ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 5 (468)

УДК 517.988

А.Г. БАСКАКОВ

ОБ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть X и Y — комплексные банаховы пространства, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), действующих из X со значениями в Y, $\mathrm{End}\,X = \mathrm{Hom}(X,X)$ — банахова алгебра эндоморфизмов банахова пространства X. Символ I используется для обозначения тождественного оператора в любом из рассматриваемых банаховых пространств. Через $\sigma(A)$, $\rho(A)$, $r(A)$ обозначаются спектр, резольвентное множество и спектральный радиус линейного оператора A.

Пусть G — локально компактная абелева группа, $\widehat{G}$ — двойственная группа непрерывных унитарных характеров группы G (в первой используется аддитивная форма записи алгебраической операции, во второй — мультипликативная). Символ $\mathcal{F}(G,X)$ (в дальнейшем, $\mathcal{F}$) используется для обозначения одного из следующих банаховых пространств измеримых (по Бохнеру) функций, принимающих значения в X.

$L_p = L_p(G,X)$ — пространство суммируемых на G (относительно меры Хаара на G) со степенью $p \in [1,\infty)$ функций, $L_\infty = L_\infty(G,X)$ — пространство существенно ограниченных на G функций, $C = C(G,X)$ — подпространство непрерывных функций из $L_\infty(G,X)$, $C_0 = C_0(G,X)$ — подпространство функций из $C(G,X)$, сходящихся к нулю на бесконечности.

Если $G = \mathbb{Z}$ — группа целых чисел, то двойственная группа $\widehat{G}$ отождествляется (изоморфна) с окружностью $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ из поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. В этом случае часто вместо символа $L_p(\mathbb{Z},X)$ используется символ $l_p(\mathbb{Z},X)$. Для соответствующих банаховых пространств односторонних последовательностей используется запись $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X)$, где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, и, в частности, $l_p(\mathbb{Z}_+,X)$. Кроме того, полагается $c_0(\mathbb{Z}_+,X) = C_0(\mathbb{Z}_+,X)$, $c_0(\mathbb{Z},X) = C_0(\mathbb{Z},X)$.

Пусть A, B — два оператора из $\mathrm{Hom}(X,Y)$. По ним определим разностные операторы $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_+$, $\mathcal{D}_+^0$ следующими формулами:

$$(\mathcal{D}x)(g) = Ax(g) - Bx(g-g_0), \quad g \in G, \quad g_0 \in G, \quad x \in \mathcal{F}(G,X),$$
$$(\mathcal{D}_+x)(k) = Ax(k) - Bx(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X),$$
$$(\mathcal{D}_+^0x)(k) = \begin{cases} Ax(0), & k = 0; \\ Ax(k) - Bx(k-1), & k \ge 1, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X). \end{cases}$$

Оператор $\mathcal{D}$ принадлежит пространству $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}(G,X),\mathcal{F}(G,Y))$, а операторы $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_+^0$ — пространству $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X),\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,Y))$.

В данной статье получены необходимые и достаточные условия обратимости таких разностных операторов, а также формулы для обратных операторов. Рассматриваются условия существования и построения левых и правых операторов, обратных к разностным, описываются ядра и образы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00408).

Интерес к исследованию условий обратимости рассматриваемых разностных операторов обусловлен тесной взаимосвязью с вопросами обратимости абстрактных параболических операторов вида

$$\mathcal{L} = -d/dt + A(t) : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{I}, X) \to \mathcal{F}(\mathcal{I}, X),$$

где семейство замкнутых операторов $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$, $t \in \mathcal{I}$, порождает корректную задачу Коши ([1], с. 267) на бесконечном промежутке $\mathcal{I}$, который совпадает с одним из промежутков $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Для задания оператора $\mathcal{L}$ используется семейство $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t,s);\ s \le t,\ s, t \in \mathbb{R}\}$ эволюционных операторов из алгебры $\operatorname{End} X$ для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

Если $\mathcal{I} = \mathbb{R}$, то область определения оператора $\mathcal{L}$ состоит из таких функций $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, которые представимы при всех $t \ge s$ из $\mathbb{R}$ в виде

$$x(t) = \mathcal{U}(t,s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

для некоторой $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$. В этом случае полагается $\mathcal{L}x = f$. Непосредственно из определения следует корректность определения оператора $\mathcal{L}$ (единственность функции f из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$).

