ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 8 (459)

УДК 517.956

В.Ф. ВОЛКОДАВОВ, Е.Р. МАНСУРОВА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЧАСТНОГО ВИДА УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ДАРБУ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И СПЕЦИАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКЕ

На множестве $G = G_+ \cup G_-$, где

$$G_+ = \{(x,y) \mid 0 < x < y < h\}, \quad G_- = \{(x,y) \mid -a < x < 0,\ 0 < y < h\},$$

рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv (x-y)u_{xy} - \gamma u_x = 0, \quad 0 < \gamma < 1. \tag{1}$$

Задача. На множестве G найти решение $u(x,y) \in C(\overline{G}_+) \cap C(\overline{G}_-)$ уравнения (1), удовлетворяющее интегральным условиям

$$\int_0^y u(x,y)dx = \varphi_1(y), \quad y \in [0,h], \tag{2}$$

$$\int_0^\beta u(x,y)dy = \varphi_2(x), \quad x \in [-a,0], \tag{3}$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{x\to 0-} u(x,y) = a(y) \lim_{x\to 0+} u(x,y), \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\partial}{\partial x}\int_{-a}^x (x-t)^{-\lambda}(y-t)^\gamma u_t(t,y)dt = b(y) \lim_{x\to 0+} \frac{\partial}{\partial x}\int_x^y (t-x)^{-\lambda} u_t(t,y)dt, \tag{5}$$

где $0 < \lambda < 1$, $a(y)$, $b(y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$ — заданные функции.

Вспомогательная задача. В области G_- для уравнения (1) найти решение $u(x,y) \in C(\overline{G}_-)$, удовлетворяющее интегральным условиям (3) и

$$\int_{-a}^\alpha u(x,y)dx = \psi(y), \quad y \in [0,h], \quad -a < \alpha \le 0. \tag{6}$$

Исходя из общего решения уравнения (1)

$$u(x,y) = c_2(y) + \int_x^y c_1(t)(y-t)^{-\gamma}dt$$

и условий (3), (6), запишем решение вспомогательной задачи в виде

$$u(x,y) = \frac{\psi(y)}{a+\alpha} - \frac{1-\gamma}{a+\alpha}\int_{-a}^\alpha \frac{\varphi_2'(t)(a+t)(y-t)^{-\gamma}}{(-t)^{1-\gamma} - (\beta-t)^{1-\gamma}}dt + (1-\gamma)\int_x^\alpha \frac{\varphi_2'(t)(y-t)^{-\gamma}}{(-t)^{1-\gamma} - (\beta-t)^{1-\gamma}}dt, \tag{7}$$

где $\psi(y) \in C'_{[0,h]}$, $\varphi_2(x) \in C'_{[-a,0]}$.

Нетрудно убедиться, что функция $u(x,y)$, определяемая формулой (7), является решением уравнения (1), удовлетворяет условиям (3), (6), непрерывна в $\overline{G}_-$. Единственность решения следует из однозначности определения $c_1(t)$, $c_2(y)$.

В области G_+ единственное решение $u(x,y) \in C(\overline{G}_+)$ для уравнения (1) задачи Коши с данными

$$u(x,x) = \tau(x), \quad x \in [0,h], \quad \lim_{y \to x+0} (u_x - u_y)(y-x)^\gamma = \nu(x), \quad x \in [0,h],$$

имеет вид ([1], с. 7)

$$u(x,y) = \tau(y) - \frac{1}{2} \int_x^y \nu(t)(y-t)^{-\gamma} dt, \quad \tau(x) \in C_{[0,h]} \cap C'_{(0,h)}, \quad \nu(x) \in L_{[0,h]} \cap C'_{(0,h)}. \tag{8}$$

Решение $u(x,y) \in C(\overline{G}_+)$ задачи Коши для уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), будет иметь вид

$$u(x,y) = \frac{\varphi_1(y)}{y} + \frac{1}{2y} \int_0^y \nu(t) t (y-t)^{-\gamma} dt - \frac{1}{2} \int_x^y \nu(t)(y-t)^{-\gamma} dt, \quad (x,y) \in G_+, \tag{9}$$

где $\varphi_1(y)$ удовлетворяет *условию* А: $\varphi_1(y) = \varphi_0(y) y$, $\varphi_0(y) \in C'_{[0,h]}$.

Учитывая условие сопряжения (4), соотношения (7), (8), находим $\frac{\psi(y)}{a+\alpha}$ и, подставляя в (7), получим

$$u(x,y) = \frac{a(y)\varphi_1(y)}{y} - \frac{a(y)}{2y} \int_0^y \nu(t)(y-t)^{1-\gamma} dt + \\ + (1-\gamma) \int_x^0 \frac{\varphi_2'(t)(y-t)^{-\gamma}}{(-t)^{1-\gamma} - (\beta - t)^{1-\gamma}} dt, \quad (x,y) \in G_-, \tag{10}$$

где $\varphi_1(y)$, $a(y)$ удовлетворяют условию А и *условию* В: $a(y) \in C'_{[0,h]}$.

