где $m > n$, $m = \min\{k \mid x \in X_k^s\}$. Так как $f_{m-1}(X_{m-1}^s) \subset H_s$ и, следовательно, $f_{m-1}([X_{m-1}^s]_X) \subset [H_s]_Y = H_s$, то

$$f_{m-1}(x) \in f_{m-1}([X_n^s]_X) \subset f_{m-1}([X_{m-1}^s]_X) \subset H_s.$$

Но тогда $f_{m-1}(U) \subset H_s$ для некоторой окрестности $U \in \tau(x)$, и поэтому $x \in X_{m-1}^s$. Пришли к противоречию. □

2. Топология τ_{inf} и условие Фреше–Урысона

Далее считаем, что X не удовлетворяет условию (DFCC) (т. е. существует бесконечное дискретное в X семейство непустых открытых в X множеств), а метризуемое пространство Y некомпактно (в противном случае семейство T_U одноэлементно, см. утверждение 1.7).

Теорема 2.1. *Пусть Y локально DC-связано и локально транзитивно подвижно, а пара (X,Y) удовлетворяет условию (T_*). Если при этом топология τ_{inf} удовлетворяет условию Фреше–Урысона, то пространство Y локально компактно.*

Доказательство. Фиксируем дискретное в X семейство $\{\emptyset \neq U_k \in \tau \mid k \in \mathbf{N}\}$ и некоторую метрику $\rho \in \Omega$. Будем считать, что $\rho(y,z) \leq 1$, $y,z \in Y$. Рассуждая от противного, допустим, что существует точка $y_0 \in Y$, замыкание любой окрестности которой некомпактно, а следовательно, любая окрестность $V \in \tau'(y_0)$ содержит бесконечное дискретное и замкнутое в Y множество. Выберем окрестность $V \in \tau'(y_0)$, указанную в определении 1.3. Для произвольного $n \in \mathbf{N}$ фиксируем шар $B_\rho(y_0, \varepsilon_n) \subset V$, $0 < \varepsilon_n \leq 1/n$, и окрестность $W_n \in \tau'(y_0)$, $W_n \subset B_\rho(y_0, \varepsilon_n)$, так, чтобы тройка $(y_0, B_\rho(y_0, \varepsilon_n), W_n)$ была согласована с (T_*) (см. замечание к определению 1.4), а также бесконечное дискретное и замкнутое в Y