Если $\mathcal{I} = \mathbb{R}_+$, то определяемый далее дифференциальным выражением $-d/dt + A(t)$ оператор будет обозначаться символом $\mathcal{L}_+^0$. Его область определения $D(\mathcal{L}_+^0)$ состоит из функций $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, представимых в виде

$$x(t) = -\int_0^t \mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \ge 0,$$

для некоторой $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и тогда полагается $\mathcal{L}_+^0 x = f$. Ясно, что если $x \in D(\mathcal{L}_+^0)$, то $x(0) = 0$. В данном случае семейство эволюционных операторов определено при $0 \le s \le t < \infty$.

Еще один дифференциальный оператор $\mathcal{L}_+ : D(\mathcal{L}_+) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, порожденный дифференциальным выражением $-d/dt + A(t)$, определяется при предположении, что $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(s,t);\ 0 \le s \le t < \infty\}$ — семейство эволюционных операторов "назад" [2]. Функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ относится к $D(\mathcal{L}_+)$, если она при всех $0 \le s \le t < \infty$ представима в виде

$$x(s) = \mathcal{U}(s,t)x(t) - \int_s^t \mathcal{U}(s,\tau)f(\tau)d\tau, \quad f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X).$$

Следующая теорема была доказана в [2]–[4].

Теорема 1. *Операторы $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_+^0$, $\mathcal{L}_+$ обратимы тогда и только тогда, когда обратимы соответствующие разностные операторы*

$$(\widetilde{\mathcal{D}}x)(k) = x(k) - \mathcal{U}(k, k-1)x(k-1), \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X),$$

$$(\widetilde{\mathcal{D}_+^0}x)(k) = \begin{cases} x(0), & k = 0; \\ x(k) - \mathcal{U}(k, k-1)x(k-1), & x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \end{cases}$$

$$(\widetilde{\mathcal{D}_+}x)(k) = x(k) - \mathcal{U}(k, k+1)x(k+1), \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X).$$

Заметим, что если рассматриваемый параболический оператор действует в банаховом пространстве $\mathcal{F}(\mathcal{I}, X)$, то соответствующий ему разностный оператор считается действующим в банаховом пространстве $\mathcal{F}(\mathcal{I} \cap \mathbb{Z}, X)$. Например, если $\mathcal{F}(\mathcal{I}, X) = C(\mathbb{R}, X)$, то $\mathcal{F}(\mathcal{I} \cap \mathbb{Z}, X) = C(\mathbb{Z}, X)$.

Операторы $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_+^0$, $\mathcal{L}_+$ назовем *периодическими* (периода 1), если семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ обладает свойством $\mathcal{U}(t+1, s+1) = \mathcal{U}(t,s)$ при всех $s \le t$ из $\mathcal{I}$ ($t \le s$, если $\mathcal{U}$ — семейство эволюционных операторов "назад").

Таким образом, каждый из полученных здесь результатов об обратимости разностных операторов с постоянными коэффициентами дает условия обратимости соответствующих параболических операторов с периодическими коэффициентами и с постоянными коэффициентами (последнее означает, что семейство $\mathcal{U}$ зависит только от разности аргументов $t-s$). Например, для изучения периодического оператора $\mathcal{L}$ важную роль играет разностный оператор $(\widetilde{\mathcal{D}}x)(k) = x(k) - \mathcal{U}(1,0)x(k-1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$.

Результаты для рассматриваемых параболических операторов обычно формулируются в качестве следствий получаемых здесь теорем.

1. Обратимость оператора $\mathcal{D}$

В этом параграфе рассматривается разностный оператор $\mathcal{D} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(G,X), \mathcal{F}(G,Y))$, причем элемент $g_0 \in G$ удовлетворяет условию следующего предположения.

Предположение 1. *Множество чисел* $\{\gamma(g_0);\ \gamma \in \widehat{G}\}$ *плотно на окружности* $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$.

Отметим, что оно выполнено для $g_0 = \pm 1$ из группы $\mathbb{Z}$.

Для построения обратного оператора $\mathcal{D}^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(G,Y), \mathcal{F}(G,X))$ используем элементы спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов (линейных пучков). При этом здесь используются основные понятия и результаты, приведенные в [5], [6].

Спектром $\sigma(A,B)$ упорядоченной пары (A,B) операторов (слово “упорядоченная” далее часто будет опускаться) из $\mathrm{Hom}(X,Y)$ называется совокупность таких λ из $\mathbb{C}$, для которых оператор $A - \lambda B$ необратим, а множество $\rho(A,B) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A,B)$ — *резольвентным множеством* этой пары. Резольвентное множество открыто, а спектр пары замкнут.

Функция $R = R(\cdot; A,B) : \rho(A,B) \to \mathrm{Hom}(Y,X)$, определенная равенством $R(\lambda; A,B) = (A - \lambda B)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A,B)$, называется *резольвентой* пары (A,B).

