ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 3 (502)

УДК 517.518

А.Л. ГРИГОРЯН

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА СЕТКЕ

1. Введение

Допустим, $r \in N$ и W^r — класс непрерывных 2π-периодических функций, для которых существует абсолютно непрерывная $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(x)$ и $\|f^{(r)}(x)\| = \sup\limits_x |f^{(r)}(x)| \le 1$. Обозначим $R_m(W^r) = \sup\limits_{f\in W^r} \|f(x) - S_{m-1}(x,f)\|$, где $S_{m-1}(x,f)$ — частичные суммы $(m-1)$-го порядка ряда Фурье функции $f(x)$.

А.Н. Колмогоров [1] доказал, что

$$R_m(W^r) = m^{-r}(4\pi^{-2}\ln m + O(1)).$$

Исследования А.Н. Колмогорова для более общих классов были продолжены, например, в [2]–[6].

В данной работе решается дискретный аналог задачи А.Н. Колмогорова.

Если $q \in N$, $x_n = \frac{2\pi n}{q}$ $(n \in \mathbb{Z})$, $\mathbf{e}_k = \{e_k(x_n) = e^{ikx_n}\}_{n=0}^{q-1}$, $k = -[\frac{q-1}{2}], \dots, [\frac{q}{2}]$, то произвольную дискретную функцию $f : \{x_0, \dots, x_{q-1}\} \to \mathbb{R}$ можно разложить по ортогональной системе $\{\mathbf{e}_k\}$ $(k = -[\frac{q-1}{2}], \dots, [\frac{q}{2}])$ в следующий дискретный ряд Фурье:

$$f(x_n) = \sum_{k=-[\frac{q-1}{2}]}^{[q/2]} c_k e_k(x_n), \quad c_k = \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{q-1} f(x_n)e^{-ikx_n}.$$

Допустим, $\mathbf{f} = \{f(x_n)\}_{n=0}^{q-1}$, тогда $S_{m-1}(\mathbf{f}; x_n) = \sum\limits_{k=-(m-1)}^{m-1} c_k e_k(x_n)$ — частичная сумма дискретного ряда Фурье.

Обозначим через W_q^r класс 2π-периодических дискретных функций f, заданных на равномерной сетке $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и таких, что

$$\|\Delta^r_{2\pi/q} f\| = \max_n |\Delta^r_{2\pi/q} f(x_n)| \le (2\pi/q)^r.$$

Асимптотические свойства $C_m(W_q^r) = \sup\limits_{f\in W_q^r} \|f - S_{m-1}(\mathbf{f}; x_n)\|$ при $m, q \to \infty$ зависят от предела отношения порядка сумм Фурье к числу точек равномерной сетки и, в частности, от того, является указанный предел числом рациональным или иррациональным. Оказывается, что в отличие от непрерывного случая здесь естественным образом появляются функции римановского типа.

2. Дискретные константы Лебега

Для решения поставленной задачи необходимо знать поведение констант

$$L_m(q) = \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{q-1} \frac{|\sin(mx_n/2)|}{\sin(x_n/2)},$$

$$\overline{L}_m(q)=\frac{1}{q}\sum_{n=[q/m]}^{q-[q/m]}\frac{|\cos(\pi m(n+1/2)/q)|}{\sin(\pi(n+1/2)/q)},\quad m,q\in N,\quad m<q.$$

Константы $L_m(q)$ изучены в [7], где доказана

Теорема 1. *Пусть $m_n,q_n\in N$, $m_n\to\infty$, $\frac{m_n}{q_n}\to\alpha$ $(n\to\infty)$. Тогда*
а) *если α — иррациональное число или $\alpha=0$, то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_{m_n}(q_n)}{\ln(m_n+1)}=\frac{4}{\pi^2};$$

если $\alpha=s/p$, $(s,p)=1$, то

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{L_{m_n}(q_n)}{\ln(m_n+1)}\geq\frac{2}{\pi p}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2p},\quad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{L_{m_n}(q_n)}{\ln(m_n+1)}\leq\frac{4}{\pi^2},$$