множество $A_n \subset W_n \setminus \{y_0\}$. Затем выберем дискретное и замкнутое в Y семейство связных компактных множеств $\{F_k^n \mid k \in \mathbf{N}\}$, точки $y_k^n \in F_k^n \cap A_n$ и $z_k^n \in F_k^n \cap (Y \setminus V)$ (см. определение 1.3) и отображения $h_k^n \in C(X,Y)$, $y_k^n \in h_k^n(U_k) \subset B_\rho(y_0, \varepsilon_n)$, $h_k^n(x) = y_0$ при $x \in X \setminus U_k$ (см. определение 1.4). Определим отображения $f_n \in C(X,Y)$, $n \in \mathbf{N}$, и $f_0 \in C(X,Y)$: $f_0(X) = \{y_0\}$, $f_n(x) = h_k^n(x)$ при $x \in U_k$ и $f_n(x) = y_0$ при $x \in X \setminus \cup\{U_k \mid k \in \mathbf{N}\}$. Очевидно, что $f_n \underset{\mu}{\longrightarrow} f_0$, где $\mu = \mu(\rho)$, и, следовательно, $f_n \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f_0$. Пользуясь коллективной нормальностью пространства Y ([8], с. 452), каждое семейство $\{F_k^n \mid k \in \mathbf{N}\}$ раздуем до дискретного в Y семейства $\{H_k^n \mid k \in \mathbf{N}\}$, где $H_k^n \in \tau'(F_k^n)$, $k \in \mathbf{N}$, и подберем окрестности $G_k^n \in \tau'(F_k^n)$ так, чтобы пара (H_k^n, G_k^n) была отмеченной (см. утверждение 1.6). Последнее влечет существование отображений $\varphi_k^n \in C(Y,Y)$, для которых $\varphi_k^n(H_k^n) \subset H_k^n$, $\varphi_k^n(y_k^n) = z_k^n$ и $\varphi_k^n(y) = y$ при $y \in Y \setminus H_k^n$. Для произвольных $n, k \in \mathbf{N}$ положим $g_k^n = \varphi_k^n \circ f_n$. Для произвольного фиксированного $n \in \mathbf{N}$ рассмотрим дискретное в Y семейство множеств $[H_k^n]_Y$, $k \in \mathbf{N}$, с заданной на каждом $[H_k^n]_Y$ метрикой $\rho_k = \frac{\rho}{k+1}$, и применив лемму 1.1, получим метрику $\sigma_n \in \Omega$, для которой $\sigma_n(y,z) < 1/k$ при $\{y,z\} \subset [H_k^n]_Y$. Пусть $\mu_n = \mu(\sigma_n)$. Поскольку $\mu_n(f_n, g_k^n) \leq 1/k$, то $g_k^n \underset{\mu_n}{\longrightarrow} f_n$ (при $k \to \infty$) и, следовательно, $g_k^n \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f_n$ для любого фиксированного $n \in \mathbf{N}$. Таким образом, $f_0 \in [\{g_k^n \mid n, k \in \mathbf{N}\}]_{\tau_{\inf}}$. В силу условия Фреше–Урысона, компактности (относительно $\tau_{\inf}$) множеств $\{g_k^n \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{f_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, и вследствие утверждения 1.2 существуют последовательность $(g_{k_i}^{n_i} \mid i \in \mathbf{N})$, $n_1 < n_2 < \cdots$, и метрика $\mu_0 = \mu(\rho_0)$, $\rho_0 \in \Omega$, такие, что $g_{k_i}^{n_i} \underset{\mu_0}{\longrightarrow} f_0$. Но тогда $z_{k_i}^{n_i} \underset{\rho_0}{\longrightarrow} y_0$, что противоречит соотношению $\{z_k^n \mid n, k \in \mathbf{N}\} \subset Y \setminus V$. □

Отметим в качестве простого примера к теореме 2.1, что при $X = \mathbf{R}$, $Y = C[0;1]$ (с топологией, заданной метрикой $\mu(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| \mid 0 \leq x \leq 1\}$) пространство $C_{\inf}(X,Y)$ не удовлетворяет условию Фреше-Урысона. Действительно, как несложно проверить, Y локально DC-связано и локально транзитивно подвижно, а пара (X,Y) удовлетворяет условию (T_*), однако Y не является локально компактным.

Утверждение 2.1. *Если пространство Y локально компактно и каждое множество $f(X)$, где $f \in C(X,Y)$, имеет счетную базу (как подпространство в Y), то топология $\tau_{\inf}$ удовлетворяет условию Фреше–Урысона.*

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что можно выбрать $A \subset C(X,Y)$ и $f \in [A]_{\tau_{\inf}} \setminus A$ так, чтобы к f не сходилась относительно $\tau_{\inf}$ никакая последовательность, содержащаяся в A. Обозначим через B множество всех $h \in C(X,Y)$ таких, что к h сходится относительно $\tau_{\inf}$ некоторая последовательность, содержащаяся в A. Очевидно, $A \subset B \subset [A]_{\tau_{\inf}}$, но $B \not\ni f$, откуда B не замкнуто в $C_{\inf}(X,Y)$. В силу секвенциальности $C_{\inf}(X,Y)$ (см. утверждение 1.1) и устройства множества B можно выбрать $f_0 \in C(X,Y) \setminus B$ и последовательности $(f_n \mid n \in \mathbf{N}) \subset B$, $(g_k^n \mid k \in \mathbf{N}) \subset A$, $n \in \mathbf{N}$, так, чтобы $f_n \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f_0$ и $g_k^n \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f_n$ при любом фиксированном $n \in \mathbf{N}$. Вследствие теоремы 1.2 существует открыто-замкнутое в Y и имеющее счетную базу подпространство

$$H \supset f_0(X) \cup (\cup\{f_n(X) \mid n \in \mathbf{N}\}) \cup (\cup\{g_k^n(X) \mid n,\, k \in \mathbf{N}\}).$$