Упорядоченную пару замкнутых подпространств (X_0, Y_0), где $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$, назовем *инвариантной* для (A,B), если $A(X_0) \subset Y_0$, $B(X_0) \subset Y_0$.

Замечание 1. Пусть (X_0,Y_0), (X_1,Y_1) — две пары инвариантных для (A,B) подпространств таких, что $X = X_0 \oplus X_1$, $Y = Y_0 \oplus Y_1$. Обозначим сужения операторов A, B на X_0 символами A_0, B_0, а сужения на X_1 — через A_1, B_1. Таким образом, $A_0, B_0 \in \mathrm{Hom}(X_0,Y_0)$, $A_1, B_1 \in \mathrm{Hom}(X_1,Y_1)$. В этом случае используем запись

$$(A,B) = (A_0,B_0) \oplus (A_1,B_1) \tag{1}$$

и будем говорить, что пара (A,B) есть *прямая сумма пар* (A_0,B_0), (A_1,B_1). Из этого определения следует, что для любого вектора $x \in X$ имеют место равенства

$$Ax = A_0x_0 + A_1x_1, \quad Bx = B_0x_0 + B_1x_1,$$

если $x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$.

Замечание 2. Указанные в замечании 2 разложения можно построить, используя пары ограниченных проекторов $P_0, P_1 \in \mathrm{End}\,X$, $Q_0, Q_1 \in \mathrm{End}\,Y$, обладающих свойствами

$$P_0 + P_1 = I, \quad Q_0 + Q_1 = I, \quad AP_k = Q_kA, \quad BP_k = Q_kB, \quad k = 0,1.$$

Положим $X_k = \mathrm{Im}\,P_k$, $Y_k = \mathrm{Im}\,Q_k$, $k = 0,1$, где $\mathrm{Im}\,P_k$ — образ проектора P_k. В этом случае (X_0,Y_0), (X_1,Y_1) — инвариантные для (A,B) пары и имеет место формула (1).

Последующие результаты получены при условии, что выполнено

Предположение 2. *Множество* $\rho(A,B)$ *не пусто (будем говорить, что пара* (A,B) *несингулярна).*

Из предположения 2 следует, что существует $\alpha_0 \in \rho(A,B)$ и поэтому оператор $A - \alpha_0 B : X \to Y$ является изоморфизмом пространств X и Y.

Теорема 2. *Пусть спектр $\sigma(A,B)$ пары (A,B) обладает свойством*

$$\sigma(A,B)\cap\mathbb{T}=\emptyset. \tag{2}$$

Тогда $X=X_0\oplus X_1$, $Y=Y_0\oplus Y_1$, где (X_0,X_1), (Y_0,Y_1) — инвариантные пары подпространств для (A,B). Разложения пространств определяются с помощью проекторов $P_0,P_1\in\operatorname{End}X$, $P_0+P_1=I$, $Q_0,Q_1\in\operatorname{End}Y$, $Q_0+Q_1=I$, где проекторы P_0 и Q_0 определены формулами

$$P_0=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}R(\lambda)B\,d\lambda,\quad Q_0=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}BR(\lambda)d\lambda.$$

Соответствующее представление $(A,B)=(A_0,B_0)\oplus(A_1,B_1)$ обладает свойством

$$\sigma(A_k,B_k)=\sigma_k,\quad k=0,1,$$

где $\sigma_0=\{\lambda\in\sigma(A,B):|\lambda|<1\}$, $\sigma_1=\{\lambda\in\widetilde{\sigma}(A,B):|\lambda|>1\}$. Операторы B_0 и A_1 обратимы и $r(B_0^{-1}A_0)=r(A_0B_0^{-1})<1$, $r(B_1A_1^{-1})=r(A_1^{-1}B_1)<1$.

Сформулированная теорема получена в [5] и приведена в ([6], с. 6).

Теорема 3. *Для обратимости оператора $\mathcal{D}:\mathcal{F}(G,X)\to\mathcal{F}(G,Y)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2). Если оператор $\mathcal{D}\in\operatorname{Hom}(\mathcal{F}(G,X),\mathcal{F}(G,Y))$ обратим, то обратный оператор $\mathcal{D}^{-1}\in\operatorname{Hom}(\mathcal{F}(G,Y),\mathcal{F}(G,X))$ определяется формулой*

$$(\mathcal{D}^{-1}y)(g)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_ny(g+ng_0), \tag{3}$$

где операторы $G_n\in\operatorname{Hom}(Y,X)$, $n\in\mathbb{Z}$, определены равенствами

$$G_n=\begin{cases}B_0^{-1}(-A_0B_0^{-1})^{n-1}Q_0, & n\geq 1;\\ A_1^{-1}(-B_1A_1^{-1})^{-n}Q_1, & n\leq 0.\end{cases}$$

Здесь пары операторов (A_0,B_0), (A_1,B_1) построены в соответствии с теоремой 2.

