И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 9 (436)

УДК 517.988

Е.В. ВОСКРЕСЕНСКИЙ

О ПРИВОДИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье [1] обобщено понятие ляпуновского преобразования для нелинейных дифференциальных уравнений и даны достаточные условия приводимости уравнений из некоторых классов. В предлагаемой статье дается критерий приводимости, обобщающий известную теорему Еругина ([2], с. 154), и на его основе приведены новые достаточные условия приводимости.

Пусть Ξ — множество дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

где $f \in X$, $f(t,0) \equiv 0$, $X = C^{(p,q)}([T,+\infty) \times R^n, R^n)$ — пространство всех вектор-функций $(t,x) \to 1(t,x)$ размерности n, определенных на множестве $[T,+\infty) \times R^n$, p раз непрерывно дифференцируемых по переменной t, $p \geq 0$, и q раз непрерывно дифференцируемых по компонентам вектора x, $q \geq 1$. Решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным данным (t_0, x_0), будем обозначать символом $x(t : t_0, x_0)$. Пусть для всех уравнений из Ξ все решения $x(t : t_0, x_0)$ определены при всех $t \geq T$.

Первоначально расширим понятие ляпуновского преобразования, введенное в [1].

Определение. Назовем группу преобразований $G = \{\varphi : \varphi : \Xi \to \Xi\}$ ляпуновской группой преобразований (LG, Ξ), если характеристические показатели и устойчивость нулевого решения являются инвариантами. Если φ принадлежит какой-либо (LG_1, Ξ^1), $\Xi^1 \subseteq \Xi$, то φ будем называть ляпуновским преобразованием, а соответствующие уравнения — взаимно приводимыми.

Если дополнительно уравнение (1) обладает свойством $\|f(t,x)\| \leq \psi(t)\|x\|$, где $\psi \in C([T,+\infty),[0,+\infty))$ и функция ψ зависит от функции f, то совокупность уравнений (1) обозначим символом Ξ_1. Пусть $\Xi_1 \subset \Xi$.

Теорема 1. *Группа G_2 всех преобразований $\varphi : \Xi \to \Xi$ таких, что*

1) $x = \varphi(t,y)$, $\varphi \in C^{(p_0,q_0)}([T,+\infty) \times R^n, R^n)$, $p_0, q_0 \geq 1$, $\|\varphi(t,y)\| \leq k_0\|y\|$, $k_0 > 0$ *для всех* $t \geq T$;
2) *для обратной функции* $y = \varphi^{-1}(t,x)$, $\varphi^{-1} \in C^{(p_0,q_0)}([T,+\infty) \times R^n, R^n)$ *и* $\|\varphi^{-1}(t,x)\| \leq k_1\|x\|$, $k_1 > 0$ *для всех* $t \geq T$, $x \in R^n$,

является ляпуновской (LG_2, Ξ)

Доказательство. Из неравенств $\|\varphi(t,y)\| \leq k_0\|y\|$, $\|\varphi^{-1}(t,x)\| \leq k_1\|x\|$ следует, что характеристические показатели и устойчивость нулевого решения являются инвариантами для группы G_2. Следовательно, эта группа является ляпуновской (LG_2, Ξ). □

Пусть уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f_0(t,y) \tag{2}$$

принадлежит множеству Ξ и $x = \varphi_1(t, c)$, $y = \varphi_2(t, c)$ — общие решения соответственно уравнений (1) и (2), которые существуют на всем пространстве $[T, +\infty) \times R^n$, т. к. все решения уравнений из Ξ определены на множестве $[T, +\infty)$.

Теорема 2. *Для того чтобы уравнения* (1) *и* (2) *были взаимно приводимыми, необходимо и достаточно, чтобы преобразование*

$$x = \varphi_1(t, \varphi_2^{-1}(t, y)) \tag{3}$$

было ляпуновским.

Доказательство. Необходимость. Пусть ляпуновским преобразованием $x = L(t, y)$ уравнение (1) приводимо к уравнению (2). Тогда $L(t, y) = \varphi_1(t, c)$ и $L(t, \varphi_2(t, c)) = \varphi_1(t, c)$. Так как $y = \varphi_2(t, c)$, то $c = \varphi_2^{-1}(t, y)$. Поэтому

$$L(t, y) = \varphi_1(t, \varphi_2^{-1}(t, y)). \tag{4}$$

Из равенства (4) следует, что преобразование $x = \varphi_1(t, \varphi_2^{-1}(t, y))$ является ляпуновским.