В случае компактного H фиксируем любую метрику $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega$. Если же H некомпактно, то выберем ту метрику $\rho \in \Omega$, которая является уплотняющей на H (см. лемму 1.1 и утверждение 1.9), и положим $\mu = \mu(\rho)$. В обоих случаях (см. утверждения 1.3 и 1.10) получаем соотношения $f_n \underset{\mu}{\longrightarrow} f_0$ и $g_k^n \underset{\mu}{\longrightarrow} f_n$ ($n \in \mathbf{N}$ фиксировано, $k \to \infty$). Тогда можно выбрать последовательность $(g_{k_i}^{n_i} \mid i \in \mathbf{N})$, $n_1 < n_2 < \cdots$, так, чтобы $g_{k_i}^{n_i} \underset{\mu}{\longrightarrow} f_0$, а следовательно, $g_{k_i}^{n_i} \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f_0$, что противоречит соотношению $f_0 \notin B$. □

Определение 2.1. Дискретным разбиением пространства X назовем любое его дизъюнктное покрытие γ, состоящее из непустых открыто-замкнутых множеств. Задавая на множестве γ фактор-топологию, получаем некоторое дискретное пространство. Далее будем говорить, что пространство X имеет конечную (не более чем счетную) дискретную факторизуемость (кратко D-факторизуемость), если любое его дискретное разбиение конечно (не более чем счетно соответственно).

Замечание. Семейство квазикомпонент (и тем более связных компонент) пространства с конечной D-факторизуемостью может быть даже несчетным. Примером служит пространство $W = \{\omega_1\} \cup W(\omega_1)$ с порядковой тоопологией. Пространство W компактно ([8], с.205), следовательно, имеет конечную D-факторизуемость. В то же время оно несчетно и все его связные компоненты (они же квазикомпоненты) одноточечные. Пространства с конечной D-факторизуемостью рассматривались в [13] (названы там mildly countably compact) наряду с пространствами (mildly compact, mildly Lindelöf), образующими классы более широкие, чем классы счетно компактных, компактных и линделефовых пространств соответственно.

Из теоремы 1.2 и наличия в пространстве Y σ-дискретной базы ([8], с.416) достаточно просто вытекает

Лемма 2.1. *Если пространство Y локально компактно, то необходимым, а если Y несчетного веса, то достаточным условием не более чем счетной D-факторизуемости пространства X является наличие счетной базы в любом подпространстве вида $f(X)$, где $f \in C(X, Y)$.*

Как указано в теореме 2.1, необходимым условием, чтобы $C_{\inf}(X, Y)$ было пространством Фреше–Урысона, является (при приведенных там ограничениях на X и Y) локальная компактность пространства Y. Это же условие оказывается (опять же при некотором ограничении на X) и достаточным, что непосредственно вытекает из утверждения 2.1 и леммы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть D-факторизуемость пространства X не более чем счетна. Если при этом пространство Y локально компактно, то топология $\tau_{\inf}$ удовлетворяет условию Фреше–Урысона.*