Доказательство. Необходимость. Выполнение условия (2) позволяет применить теорему 2. Используя ее обозначения, перепишем уравнение

$$(\mathcal{D}x)(g)=Ax(g)+Bx(g-g_0)=y(g),\quad y\in\mathcal{F}(G,Y),$$

в виде системы уравнений

$$\begin{aligned}A_0x_0(g)+B_0x_0(g-g_0)&=y_0(g),\\ A_1x_1(g)+B_1x_1(g-g_0)&=y_1(g),\end{aligned}$$

где $x_k(g)=P_kx(g)$, $y_k(g)=Q_ky(g)$, $k=0,1$. Поскольку B_0 и A_1 — обратимые операторы, то эта система записывается в виде

$$\begin{aligned}x_0(g)+B_0^{-1}A_0x_0(g+g_0)&=B_0^{-1}y_0(g+g_0),\\ x_1(g)+A_1^{-1}B_1x_1(g-g_0)&=A_1^{-1}y_1(g).\end{aligned}$$

Спектральные радиусы $r(B_0^{-1}A_0)$, $r(A_1^{-1}B_1)$ операторов $B_0^{-1}A_0\in\operatorname{End}X_0$, $A_1^{-1}B_1\in\operatorname{End}X_1$ меньше единицы и поэтому каждое из этих уравнений имеет единственное решение. Эти решения представимы в виде сходящихся рядов

$$x_0(g)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(B_0^{-1}A_0)^nB_0^{-1}y_0(g+(n+1)g_0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_0^{-1}(-A_0B_0^{-1})^{n-1}Q_0y(g+ng_0),$$

$$x_1(g)=\sum_{n=-\infty}^{0}A_1^{-1}(-B_1A_1^{-1})^{-n}Q_1y(g+ng_0).$$

Отсюда следует обратимость оператора $\mathcal{D}$ и формула (3).

Достаточность. Пусть теперь обратим оператор $\mathcal{D}$. Поскольку выполнено предположение 2, то некоторый оператор вида $A-\alpha_0 B = U \in \mathrm{Hom}(X,Y)$, $\alpha_0 \in \rho(A,B)$, осуществляет изоморфизм пространств X и Y. Рассматривая вместо оператора $\mathcal{D}$ оператор $(\mathcal{D}_1 x)(g) = U^{-1}(\mathcal{D}x)(g)$, $x \in \mathcal{F}(G,X)$, и учитывая, что $\sigma(U^{-1}A, U^{-1}B) = \sigma(A,B)$, без ограничения общности считаем $X = Y$.

Из результатов статьи [7] следует, что оператор $\mathcal{D}$ обратим в любом из рассматриваемых функциональных пространств $L_p = L_p(G,X)$, $p \in [1,\infty]$, $C(G,X)$, $C_0(G,X)$. В частности, он обратим в $C(G,X)$. Рассмотрим группу изометрических операторов $T(\gamma)$, $\gamma \in \widehat{G}$, из алгебры $\mathrm{End}\, C(G,X)$ вида

$$(T(\gamma)x)(g) = \gamma(g)x(g), \quad x \in C(G,X), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Из равенств

$$(T(\gamma)\mathcal{D}T(\gamma^{-1})x)(g) = Ax(g) - \gamma(g_0)Bx(g-g_0)$$

и предположения 1 следует, что достаточно доказать обратимость оператора $A - B$.

Вначале докажем его инъективность. Если $x_0 \in \mathrm{Ker}(A-B)$, то $\mathcal{D}\varphi_0 = 0$ для постоянной функции $\varphi_0(g) = x_0$, $g \in G$, из $C(G,X)$. Следовательно, $\varphi_0 = 0$ и поэтому $x_0 = 0$.