Достаточность. Пусть преобразование (3) является ляпуновским. Покажем, что это преобразование переводит уравнение (1) в уравнение (2). Продифференцируем (3) по переменной t

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right], \tag{5}$$

где $z = \varphi_2^{-1}(t, y)$. Тогда $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = f(t, \varphi_1(t, c))$. Поэтому из (5) получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] = 0.$$

Так как матрица $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$ невырожденная, то

$$\frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{6}$$

Из тождеств $y \equiv \varphi_2(t, \varphi_2^{-1}(t, y))$, $z = \varphi_2^{-1}(t, \varphi_2(t, z))$ следуют равенства

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y} = E, \quad \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = E,$$

где E — $(n \times n)$ единичная матрица. Тогда $\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right]^{-1} = \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y}$. Поэтому

$$\frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial t} = -\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right]^{-1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}. \tag{7}$$

В этом случае с учетом (7) равенство (6) принимает вид

$$-\frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{8}$$

Из (8) следует

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = f_1(t, \varphi_2(t, c)) = f_1(t, y). \quad \square$$

В первом методе Ляпунова [3] важную роль играет группа преобразований с инвариантами спектр и устойчивость множества Ξ_0 всех линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными и ограниченными матрицами в это же множество Ξ_0. Как известно [1], [2], эта группа является ляпуновской (LG_0, Ξ_0), и теорема Еругина ([2], с. 154) является критерием приводимости двух линейных однородных дифференциальных уравнений. Тогда из теоремы 2 вытекает названный выше критерий как частный случай.

Следствие. Рассмотрим преобразование $x = \varphi_1(t, y)$. Тогда из теоремы 1 вытекает критерий приводимости уравнения (1) к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (1) приводимо к уравнению (9) тогда и только тогда, когда преобразование $x = \varphi_1(t, y)$ является ляпуновским. Отсюда вытекают результаты ([2], сс. 157, 158).

Теорема 3. *Пусть*

$$\|\varphi_1(t,y)\| \le k_1(t)\|y\|, \quad \|\varphi_2^{-1}(t,y)\| \le k_4(t)\|y\|,$$
$$\|\varphi_2(t,x)\| \le k_3(t)\|x\|, \quad \|\varphi_1^{-1}(t,x)\| \le k_2(t)\|x\|$$

при всех $x, y \in R^n$ *и* $t \ge T$. *Тогда, если* $k_1(t)k_4(t) \le c_1$, $k_3(t)k_2(t) \le c_2$, $t \ge T$, *где* c_1 *и* c_2 — *положительные постоянные, то уравнения* (1) *и* (2) *взаимно приводимы ляпуновским преобразованием из* (LG_2, Ξ).

Доказательство. Из теоремы 2 вытекает, что преобразованием (3) уравнение (1) переводится в уравнение (2) и наоборот: уравнение (2) переводится в уравнение (1). Докажем, что это преобразование принадлежит группе (LG_2, Ξ) из теоремы 1. Так как

$$\|\varphi_1(t, \varphi_2^{-1}(t,y))\| \le k_1(t)k_4(t)\|y\| \le c_1\|y\|,$$
$$\|\varphi_2(t, \varphi_1^{-1}(t,x))\| \le k_3(t)k_2(t)\|x\| \le c_2\|x\|,$$

то выполняются все условия теоремы 1. Следовательно, $L(t,y) = \varphi_1(t, \varphi_2^{-1}(t,y))$, $L \in (LG_2, \Xi)$. □

Пусть уравнение (1) принадлежит множеству Ξ_1 и $\int\limits_T^{+\infty} \psi(s)ds < +\infty$. Тогда $x(t : t_0, x_0) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s : t_0, x_0))ds$ и $x = x(t : t_0, x_0)$ — общее решение. Покажем, что $x = x(t : t_0, y)$ — ляпуновское преобразование. Так как

$$\|x(t : t_0, x_0)\| \le \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\|x(s : t_0, x_0)\|ds,$$