б) *для любого $\gamma\in[\frac{2}{\pi p}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2p};\ \frac{4}{\pi^2}]$ существуют $m'_n,q'_n\in N$ такие , что $\frac{m'_n}{q'_n}\to\frac{s}{p}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{L_{m'_n}(q'_n)}{\ln(m'_n+1)}=\gamma$.*

Для константы $\overline{L}_m(q)$ докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $m_n,q_n\in N$, $m_n<q_n$, $\tau_n=\min(m_n,q_n-m_n)+1\to\infty$, $\frac{m_n}{q_n}\to\alpha$ при $n\to\infty$. Тогда*

а) *для иррациональных α и $\alpha=0;1$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overline{L}_{m_n}(q_n)}{\ln\tau_n}=\frac{4}{\pi^2}$,*

б) *если $\alpha=\frac{s}{p}$, $(s,p)=1$, то*

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\overline{L}_{m_n}(q_n)}{\ln\tau_n}=h=\begin{cases}\frac{2}{\pi p}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2p} & \text{при } s+p\equiv 0\pmod 2;\\ \frac{4}{\pi^2} & \text{при } s+p\equiv 1\pmod 2,\end{cases}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\overline{L}_{m_n}(q_n)}{\ln\tau_n}=H=\begin{cases}\frac{4}{\pi^2} & \text{при } s+p\equiv 0\pmod 2;\\ \frac{2}{\pi p\sin\frac{\pi}{2p}} & \text{при } s+p\equiv 1\pmod 2).\end{cases}$$

Кроме того, для любого $\gamma\in[h;H]$ существуют $m'_n,q'_n\in N$ такие, что $m'_n/q'_n\to s/p$ $(n\to\infty)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overline{L}_{m'_n}(q'_n)}{\ln\tau'_n}=\gamma$.

Доказательство. Обозначив $\frac{|\cos\pi m(n+1/2)/q|}{\sin\pi(n+1/2)/q}=t_n$, запишем $\overline{L}_m(q)$ в виде

$$\overline{L}_m(q)=\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q-1}t_n-\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{[q/m]-1}t_n-\frac{1}{q}\sum_{n=q-[q/m]+1}^{q-1}t_n\equiv G_1-G_2-G_3.\tag{1}$$

Докажем, что

$$G_2+G_3=\frac{2}{\pi}\ln\frac{q}{m}+O(1).\tag{2}$$

Имеем $G_2=\frac{1}{q}\sum\limits_{n=1}^{[q/(2m)]}t_n+O(1)$. Применяя равенство $\cos x\geq 1-\frac{2}{\pi}x$, $x\in[0,\pi/2]$, получим

$$G_2\geq\frac{1}{\pi}\ln\frac{q}{m}+O(1).\tag{3}$$

Так как

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+O(1),\quad x\in(0;\pi/2],\tag{4}$$

то $G_2\leq\frac{1}{\pi}\ln\frac{q}{m}+O(1)$. Отсюда и из (3) следует

$$G_2=\frac{1}{\pi}\ln\frac{q}{m}+O(1).\tag{5}$$

Так как $G_3 = \frac{1}{q}\sum\limits_{n=1}^{[q/m]-1} t_{n-1}$, то аналогично получим $G_3 = \frac{1}{\pi}\ln\frac{q}{m} + O(1)$, откуда с учетом (5) следует (2). Используя разложение

$$|\cos x| = 1 + \frac{8}{\pi}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(-1)^v\sin^2 vx}{4v^2-1}$$

и формулу

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin x} = \sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x,$$

получим для G_1 следующее выражение:

$$G_1 = \frac{2\ln q}{\pi} + \frac{8}{\pi q}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(-1)^v}{4v^2-1}\sum_{k=1}^{vm}\sin^{-1}(2k-1)\frac{\pi}{q} + O(1). \tag{6}$$

