Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2009, № 12, с. 80–83 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

Краткое сообщение, представленное членом редколлегии Д.Х. Муштари

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ПРОЕКТОРОВ И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СЛЕДА НА АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА. I

Аннотация. Получены новые необходимые и достаточные условия коммутирования проекторов в терминах операторных неравенств. Эти неравенства применены для характеризации следа на алгебрах фон Неймана в классе всех положительных нормальных функционалов.

Получена характеризация следа на алгебрах фон Неймана в терминах коммутирования произведений проекторов под знаком веса.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, спектральная теорема, вес, след, нормальный функционал, линейный ограниченный оператор, проектор, операторное неравенство, перестановочность операторов.

УДК: 517.983 : 517.986

Abstract. We obtain the necessary and sufficient conditions for commutativity of projectors in terms of operator inequalities. We apply these conditions for the trace characterization on von Neumann algebras in the class of all positive normal functionals.

We also characterize the trace on von Neumann algebras in terms of commutation of products of projectors under the weight sign.

Keywords: Hilbert space, von Neumann algebra, spectral theorem, weight, trace, normal functional, linear bounded operator, projector, operator inequality, commutativity of operators.

Введение

Исследования по задачам характеризации следов в классе нормальных весов или функционалов на алгебрах фон Неймана начались в 70-е гг. XX в. Недавние продвижения в теории сингулярных следов на идеалах компактных операторов и важные приложения этой теории в некоммутативной геометрии [1] привели к задачам характеризации следов в более широких классах весов на алгебрах фон Неймана.

Данная статья является продолжением работ [2]–[4], обозначений и терминологии которых мы придерживаемся. В [2] доказано неулучшаемое (по числу сомножителей) утверждение: *если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ не имеет прямого абелева слагаемого* (*соответственно собственно бесконечна*), *то каждый оператор $x \in \mathcal{M}$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более трех* (*соответственно двух*)

Поступила 04.06.2009

проекторов из $\mathcal{M}$. В [3] дано второе доказательство этого факта с равномерной оценкой количества слагаемых в таких представлениях. Наименьшая верхняя граница, равная трем, связана с существованием нетривиального конечного следа на этих алгебрах.

В [4] получено новое условие коммутирования пары проекторов в терминах их верхней (нижней) грани в решетке всех проекторов алгебры и показано, что каждый косоэрмитов элемент собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов из $\mathcal{M}$. В конечномерном случае в терминах конечных сумм коммутаторов проекторов описано множество операторов с нулевым каноническим следом tr.

В данной работе установлены новые критерии перестановочности проекторов в терминах операторных неравенств. Эти неравенства применены для характеризации следа в классе всех положительных нормальных функционалов на алгебре фон Неймана. Получен критерий попарной ортогональности набора проекторов в терминах одного операторного неравенства. Получена характеризация следа на алгебрах фон Неймана в терминах коммутирования произведений проекторов под знаком веса.

1. Определения и обозначения

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и e — тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначим $*$-алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов в $\mathcal{H}$ через $\mathcal{M}^+$ и $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ обозначим ее положительную часть и решетку проекторов соответственно. Пусть $s_r(x)$ — носитель элемента $x \in \mathcal{M}^+$. Если $p, q \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, то $p^\perp = e - p$ и $r = p \wedge q \in \mathcal{M}^p$ определяется равенством $r\mathcal{H} = p\mathcal{H} \bigcap q\mathcal{H}$.

Весом на $\mathcal{M}$ называется отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ такое, что

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x), \quad x, y \in \mathcal{M}^+, \quad \lambda \geq 0, \quad 0 \cdot \infty \equiv 0.$$

Вес φ на $\mathcal{M}$ называется *точным*, если $\varphi(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x \in \mathcal{M}^+$; *нормальным*, если $\varphi(x) = \sup \varphi(x_i)$, $x_i \nearrow x$, $x_i, x \in \mathcal{M}^+$; *полуконечным*, если $\mathfrak{M}_\varphi = \mathrm{Lin}\,\{x \in \mathcal{M}^+ : \varphi(x) < +\infty\}$ ультраслабо плотна в $\mathcal{M}$; *конечным*, если $\varphi(e) < +\infty$; *следом*, если $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$, $x \in \mathcal{M}$. Вес φ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_\varphi$. Такое продолжение позволяет отождествлять конечные веса с положительными функционалами на $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{M}_*^+$ — конус положительных нормальных функционалов на $\mathcal{M}$. Если $x \in \mathcal{M}$, то $|x| = (x^*x)^{1/2} \in \mathcal{M}^+$.