3. Случай совпадения $\tau_{\inf} = \tau_\mu$

Утверждение 3.1 (дополняет теорему 1.1). *Если пространство X имеет конечную D-факторизуемость, а Y локально компактно, то $\tau_{\inf} = \tau_\mu$ для некоторой метрики $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2 пространство Y представимо в виде объединения дизъюнктного семейства γ непустых и некомпактных открыто-замкнутых подпространств, имеющих счетную базу. Утверждение 1.9 позволяет выбрать метрику $\rho \in \Omega$, которая на каждом множестве $H \in \gamma$ является уплотняющей. Покажем, что $\tau_{\inf} = \tau_\mu$, где $\mu = \mu(\rho)$. Вследствие секвенциальности $C_{\inf}(X, Y)$ (см. утверждение 1.1) достаточно проверить, что из $f_n \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f$ всякий раз следует $f_n \underset{\mu}{\longrightarrow} f$. Если допустить противное, то можно указать $f_n \in C(X, Y)$, $n \in \mathbf{N}$, и $f \in C(X, Y)$ такие, что $f_n \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f$, но $\rho(f(x_n), f_n(x_n)) \geq \varepsilon$ для некоторых $\varepsilon > 0$ и последовательности точек $x_n \in X$, $n \in \mathbf{N}$. Поскольку X имеет конечную D-факторизуемость, то $f(X) \subset H_1 \cup \cdots \cup H_n$, где $H_i \in \gamma$ и $H_i \cap f(X) \neq \emptyset$ для любого i, $1 \leq i \leq n$. Определим множества X_k^i, $1 \leq i \leq n$, $k \in \mathbf{N}$, как указано в построении, предваряющем утверждение 1.12 (полагаем $S = \{1, \ldots, n\}$). Получим монотонное σ-разбиение $\{X_k^i \mid 1 \leq i \leq n,\ k \in \mathbf{N}\}$ пространства X, причем все множества X_k^i открыто-замкнуты в X (см. утверждение 1.12) и $\cup\{X_k^i \mid k \in \mathbf{N}\} \neq \emptyset$ для каждого i, $1 \leq i \leq n$. Легко заметить, что вследствие конечной D-факторизуемости $X = X_m^1 \cup \cdots \cup X_m^n$ для некоторого $m \in \mathbf{N}$. Подберем j, $1 \leq j \leq n$, при котором X_m^j содержит подпоследовательность $(x_{n_k} \mid k \in \mathbf{N})$, $m \leq n_1 < n_2 < \cdots$, и переобозначим $f_{n_k} = g_k$, $f(x_{n_k}) = y_k$, $g_k(x_{n_k}) = z_k$. Заметим, что $\{y_k \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{z_k \mid k \in \mathbf{N}\} \subset H_j$. В силу утверждения 1.2 найдутся метрика $\mu_0 = \mu(\rho_0)$, $\rho_0 \in \Omega$, и последовательность $(g_{k_i} \mid i \in \mathbf{N})$, $k_1 < k_2 < \cdots$, такие, что $g_{k_i} \underset{\mu_0}{\longrightarrow} f$. Тогда $\rho_0(y_{k_i}, z_{k_i}) \to 0$, а вследствие леммы 1.2 и $\rho(y_{k_i}, z_{k_i}) \to 0$, что противоречит неравенствам

$$\rho(y_k, z_k) \geq \varepsilon. \qquad \square$$

Утверждение 3.2. *Если пространство X допускает счетное дискретное разбиение, а $\tau_{\inf} = \tau_\mu$, где $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega$, то Y локально компактно, со счетной базой и $\rho \in \Omega_*$.*