Используя условие сопряжения (5), формулы (9), (10) и дифференцируя полученное соотношение по y, приходим к интегральному уравнению

$$\int_0^y \rho(s) s^{1-\lambda} (y-s)^{-\gamma} F\left(1-\gamma-\lambda,\, 1;\, 1-\gamma;\, \frac{y-s}{y}\right) ds = F(y), \tag{11}$$

где

$$\nu(t) = \int_0^t \rho(s) ds, \quad F(y) = \frac{2\mu}{\lambda} y^{2-\gamma} \frac{d}{dy}\left(\frac{y^\gamma}{b(y)}\right),$$
$$\mu = \frac{(1-\gamma)\varphi_2'(-a) a^{-\lambda}}{(\beta + a)^{1-\gamma} - a^{1-\gamma}} + (1-\gamma) \int_{-a}^0 (-t)^\lambda d\left(\frac{\varphi_2'(t)}{(\beta - t)^{1-\gamma} - (-t)^{1-\gamma}}\right).$$

При этом использованы ([2], с. 72) интегральное представление функции $F(a,b;c;z)$, формула автотрансформации

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha,\, \gamma - \beta;\, \gamma;\, z),$$

а также формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dz}[z^a F(a,b;c;z)] = a z^{a-1} F(a+1,\, b;\, c;\, z),$$
$$\frac{d}{dz}[z^{c-1} F(a,b;c;z)] = (c-1) z^{c-2} F(a,b;\, c-1;\, z).$$

Пусть $b(y)$, $\varphi_2(x)$ удовлетворяют *условию* С:

$$b(y) \in C^2_{[0,h]}, \quad b(y) \neq 0; \quad \varphi_2(x) \in C^2_{[0,h]}.$$

Тогда $F(y) \in C'_{[0,h]}$, $F(0) = 0$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\lambda+\gamma=1$. Уравнение (11) в этом случае является уравнением Абеля

$$\int_0^y \frac{\rho(s)s^\gamma}{(y-s)^\gamma}ds = F(y). \tag{12}$$

Используя формулу обращения уравнения (12) ([3], с. 30), получим

$$\rho(x) = \frac{1}{B(1-\gamma,\,\gamma)}x^{-\gamma}\int_0^x F'(t)(x-t)^{\gamma-1}dt.$$

Так как выполняется условие C, то $\rho(x)\in L_{[0,h]}\cap C_{(0,h]}$, $\rho(x)=O(1)$, $x\to 0$. Тогда $\nu'(x)\in L_{[0,h]}\cap C_{(0,h]}$, $\nu'(x)=O(1)$, $x\to 0$, и функция $u(x,y)$, определяемая формулами (9), (10) в областях G_+ и G_- соответственно, является единственным решением $u(x,y)\in C(\overline{G}_+)\cap C(\overline{G}_-)$ уравнения (1) с условиями (2)–(5), где

$$\nu(x) = \frac{1}{(1-\lambda)B(\lambda,\,1-\lambda)}\int_0^x F'(t)\left(\frac{x-t}{x}\right)^{1-\lambda}F\left(1,\,1-\lambda;\,2-\lambda;\,\frac{x-t}{x}\right)dt, \tag{13}$$

$a(y)$, $b(y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям A, B, C.

Случай 2. $\lambda+\gamma\neq 1$. Используя формулу автотрансформации, преобразуем уравнение (11) к виду

$$\int_0^y \rho(s)(y-s)^{-\gamma}F\left(\lambda,\,-\gamma;\,1-\gamma;\,\frac{y-s}{y}\right)ds = \omega(y), \tag{14}$$

где $\omega(y)=y^{\lambda-1}F(y)$, $\omega(0)=0$. При этом $\omega(y)\in C_{[0,h]}\cap C'_{(0,h]}$ в силу условия C. Применяя к уравнению (14) формулу обращения уравнения Вольтерра первого рода ([4], с. 16), получим

$$\rho(x) = \frac{1}{B(\gamma,1-\gamma)}\int_0^x \omega'(y)(x-y)^{\gamma-1}R_1\left(\gamma-1,\,\gamma,\,-\gamma,\,\lambda+\gamma-1;\,\gamma;\,\gamma-1;\,\frac{x-y}{x},\,\frac{x-y}{x}\right)dy, \tag{15}$$

где ([4], с. 5)

$$R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!\,m!}x^n y^m.$$

Из представления R_1 через ${}_2F_1$, оценки ${}_2F_1$, $\omega'(y)$ и из условия C следует

$$\rho(x)\in C_{(0,h]}\cap L_{[0,h]},\quad \rho(x)=O(x^{\lambda+\gamma-1}),\quad x\to 0.$$

Тогда $\nu'(x)\in C_{(0,h]}\cap L_{[0,h]}$.

Функция $u(x,y)$, определяемая формулами (9), (10) в областях G_+ и G_- соответственно, при условиях A, B, C является единственным решением $u(x,y)\in C(\overline{G}_+)\cap C(\overline{G}_-)$ уравнения (1) с условиями (2)–(5), где $\nu(x)=\int\limits_0^x\rho(s)ds$ определяется из (15).

Единственность решения *задачи* следует из единственности решения *вспомогательной задачи*, задачи Коши и однозначной разрешимости интегральных уравнений (12), (14).

Таким образом, имеет место

Теорема. *Если функции* $a(y)$, $b(y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$ *удовлетворяют условиям* A, B, C, *то единственное решение* $u(x,y)\in C(\overline{G}_+)\cap C(\overline{G}_-)$ *уравнения* (1) *со свойствами* (2)–(5) *определяется в области* G_+ *формулами* (9), *в случае* 1 — *формулой* (13), *в случае* 2 — (15) *и в области* G_- — *формулами* (10), (13) *или* (15) *соответственно.*

Литература

1. Волкодавов В.Ф. *Задачи для гиперболического уравнения с нехарактеристическим вырождением, в краевых условиях которых содержатся интегральные условия* // Дифференц. уравнения. Межвуз. сб. научн. трудов. – Самара, 1995. – С. 5–8.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.* – М.: Наука, 1965. – 294 с.
3. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. *Интегральные уравнения.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 215 с.
4. Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. *Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с некоторыми специальными функциями в ядрах и их приложения.* – Самара: Изд-во Самарск. ун-та, 1992. – 98 с.

Самарский государственный педагогический университет

Марийский государственный педагогический институт

Поступила 02.11.1998