2. О перестановочности проекторов

Теорема 1. *Для* $p, q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$ *следующие условия эквивалентны*:

(i) $|p - q| \leq p + q$;
(ii) $pqp \leq q$;
(iii) $pq = qp$.

Геометрический смысл перестановочности проекторов p и q состоит в том, что подпространства $p\mathcal{H} \ominus (p\mathcal{H} \cap q\mathcal{H})$ и $q\mathcal{H} \ominus (p\mathcal{H} \cap q\mathcal{H})$ ортогональны; при этом $pq = p \wedge q$ ([5], гл. II, § 37, теорема 1). Ясно, что

$$pq = 0 \Longleftrightarrow p\mathcal{H} \perp q\mathcal{H} \Longleftrightarrow q\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Ker}(p) \Longleftrightarrow p\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Ker}(q) \Longrightarrow pq = qp.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{p_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$, $n \geq 2$. *Тогда*

$$p_k p_i = 0 \quad (k, i = 1, \ldots, n, \quad k \neq i) \Longleftrightarrow \left| \prod_{k=1}^{n} (e + p_k) \right| \leq 2e.$$

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $L^1(\mathcal{M},\tau)$ — пространство τ-интегрируемых операторов [6]. Если $\mathcal{M}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau=\mathrm{tr}$ — канонический след, то $L^1(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с идеалом $\mathcal{S}_1$ ядерных операторов.

В 1993 г. А.Н. Шерстнев поставил вопрос: “*Пусть* $x,y\in\mathcal{M}^+$ *и* $xy\in L_1(\mathcal{M},\tau)$. *Будет ли* $x^{1/2}yx^{1/2}$ *принадлежать* $L^1(\mathcal{M},\tau)$?”

В [7] (см. также [8]) был получен положительный ответ и построен пример таких $p,q\in\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$, что $pqp\in\mathcal{S}_1$, но $pq\notin\mathcal{S}_1$. Поэтому циклическая перестановка проекторов в произведениях под знаком tr при $\dim\mathcal{H}=\infty$ (см. также [4]) в общем случае недопустима.

3. Характеризация следа на алгебрах фон Неймана

Вес φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ является следом $\Longleftrightarrow \varphi(x^{1/2}px^{1/2})=\varphi(pxp)$ для всех $x\in\mathcal{M}^+$ и $p\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ ([7], [9]). Покажем, что $x^{1/2}px^{1/2}=pxp\Longleftrightarrow xp=px$ ($x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})^+$, $p\in\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$). В прямой сумме $\mathcal{H}=p\mathcal{H}\oplus p^{\perp}\mathcal{H}$ имеем $p=\mathrm{diag}(1,0)$, и пусть

$$x^{1/2}=\begin{pmatrix} a & b\\ b^* & c\end{pmatrix};$$

здесь $a\in\mathcal{B}(p\mathcal{H})^+$, $c\in\mathcal{B}(p^{\perp}\mathcal{H})^+$. Тогда $pxp=\mathrm{diag}(a^2+bb^*,0)$ и

$$x^{1/2}px^{1/2}=\begin{pmatrix} a^2 & ab\\ b^*a & bb^*\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $b=0$ и $x^{1/2}=\mathrm{diag}(a,c)$, $x^{1/2}p=\mathrm{diag}(a,0)=px^{1/2}$, тем самым $xp=px$.

Теорема 3 ([7], [9]). *Пусть вес φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию*

$$x_nx=xx_n,\quad x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x,\quad x_n\nearrow x\Longrightarrow\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n),\quad x_n,x\in\mathcal{M}^+. \tag{1}$$

Тогда φ — след $\Longleftrightarrow\varphi(pqp)=\varphi(qpq)$ для всех $p,q\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$.