Доказательство. Воспользуемся утверждением 1.8. Пусть множества $A = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ и $B = \{b_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ дизъюнктны, дискретны и замкнуты в Y, $a_n \neq a_k$ и $b_n \neq b_k$ при $n \neq k$, $\{X_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ – дискретное разбиение пространства X ($X_n \cap X_k = \emptyset$ при $n \neq k$). Определим отображения $f_n \in C(X,Y)$, $n \in \mathbf{N}$, и $f \in C(X,Y)$, полагая $f(X_k) = \{a_k\}$, $f_n(X_k) = \{a_k\}$ при $k < n$ и $f_n(X_k) = \{b_k\}$ при $k \geq n$. Далее, пользуясь леммой 1.1, выберем метрику $\sigma \in \Omega$, для которой $\sigma(a_k, b_k) = 1/k$, $k \in \mathbf{N}$, и обозначим $\mu_0 = \mu(\sigma)$. Поскольку $\mu_0(f, f_n) = 1/n$, то $f_n \underset{\mu_0}{\longrightarrow} f$ и, следовательно, $f_n \underset{\tau_{\inf}}{\longrightarrow} f$. Тогда $f_n \underset{\mu}{\longrightarrow} f$, откуда $\rho(a_n, b_n) \to 0$. В силу утверждений 1.8 и 1.9 $\rho \in \Omega_*$, а пространство Y локально компактно и со счетной базой. $\square$

Теорема 1.1 и утверждение 3.1 позволяют сформулировать достаточные, а теорема 2.1 и утверждение 3.2 — необходимые (при ограничениях на X и Y) условия совпадения $\tau_{\inf}$ с топологией вида τ_μ (“достижения” инфимума).

Теорема 3.1. *Топология $\tau_{\inf}$ совпадает с топологией τ_μ, $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega$, если Y локально компактно и выполняется хотя бы одно из условий*:
a) *X имеет конечную D-факторизуемость*;
b) *Y имеет счетную базу.*

Теорема 3.2. *Пусть пространство Y локально DC-связано и локально транзитивно подвижно, а пара (X,Y) удовлетворяет условию (T_*). Если при этом $\tau_{\inf} = \tau_\mu$ для некоторой метрики $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega$, то Y локально компактно и выполняется хотя бы одно из условий*:
a) *X имеет конечную D-факторизуемость,*
b) *Y имеет счетную базу.*

Отметим, что теоремы 3.1 и 3.2 существенно дополняют результаты, полученные в этом направлении ранее ([5], теоремы 3.3 и 3.4; также [7], теорема 4.1). Простой пример к теореме 3.2 можно получить, полагая $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{Q}$. Все топологии вида τ_μ совпадают (инфимум достигается тривиальным образом), но пространство Y не локально компактно (хотя оба условия a) и b) выполняются). Очевидно, что из указанных ограничений на X и Y выполняется лишь условие локальной транзитивной подвижности пространства Y.

4. Топология $\tau_{\inf}$ и первая аксиома счетности

Введем следующие обозначения. Для произвольных $x\in X$, $y\in Y$, $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho \mid \rho \in \Omega) \in E$ и $\emptyset \neq L \subset C(X,Y)$ положим $U(y,\overline{\varepsilon}) = \cup\{B_\rho(y,\varepsilon_\rho) \mid \rho \in \Omega\}$, $L|_x = \{f(x) \mid f \in L\}$ (вертикальное сечение множества L). Отметим, что $O(f,\overline{\varepsilon})|_x \subset U(f(x),\overline{\varepsilon})$, но соотношение $f(x) \in \operatorname{int}_Y(O(f,\overline{\varepsilon})|_x)$ может не выполняться (например, $X = \mathbf{R}$, $Y = (\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\cup(\{0\}\times\mathbf{R})$, $f(x) = (0,x)$, $x \in \mathbf{R}$).

Утверждение 4.1. *Если топология $\tau_{\inf}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, то выполняется хотя бы одно из условий*: a) *D-факторизуемость пространства X конечна*; b) *D-факторизуемость пространства Y не более чем счетна.*