то

$$\|x(t : t_0, x_0)\| \le \|x_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{+\infty} \psi(s)ds \right)$$

и $\|x(t : t_0, y)\| \le \|y\|k_0$, где $k_0 = exp\Big(\int\limits_{t_0}^{+\infty} \psi(s)ds\Big)$. Кроме того,

$$\|x_0\| \le \|x\| + k_0 \int_{t_0}^{t} \psi(s)\|x_0\|ds, \quad \|x_0\|\left(1 - k_0 \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right) \le \|x\|.$$

Поэтому $\|y\| \le k_1\|x\|$, $k_1 = 1 - k_0 \int\limits_{t_0}^{t} \psi(s)ds$ при достаточно большом t_0 и для преобразования $x = x(t : t_0, y)$ выполняются условия теоремы 3. Следовательно, оно является ляпуновским. Тогда на основании следствия из теоремы 2 следует приводимость уравнения (1) к уравнению (9). Заметим, что ляпуновское преобразование принадлежит в этом случае группе (LG_2, Ξ_1).

Рассмотрим приложение полученных результатов к решению задач устойчивости решений дифференциальных уравнений. Пусть уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + R(t,x) \tag{10}$$

принадлежит множеству Ξ, а уравнение

$$\frac{dz}{dt} = f(t,z) \tag{11}$$

— множеству Ξ_1 и $\int\limits_T^{+\infty} \psi(t)dt < +\infty$. Тогда уравнение (11) на основании предыдущего приводимо ляпуновским преобразованием $z = \varphi(t,y)$, $\varphi(t,y) = z(t : t_0, y)$ к уравнению (9) и $\varphi^{-1}(t,z) = z - \int\limits_{t_0}^{t} f(s,z)ds$.

Пусть

$$\left\| \frac{\partial \varphi^{-1}(t,z)}{\partial z} \right\| \leq \psi_0(t), \quad \psi_0 \in C([T,+\infty),[0,+\infty)). \tag{12}$$

Такую оценку легко получить из условия $\int\limits_T^{+\infty} \psi(t)dt < +\infty$. Так как $\frac{\partial \varphi^{-1}(t,z)}{\partial z} = \left[\frac{\partial \varphi(t,y)}{\partial y}\right]^{-1}$, то на основании (12)

$$\left\| \left[\frac{\partial \varphi(t,y)}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \leq \psi_0(t), \quad t \geq T, \ \ y \in R^n. \tag{13}$$

Предположим также $\|R(t,x)\| \leq \lambda(t, \|x\|)$ и $\lambda \in C([T,+\infty),[0,+\infty))$, $\lambda(t,0) \equiv 0$, $\lambda(t,r_1) \leq \lambda(t,r_2)$, $r_1 \leq r_2$.

Теорема 4. *Пусть решения $\eta(t : t_0, \eta_0)$ уравнения*

$$\frac{d\eta}{dt} = \psi_0(t)\lambda(t, k_0\eta) \tag{14}$$

однозначно определяются начальными данными и решение $\eta = 0$ устойчиво. Тогда решение $x = 0$ уравнения (10) также устойчиво.

Доказательство. Преобразованием $x = \varphi(t,y)$ уравнение (10) приводимо к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]^{-1} R(t, \varphi(t,y)). \tag{15}$$

Из оценки (13) следует неравенство

$$\left\| \left[\frac{\partial \varphi(t,y)}{\partial y} \right]^{-1} R(t,\varphi(t,y)) \right\| \leq \psi_0(t)\lambda(t, k_0\|y\|).$$

Тогда из устойчивости решения $\eta = 0$ уравнения (14) и теоремы ([4], с. 66) вытекает устойчивость решения $y = 0$ уравнения (15). Но т. к. преобразование $x = \varphi(t,y)$ ляпуновское, то решение $x = 0$ уравнения (10) устойчиво. $\square$

Литература

1. Воскресенский Е.В. *Ляпуновские группы преобразований* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 7. – С. 13–19.
2. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* – Л.–М.: ОНТИ, 1935. – 386 с.
4. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.* – М.: Мир, 1980. – 300 с.

Мордовский государственный
университет

Поступили
первый вариант 15.03.1996
окончательный вариант 01.04.1997