Докажем сюръективность оператора $A-B$. Пусть y_0 — произвольный вектор из X, $\psi(g) = y_0$ $\forall g \in G$ и $\mathcal{D}\varphi = \psi$. Из-за перестановочности оператора $\mathcal{D}$ с операторами $S(\omega)$, $\omega \in G$, сдвигов функций из $C(G,X)$ получаем, что $\varphi(g) = x_0 \in X$ $\forall g \in G$. Ясно, что $\mathcal{D}\varphi = (A-B)x_0 = y_0$. Итак, оператор $A - B$ сюръективен. $\square$

Непосредственно из теоремы получаем следующие утверждения для оператора взвешенного сдвига $\mathcal{K} = BS(-g_0) \in \mathrm{End}\,\mathcal{F}(G,X)$, имеющего вид

$$(\mathcal{K}x)(g) = Bx(g-g_0), \quad x \in \mathcal{F}(G,X), \quad B \in \mathrm{End}\, X.$$

Следствие 1. Оператор $I - \mathcal{K}$ обратим тогда и только тогда, когда $\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Его спектр представим в виде $\sigma(\mathcal{K}) = \{\lambda\Theta;\ \lambda \in \sigma(B),\ \Theta \in \mathbb{T}\}$.

В следующем утверждении используется также теорема 1.

Следствие 2. Линейный параболический дифференциальный оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ с периодическими коэффициентами периода 1 обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие $\sigma(\mathcal{U}(1,0)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$.

Следствие 3. Пусть $C : D(C) \subset X \to X$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы операторов $\{U(t);\ t \geq 0\}$ из алгебры $\mathrm{End}\, X$. Тогда для обратимости оператора $\mathcal{L} = -d/dt + C : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\sigma(U(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$.

Отметим, что условия $\sigma(C) \cap i\mathbb{R}$ для обратимости оператора $\mathcal{L}$ недостаточно.

2. Обратимость операторов $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_+^0$

Рассмотрим разностные операторы $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_+^0$ из банахова пространства $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X), \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,Y))$.

Замечание 3. Если $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X) = l_p(\mathbb{Z}_+,X)$, где $p \in [1,\infty)$, то сопряженным к оператору $\mathcal{D}_+^0$ является оператор $(\mathcal{D}_+^0)^* \in \mathrm{Hom}(l_p(\mathbb{Z}_+,Y^*), l_q(\mathbb{Z}_+,Y^*))$, $1/p + 1/q = 1$, вида

$$((\mathcal{D}_+^0)^*\xi)(k) = A^*\xi(k) - B^*\xi(k+1), \quad \xi \in l_q(\mathbb{Z}_+,Y^*),$$

где X^*, Y^* — сопряженные к X и Y банаховы пространства и $A^*, B^* \in \mathrm{Hom}(Y^*,X^*)$ — сопряженные к A и B операторы. Верно и обратное: сопряженными к операторам типа $\mathcal{D}_+$ являются операторы типа $\mathcal{D}_+^0$, но действующие в $l_q(\mathbb{Z}_+,Y^*)$. Эта взаимосвязь рассматриваемых разностных операторов будет далее использована, позволяя результаты, полученные для одного из двух типов рассматриваемых операторов, переносить для операторов другого типа.

Теорема 4. *Для обратимости каждого из операторов $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_+^0$ необходимо и достаточно, чтобы оператор $A \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ был обратим и выполнялось условие*
$$r(A^{-1}B) < 1. \tag{4}$$

Доказательство. Если оператор A обратим и выполнено условие (4), то ясно, что оператор $\mathcal{D}_+$ обратим, причем
$$(\mathcal{D}_+^{-1}y)(k) = \sum_{n=0}^{\infty}(A^{-1}B)^n A^{-1}y(k+n), \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y).$$

Пусть теперь обратим оператор $\mathcal{D}_+$. Равенства
$$(T(\Theta)\mathcal{D}_+T(\Theta^{-1})y)(k) = Ay(k) - \Theta By(k+1) = ((\mathcal{D}_+(\Theta))y)(k),$$
где $k \geq 0$, $y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y)$ и $(T(\Theta)u)(k) = \Theta^k y(k)$, $\Theta \in \mathbb{T}$, означают подобие оператора $\mathcal{D}_+$ операторам $\mathcal{D}_+(\Theta)$. Поэтому доказав, что $1 \notin \sigma(A,B)$, получим, что для пары (A,B) выполнено условие (2) теоремы 2.

Из [7] следует обратимость оператора $\mathcal{D}$, если его рассматривать как элемент пространства $\mathrm{Hom}(l_\infty(\mathbb{Z}_+,X), l_\infty(\mathbb{Z}_+,Y))$ (и учесть, что пространства X и Y изоморфны; см. доказательство теоремы 3). Докажем, что оператор $A - B$ инъективен и сюръективен (и тогда $1 \notin \sigma(A,B)$).

Если $x_0 \in \mathrm{Ker}(A-B)$, то стационарная последовательность $\varphi(k) = x_0$, $k \geq 0$, принадлежит $\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}_+$ и поэтому $x_0 = 0$. Итак, $A - B$ — инъективный оператор.