Доказательство. Допустим противное: X и Y представимы в виде объединения дизъюнктных семейств $\{X_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \tau \setminus \{\emptyset\}$ и $\{Y_\lambda \mid \lambda \in W(\omega_1)\} \subset \tau' \setminus \{\emptyset\}$ соответственно, и при этом Y_0 содержит дискретное и замкнутое в Y множество $\{y_k \mid k \in \mathbf{N}\}$ ($y_n \neq y_k$ при $n \neq k$). В каждом множестве Y_λ, $1 \le \lambda < \omega_1$, фиксируем некоторую точку z_λ и подберем $\overline{\delta}_\lambda = (\delta^\lambda_\rho \mid \rho \in \Omega) \in E$ так, чтобы $U(z_\lambda,\overline{\delta}_\lambda) \subset Y_\lambda$. Зададим отображение $f \in C(X,Y)$, полагая $f(X_k) = \{y_k\}$, $k \in \mathbf{N}$. Пусть $\{H_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ — локальная база для f в топологии $\tau_{\inf}$. В силу утверждения 1.5 каждому λ, $1 \le \lambda < \omega_1$, можно поставить в соответствие номер $n(\lambda)$, для которого $H_{n(\lambda)} \subset O(f,\overline{\delta}_\lambda)$. Очевидно, найдутся $m \in \mathbf{N}$ и $\lambda_n \in W(\omega_1)$, $1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, такие, что $m = n(\lambda_1) = n(\lambda_2) = \cdots$. Переобозначив $Y_{\lambda_n} = G_n$, $z_{\lambda_n} = p_n$, $\overline{\delta}_{\lambda_n} = \overline{\varepsilon}_n$, $\overline{\varepsilon}_n = (\varepsilon^n_\rho \mid \rho \in \Omega)$, получаем справедливые при любом $n \in \mathbf{N}$ соотношения $H_m \subset O(f,\overline{\varepsilon}_n)$, $U(p_n,\overline{\varepsilon}_n) \subset G_n$. Зададим отображения $f_n \in C(X,Y)$, полагая $f_n(X_k) = \{p_k\}$ при $k \ge n$ и $f_n(X_k) = \{y_k\}$ при $k < n$, $n \in \mathbf{N}$. Лемма 1.1 позволяет выбрать метрику $\sigma \in \Omega$, для которой $\sigma(y_k,p_k) = 1/k$, $k \in \mathbf{N}$, откуда $\mu(\sigma)(f,f_n) = 1/n$, и, следовательно, $f_n \xrightarrow[\tau_{\inf}]{} f$. Фиксируем некоторые $f_i \in H_m$, $x \in X_i$. Используя вертикальное сечение для соотношения $f_i \in H_m \subset O(f,\overline{\varepsilon}_i)$, получим

$$p_i = f_i(x) \in O(f,\overline{\varepsilon}_i)|_x \subset U(f(x),\overline{\varepsilon}_i) = U(y_i,\overline{\varepsilon}_i),$$

т. е. $p_i \in U(y_i,\overline{\varepsilon}_i)$. Тогда $U(p_i,\overline{\varepsilon}_i) \ni y_i$, что противоречит дизъюнктивности G_i и Y_0. $\square$

Отметим в качестве примера, что при $X = \mathbf{Q}$, $Y = D \times \mathbf{R}$, где пространство D несчетно и дискретно, $C_{\inf}(X,Y)$ является пространством Фреше–Урысона (следует из теоремы 2.2), но не удовлетворяет первой аксиоме счетности (следует из утверждения 4.1).

Применяя теорему 2.1 и утверждение 4.1, затем теоремы 3.1 и 1.2, получаем, что справедлива

Теорема 4.1. *Пусть пространство Y локально DC-связано и локально транзитивно подвижно, а пара (X,Y) удовлетворяет (T_*). Если при этом топология $\tau_{\inf}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, то $\tau_{\inf} = \tau_\mu$ для некоторой метрики $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega$.*

Завершает эту часть

Теорема 4.2. *Если пространство Y локально подвижно в каждой своей неизолированной точке и при этом топология $\tau_{\inf}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, то для любого $f \in C(X,Y)$ множество $[f(X)]_Y$ имеет счетную базу (как подпространство в Y).*