Теорема 3 нашла приложения в теории расщепляющих подпространств [10]. Полунепрерывные снизу по норме веса удовлетворяют условию (1); таковы, в частности, нормальные или конечные веса. Для $p,q\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ три равенства $pqp=qpq$, $s_r(pqp)=s_r(qpq)$ и $pq=qp$ попарно эквивалентны ([4], теорема 4.5).

Теорема 4. *Вес φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ является следом тогда и только тогда, когда $\varphi((pqr)^*(pqr))=\varphi((pqr)(pqr)^*)$ для всех $p,q,r\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$.*

Теорема 5. *Для функционала $\varphi\in\mathcal{M}_*^+$ эквивалентны следующие условия*:

(i) $\varphi(s_r(pqp))=\varphi(s_r(qpq))$ *для всех* $p,q\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$;
(ii) $\varphi(p+q)\le\varphi(e+p\wedge q)$ *для всех* $p,q\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$;
(iii) $\varphi(pqp)\le\varphi(q)$ *для всех* $p,q\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$;
(iv) $\varphi(|p-q|)\le\varphi(p+q)$ *для всех* $p,q\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$;
(v) φ *является следом.*

Сведения о других характеризациях следа можно почерпнуть в [11]–[14], см. также библиографию в них.

Литература

[1] Connes A. *Noncommutative geometry.* – San Diego, CA, Academic Press, Inc., 1994. – xiv+661 p.

[2] Бикчентаев А.М. *О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов* // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 46. – № 1. – С. 32–45.

[3] Bikchentaev A.M. *Representation of elements of von Neumann algebras in the form of finite sums of products of projections.* II // Proc. Inter. Conf. Operator Theory'20, Theta Series in Advanced Mathematics. – V. 6, Theta Foundation, Bucharest, 2006. – P. 15–23.

[4] Бикчентаев А.М. *О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов.* III. *Коммутаторы в C^*-алгебрах* // Матем. сб. – 2008. – Т. 199. – № 4. – С. 3–20.

[5] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Наука, 1966. – 544 с.

[6] Segal I.E. *A non-commutative extension of abstract integration* // Ann. Math. – 1953. – V. 57. – № 3. – P. 401–457.

[7] Бикчентаев А.М. *Об одном свойстве L^p-пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана* // Матем. заметки. – 1998. – Т. 64. – № 2. – С. 185–190.

[8] Bikchentaev A. *Majorization for products of measurable operators* // Inter. J. Theor. Phys. – 1998. – V. 37. – № 1. – P. 571–576.

[9] Бикчентаев А.М. *Характеризация следов в некоторых классах весов на алгебре фон Неймана* / В сб.: Теория функций и ее приложения. – Казань, Казанск. фонд "Математика", 1995. – С. 8–9.

[10] Sherstnev A.N., Turilova E.A. *Classes of subspaces affiliated with a von Neumann algebra* // Russian J. Math. Phys. – 1999. – V. 6. – № 4. – P. 426–434.

[11] Столяров А.И., Тихонов О.Е., Шерстнев А.Н. *Характеризация нормальных следов на алгебрах фон Неймана неравенствами для модуля* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – № 3. – С. 448–454.

[12] Tikhonov O.E. *Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals* // Positivity. – 2005. – V. 9. – № 2. – P. 259–264.

[13] Bikchentaev A.M., Tikhonov O.E. *Characterization of the trace by Young's inequality* // J. Inequal. Pure Appl. Math. – 2005. – V. 6. – № 2. – article 49.

[14] Bikchentaev A.M., Tikhonov O.E. *Characterization of the trace by monotonicity inequalities* // Linear Algebra Appl. – 2007. – V. 422. – № 2. – P. 274–278.

А.М. Бикчентаев

ведущий научный сотрудник,
НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Университетская, д. 17,

`e-mail:` Airat.Bikchentaev@ksu.ru

A.M. Bikchentaev

Leading Researcher,
Research Institute of Mathematics and Mechanics,
Kazan State University,
17 Universitetskaya str., Kazan, 420008, Russia,

`e-mail:` Airat.Bikchentaev@ksu.ru