Пусть y_0 — произвольный вектор из Y, $\psi(k) = y_0$, $k \geq 0$, — стационарная последовательность и φ — такая последовательность из $l_\infty(\mathbb{Z}_+,X)$, что $\mathcal{D}_+\varphi = \psi$. Поскольку $\mathcal{D}_+$ перестановочен с оператором $S(1)$ сдвига последовательностей из $l_\infty(\mathbb{Z}_+,X)$ на 1 и $S(1)\psi = \psi$, то $\mathcal{D}_+S(1)\varphi = \psi$. Следовательно, $S(1)\varphi = \varphi$, т. е. φ — стационарная последовательность. Поэтому $(A-B)\varphi(0) = y_0$. Таким образом, $A - B$ — сюръективный оператор.

В итоге получаем, что выполнено условие $\sigma(A,B) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Применяя теорему 2 к паре (A,B), перепишем уравнение $(\mathcal{D}_+x)(k) = y(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $y \in l_\infty(\mathbb{Z}_+,Y)$, в виде эквивалентной системы уравнений
$$(\mathcal{D}_0x_0)(k) = A_0x_0(k) - B_0x_0(k+1) = y_0(k) = Q_0y(k),$$
$$(\mathcal{D}_1x_1)(k) = A_1x_1(k) - B_1x_1(k+1) = y_1(k) = Q_1y(k),$$
где использовались обозначения теоремы 2. При этом операторы $\mathcal{D}_i \in \mathrm{Hom}(l_\infty(\mathbb{Z}_+,X_i), l_\infty(\mathbb{Z}_+,Y_i))$, $i = 0,1$, обратимы. Поскольку $\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}_0$ содержит все последовательности вида $x_0(k) = (B_0^{-1}A_0)^k x_0$, $x_0 \in X_0$, то $X_0 = \{0\}$. Отсюда следует, что $X_1 = X$, $Y_1 = Y$. Следовательно, обратим оператор $A = A_1$ и $r(BA^{-1}) = r(A^{-1}B) < 1$.

Теперь рассмотрим оператор $\mathcal{D}_+^0$. Используем замечание 4 и ограничимся рассмотрением операторов в пространствах l_p, $p \in [1,\infty)$, для которых сопряженными являются пространства l_q с $1/p + 1/q = 1$ (имеется в виду независимость свойства обратимости оператора $\mathcal{D}_+^0$ от вида рассматриваемых операторов). Обратимость оператора $\mathcal{D}_+^0$ эквивалентна обратимости сопряженного оператора $(\mathcal{D}_+^0)^*$, которая по доказанному эквивалентна обратимости оператора A^* и свойству $r({A^*}^{-1}B^*) < 1$. Следовательно, оператор $\mathcal{D}_+^0$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор A и $r(A^{-1}B) < 1$. $\square$

Следствие 4. Спектр операторов $\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_+^0 \in \mathrm{End}\,\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X)$, определенных равенствами
$$(\mathcal{K}_+x)(n) = Bx(n+1), \quad n \geq 0,$$
$$(\mathcal{K}_+^0x)(n) = \begin{cases} 0, & n = 0; \\ Bx(n-1), & n \geq 1, \end{cases} \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+,X),$$
где $B \in \mathrm{End}\,X$, совпадает с кругом $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B)\}$.

Следствие 5. Операторы $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_+^0$ с периодическими (периода 1) коэффициентами обратимы тогда и только тогда, когда выполняется соответствующее условие $r(\mathcal{U}(0,1)) < 1$, $r(\mathcal{U}(1,0)) < 1$. Спектр операторов $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_+^0$ представим в виде

$$\sigma(\mathcal{L}_+^0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\exp\lambda| \le r(\mathcal{U}(1,0))\},$$
$$\sigma(\mathcal{L}_+) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\exp\lambda| \le r(\mathcal{U}(0,1))\}.$$

Условия обратимости операторов $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_+^0$ оказались существенно жестче условия (2) теоремы 2, обеспечивающего обратимость оператора $\mathcal{D}$. Однако имеет место

Теорема 5. *Пусть для пары операторов (A, B) выполнено условие (2) теоремы 2. Тогда оператор $\mathcal{D}_+$ обратим справа, а оператор $\mathcal{D}_+^0$ — слева и для некоторого правого обратного оператора $(\mathcal{D}_+)_r^{-1}$ и для некоторого левого обратного оператора $(\mathcal{D}_+^0)_l^{-1}$ имеют место следующие представления*:

$$((\mathcal{D}_+)_r^{-1}y)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G_+(n,m)y(m), \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y), \tag{5}$$

$$((\mathcal{D}_+^0)_l^{-1}y)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G_+^0(n,m)y(m), \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y), \tag{6}$$