Доказательство. Допустим от противного, что для некоторого $f \in C(X,Y)$ множество $[f(X)]_Y$ не имеет счетной базы. Наличие в $[f(X)]_Y$ σ-дискретной базы ([8], с.416) влечет существование несчетного дискретного и замкнутого в Y множества $D \subset f(X)$. Пусть

$\{H_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ — локальная база для f в $C_{\inf}(X,Y)$. Подберем (см. утверждение 1.4) множества $O(f,\overline{\varepsilon}_n)$, $\overline{\varepsilon}_n = (\varepsilon^n_\rho \mid \rho \in \Omega) \in E$ так, чтобы $O(f,\overline{\varepsilon}_n) \subset H_n$, $n \in \mathbf{N}$. Далее достаточно рассмотреть два случая устройства множества D: (A) $D = \{y_\lambda \mid \lambda \in W(\omega_1)\}$ ($y_\lambda \neq y_{\lambda'}$ при $\lambda \neq \lambda'$) и все точки D неизолированные; (B) $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 = \{y_\lambda \mid \lambda \in W(\omega_1)\}$, $D_2 = \{z_\lambda \mid \lambda \in W(\omega_1)\}$ ($y_\lambda \neq y_{\lambda'}$ и $z_\lambda \neq z_{\lambda'}$ при $\lambda \neq \lambda'$) и все точки D_1 изолированные. В случае (A) для каждого $\lambda \in W(\omega_1)$ выберем окрестность $V_\lambda \in \tau'(y_\lambda)$ и отображение $h_\lambda \in C(Y,Y)$ так, чтобы семейство $\{V_\lambda \mid \lambda \in W(\omega_1)\}$ было дискретно в Y и каждая тройка $(y_\lambda, V_\lambda, h_\lambda)$ была согласована с определением 1.1 (см. замечание к определению 1.1). Кроме того, обозначим $z_\lambda = h_\lambda(y_\lambda)$, $F_\lambda = [V_\lambda]_Y$ и подберем сначала $\overline{\delta}_\lambda = (\delta^\lambda_\rho \mid \rho \in \Omega) \in E$, при котором $U(y_\lambda, \overline{\delta}_\lambda) \subset V_\lambda \setminus \{z_\lambda\}$, затем, используя утверждение 1.5, $n(\lambda) \in \mathbf{N}$, для которого $O(f,\overline{\varepsilon}_{n(\lambda)}) \subset O(f,\overline{\delta}_\lambda)$. В случае (B) для любого $\lambda \in W(\omega_1)$ положим $F_\lambda = \{y_\lambda, z_\lambda\}$, $h_\lambda(y_\lambda) = z_\lambda$ и $h_\lambda(y) = y$ при $y \in Y \setminus \{y_\lambda\}$, и выберем $\overline{\delta}_\lambda \in E$ и $n(\lambda) \in \mathbf{N}$ так, чтобы $U(y_\lambda, \overline{\delta}_\lambda) = \{y_\lambda\}$ и $O(f,\overline{\varepsilon}_{n(\lambda)}) \subset O(f,\overline{\delta}_\lambda)$. Далее проведем рассуждение, общее для обоих случаев. Очевидно, что можно указать $m \in \mathbf{N}$ и порядковые числа $\lambda_k \in W(\omega_1)$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, так, что $m = n(\lambda_1) = n(\lambda_2) = \cdots$. Применяя лемму 1.1, выберем метрику $\sigma \in \Omega$, для которой $\sigma(y,z) < 1/k$ при $\{y,z\} \subset F_{\lambda_k}$, и положим $f_k = h_{\lambda_k} \circ f$, $k \in \mathbf{N}$, $\mu = \mu(\sigma)$. Очевидно, $\mu(f,f_k) \le \frac{1}{k}$ и, следовательно, с некоторого номера все f_k лежат в $B_\mu(f,\varepsilon^m_\sigma)$. Цепочка соотношений

$$f_k \in B_\mu(f,\varepsilon^m_\sigma) \subset O(f,\overline{\varepsilon}_m) \subset O(f,\overline{\delta}_{\lambda_k}) = \cup\{B_{\mu(\rho)}(f,\delta^{\lambda_k}_\rho) \mid \rho \in \Omega\}$$