где

$$G_+(n,m) = \begin{cases} A_1^{-1}(B_1A_1^{-1})^{m-n}Q_1, & m \ge n \ge 0; \\ -(B_0^{-1}A_0)^{n-m-1}B_0^{-1}Q_0, & n > m \ge 0, \end{cases}$$

$$G_+^0(n,m) = \begin{cases} -(B_0^{-1}A_0)^{m-n-1}B_0^{-1}Q_0, & m > n \ge 0; \\ A_1^{-1}(B_1A_1^{-1})^{n-m}Q_1, & n \ge m \ge 0. \end{cases}$$

Доказательство. К паре операторов (A, B) применима теорема 2. Используя ее обозначения, оператор $\mathcal{D}_+$ представим в виде $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1$, где

$$\mathcal{D}_0 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X_0), \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y_0)), \quad \mathcal{D}_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X_1), \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y_1))$$

определены равенствами (см. доказательство теоремы 4)

$$(\mathcal{D}_0x_0)(k) = A_0x_0(k) - B_0x_0(k+1), \quad x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X_0),$$
$$(\mathcal{D}_1x_1)(k) = A_1x_1(k) - B_1x_1(k+1), \quad x_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X_1).$$

Операторы $B_0 \in \mathrm{Hom}(X_0, Y_0)$, $A_1 \in \mathrm{Hom}(X_1, Y_1)$ обратимы и $r(B_0^{-1}A_0) = r(A_0B_0^{-1}) < 1$, $r(B_1^{-1}A_1) = r(A_1B_1^{-1}) < 1$. Тогда оператор $\mathcal{D}_1$ обратим и обратный $\mathcal{D}_1^{-1}$ имеет вид

$$(\mathcal{D}_1^{-1}y_1)(k) = \sum_{n=0}^{\infty} A_1^{-1}(B_1A_1^{-1})^n y_1(k+n) = \sum_{m=k}^{\infty} A_1^{-1}(B_1A_1^{-1})^{m-k}y_1(m),$$

где $y_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y_1)$.

Как следует из доказательства теоремы 4, оператор $\mathcal{D}_0$ необратим, если $X_0 \ne \{0\}$. Однако он обратим справа, и для построения некоторого правого обратного $(\mathcal{D}_0)_r^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y_0), \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X_0))$ рассмотрим оператор сдвига

$$(S(-1)x_0)(k) = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ x_0(k-1), & k \ge 1, \end{cases}$$

и оператор

$$\widetilde{\mathcal{D}_0} = \mathcal{D}_0S(-1) = B_0(B_0^{-1}A_0S(-1) - I) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X_0), \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y_0)).$$

Оператор $\widetilde{\mathcal{D}_0}$ обратим, и $\widetilde{\mathcal{D}_0}^{-1}$ определяется формулой

$$\widetilde{\mathcal{D}_0}^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(B_0^{-1}A_0S(-1))^nB_0^{-1}$$

или

$$(\widetilde{\mathcal{D}_0}^{-1}y)(k) = -\sum_{n=0}^{k}(B_0^{-1}A_0)^nB_0^{-1}y_0(k-n).$$

Сходимость ряда обеспечивается условием $r(B_0^{-1}A_0) < 1$. Следовательно, один из правых обратных $(\mathcal{D}_0)_r^{-1}$ для $\mathcal{D}_0$ имеет вид $(\mathcal{D}_0)_r^{-1} = S(-1)\widetilde{\mathcal{D}_0}^{-1}$, т. е.

$$((\mathcal{D}_0)_r^{-1}y_0)(k) = \begin{cases} -\sum\limits_{n=0}^{k-1}(B_0^{-1}A_0)^nB_0^{-1}y_0(k-n-1), & k \geq 1; \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Искомый оператор $(\mathcal{D}_+)_r^{-1}$ представим в виде $(\mathcal{D}_+)_r^{-1} = (\mathcal{D}_0)_r^{-1} \oplus \mathcal{D}_1^{-1}$. Из полученных формул для его частей приходим к формуле (5).

Непосредственно проверяется, что определяемый формулой (6) оператор является левым обратным для $\mathcal{D}_+^0$. Эту формулу можно получить, рассматривая сопряженный оператор $(\mathcal{D}_+^0)^*$ к оператору $\mathcal{D}_+^0 \in \operatorname{End} l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1,\infty)$. Оператор $(\mathcal{D}_+^0)^*$ обратим справа и для некоторого правого обратного имеет представление типа (5). Следовательно, $\mathcal{D}_+^0$ обратим слева. Эти рассуждения приводят к (6). $\square$

Следствие 6. Оператор $\mathcal{D}_+$ сюръективен, а оператор $\mathcal{D}_+^0$ равномерно инъективен (корректен).