показывает, что $f_k \in B_{\mu_0}(f,\delta^{\lambda_k}_{\rho_0})$ для метрики $\mu_0 = \mu(\rho_0)$, $\rho_0 \in \Omega$. Тогда $z_{\lambda_k} \in B_{\rho_0}(y_{\lambda_k}, \delta^{\lambda_k}_{\rho_0}) \subset U(y_{\lambda_k}, \overline{\delta}_{\lambda_k})$, что противоречит соотношению $z_{\lambda_k} \in Y \setminus U(y_{\lambda_k}, \overline{\delta}_{\lambda_k})$. $\square$

Литература

[1] Биркгоф Г. *Теория решеток* (Наука, М., 1984).

[2] Тимохович В.Л., Фролова Д.С. *О некоторых топологиях на множестве отображений*, Вестн. БГУ. Сер. 1, № 3, 84–89 (2009).

[3] Кукрак Г.О., Тимохович В.Л. *Некоторые топологические свойства пространства отображений*, Вестн. БГУ. Сер. 1, № 1, 144–149 (2010).

[4] Фролова Д.С. *О супремальной топологии пространства отображений*, Вестн. БГУ. Сер.1, № 1, 116–117 (2011).

[5] Тимохович В.Л., Фролова Д.С. *Об инфимальной топологии пространства отображений*, Вестн. БГУ. Сер.1, № 2, 136–140 (2011).

[6] Тимохович В.Л., Фролова Д.С. *О собственности и допустимости в смысле Аренса-Дугунджи инфимума топологий равномерной сходимости*, Докл. НАН Беларуси **56** (2), 22–26 (2012).

[7] Тимохович В.Л., Фролова Д.С. *Топологии равномерной сходимости. Собственность (в смысле Аренса–Дугунджи) и секвенциальная собственность*, Изв. вузов. Матем., № 9, 45–58 (2013).

[8] Энгелькинг Р. *Общая топология* (Мир, М., 1986).

[9] Hart K.P., Nagata J., Vaughan J.E. *Encyclopedia of general topology* (Elsevier, 2004).

[10] Hausdorff F. *Erweiterung einer Homöomorphie*, Fund. Math. **16**, 353–360 (1930).

[11] Александров П.С., Урысон П.С. *Мемуар о компактных топологических пространствах* (Наука, М., 1971).

[12] Arens R., Dugundji J. *Topologies for function spaces*, Pacif. J. Math. **1** (1), 5–31 (1951).

[13] Staum R. *The algebra of bounded continuous functions into a nonarchimedean field*, Pacif. J. Math. **50** (1), 169–185 (1974).

В.Л. Тимохович

Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220030, Республика Беларусь

Д.С. Фролова

IBA IT Park,
ул. М. Богдановича, д. 155, г. Минск, 220040, Республика Беларусь,

e-mail: 4frolova@gmail.com

V.L. Timokhovich and D.S. Frolova

On properties of infimal topology of a map space

Abstract. We study properties of the infimal topology $\tau_{\inf}$ which is the infimum of the family of all topologies of uniform convergence defined on the set $C(X, Y)$ of continuous maps into a metrizable space Y. One of the main results of the research consists in obtaining necessary and sufficient condition for the topology $\tau_{\inf}$ to have the Fréchet–Urysohn property. We also establish necessary and sufficient conditions for coincidence of the topology $\tau_{\inf}$ and a topology of uniform convergence τ_{μ}.

Keywords: map space, topology of uniform convergence, infimal topology.

V.L. Timokhovich

Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030 Republic of Belarus

D.S. Frolova

IBA IT Park,
155 M. Bogdanovicha str., Minsk, 220040 Republic of Belarus,

e-mail: 4frolova@gmail.com