Равномерная инъективность оператора $\mathcal{D}_+^0$ означает, что существует постоянная $c > 0$ (можно положить $c = \|(\mathcal{D}_+^0)^{-1}\|$) такая, что для всех $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ имеет место оценка $\|\mathcal{D}_+^0 x\| \geq c\|x\|$.

Следствие 7. $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_+ = \operatorname{Im}\mathcal{P}_0$, где проектор $\mathcal{P}_0 \in \operatorname{End}\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ имеет вид $(\mathcal{P}_0x)(n) = (B_0^{-1}A_0)^n\mathcal{P}_0x(0)$, $n \geq 0$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, т. е. любая последовательность x из $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_+$ представима в виде

$$x(n) = (B_0^{-1}A_0)^nx_0, \quad n \geq 0, \quad x_0 \in X_0.$$

Она удовлетворяет оценке $\|x(n)\| \leq Mq^n\|x_0\|$, $n \geq 0$, где $M > 0$, $q \in [0,1)$.

Непосредственно из следствия 7 получаем, что ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_+$ оператора $\mathcal{D}_+$ не зависит от выбора пространства $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ (из рассматриваемых нами пространств) и все последовательности из $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_+$ экспоненциально убывают.

Следствие 8. Любое решение уравнения $\mathcal{D}_+x = f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y)$ допускает представление вида

$$x(n) = (B_0^{-1}A_0)^nP_0x_0 + \sum_{m=0}^{\infty}G_+(n,m)f(m),$$

где x_0 — некоторый вектор из X.

Следствие 9. Образ $\operatorname{Im}\mathcal{D}_+^0$ оператора $\mathcal{D}_+^0$ замкнут, и любая последовательность $u \in \operatorname{Im}\mathcal{D}_+^0$ представима в виде

$$u(0) = y(0) - \sum_{n\geq 0}(A_0B_0^{-1})^nQ_0y(n), \quad u(n) = y(n), \quad n \geq 1,$$

где y — любая последовательность из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y)$.

Доказательство. Оператор $\mathcal{D}_+^0(\mathcal{D}_+^0)_l^{-1}$ является проектором на $\operatorname{Im}\mathcal{D}_+^0$. Непосредственный подсчет показывает, что этот проектор имеет вид $I-\mathcal{P}_0$, где проектор $\mathcal{P}_0 \in \operatorname{End}\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y)$ представим формулой

$$(\mathcal{P}_0 y)(0) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_0B_0^{-1})^n Q_0 y(n), \quad (\mathcal{P}_0 y)(n) = 0, \ \ n \geq 1.$$

Подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{D}_+^0$ замкнуто, т. к. является образом непрерывного проектора. $\square$

Введем в рассмотрение оператор $T \in \operatorname{Hom}(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y), Y_0)$ следующей формулой

$$Ty = \sum_{n\geq 0}(A_0B_0^{-1})^n Q_0 y(n), \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, Y).$$

Следствие 10. $\operatorname{Im}\mathcal{D}_+^0 = \operatorname{Ker} T$.

Следствие 11. Если $Y_0 = \operatorname{Im} Q_0$ (или $X_0 = \operatorname{Im} P_0$) — конечномерное подпространство из Y (из X), то $\mathcal{D}_+^0$ и $\mathcal{D}_+$ — фредгольмовы операторы с индексом, модуль которого равен размерности $\dim Y_0 = \dim X_0$ пространства Y_0 (X_0).

Для доказательства достаточно заметить, что $\operatorname{Im} T = Y_0$.

Литература

1. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.
2. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ линейных дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов.* I // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 10. – С. 1299–1306.
3. Баскаков А. Г. *Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59. – № 6. – С. 811–820.
4. Баскаков А.Г. *Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов* // Функц. анализ и его прилож. – 1996. – Т. 30. – № 3. – С.1–11.
5. Радбель Н.Н. *Расщепление спектра и нормальные точки линейного пучка операторов в B-пространствах* // Вестн. Харьковск. ун-та. Сер. механ., матем. – 1974. – № 39. – С. 17–20.
6. Антоневич А.Б. *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход.* – Минск: Изд-во "Университетское", 1988. – 231 с.
7. Баскаков А.Г. *Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52. – № 2. – С. 17–25.

Воронежский государственный университет

Поступили
первый вариант 07.12.1998
окончательный вариант 21.03.2000