Из (1), (2), (6) следует

$$\overline{L}_m(q) = \frac{2\ln m}{\pi} + \frac{8}{\pi q}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(-1)^v}{4v^2-1}\sum_{k=1}^{vm}\sin^{-1}(2k-1)\frac{\pi}{q} + O(1).$$

Используя формулы $\sin^{-1}x = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}x$, $\sum\limits_{k=1}^{pq}\operatorname{ctg}(2k-1)\frac{\pi}{2q} = 0$, $p \in N$, представим

$$\overline{L}_m(q) = \frac{2\ln m}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(-1)^v\ln(q\|\frac{vm}{q}\|+1)}{4v^2-1} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(-1)^v\ln(2q\|\frac{vm}{2q}\|+1)}{4v^2-1} + O(1), \tag{7}$$

где $\|\cdot\|$ — расстояние до ближайшего целого.

Докажем пункт а). Пусть $\frac{m_n}{q_n} \to \alpha \neq 0; 1$ $(n \to \infty)$. Тогда $\|\frac{vm_n}{q_n}\| \to \|v\alpha\|$ и $v\alpha$ не целое для иррациональных α. Разделив (7) на $\ln m_n$, используя равномерную сходимость рядов и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{L}_{m_n}(q_n)}{\ln m_n} = \frac{2}{\pi} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(-1)^v}{4v^2-1} = \frac{4}{\pi^2}.$$

Далее получим неравенство

$$\frac{2\tau}{\pi q}\operatorname{ctg}\frac{\pi\tau}{2q}\ln\tau + O(1) \le \overline{L}_m(q) \le \frac{2\tau\ln\tau}{\pi q\sin\pi\tau/q} + O(1), \tag{8}$$

где $\tau = \min(m, q-m) + 1$.

Пусть $q \ge 2m$. В силу (4) имеем

$$\overline{L}_m(q) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=[q/m]}^{[q/2]}\tau_n + \frac{1}{\pi}\sum_{n=[q/m]}^{[q/2]}\tau_{n-1} + O(1)$$

при $\tau_n = \frac{|\cos\pi m(n+1/2)/q|}{n+1/2}$. Замечая, что $\operatorname{sign}\cos x = (-1)^{k+1}$, $\frac{\pi}{2} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$, получим

$$\overline{L}_m(q) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{[\frac{m-1}{2}]}(-1)^{k+1}\sum_{n=[a_k^-]+1}^{[a_{k+1}^-]}\tau_n + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{[\frac{m-1}{2}]}(-1)^{k+1}\sum_{n=[a_k^+]+1}^{[a_{k+1}^+]}\tau_{n-1} + O(1),$$

где $a_k^{\pm} = \frac{q}{m}(k+\frac{1}{2}) \pm \frac{1}{2}$. Имеем

$$\overline{L}_m(q) \geq \frac{m}{\pi q}\sum_{k=0}^{[\frac{m-1}{2}]}\frac{(-1)^{k+1}}{k+3/2}(A_k^- + A_k^+) + O(1),$$

$$\overline{L}_m(q) \leq \frac{m}{\pi q}\sum_{k=0}^{[\frac{m-2}{2}]}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1/2}(A_k^- + A_k^+) + O(1),$$

где $A_k^{\pm} = \sum\limits_{n=[a_k^{\pm}]+1}^{[a_{k+1}^{\pm}]} \cos \pi m(n \mp \frac{1}{2})/q$.

Пусть $\{a\}$ — дробная часть a. Замечая, что

$$A_k^{\pm} = \frac{(-1)^{k+1}(\cos(\frac{1}{2}-\{a_{k+1}^{\pm}\})\frac{\pi m}{q} + \cos(\frac{1}{2}-\{a_k^{\pm}\})\frac{\pi m}{q})}{2\sin\frac{\pi m}{2q}}$$

и

$$2\cos\frac{\pi m}{q} \leq \cos\left(\frac{1}{2}-\{a_{k+1}^{\pm}\}\right)\frac{\pi m}{q} + \cos\left(\frac{1}{2}-\{a_k^{\pm}\}\right)\frac{\pi m}{q} \leq 2,$$

получим

$$\overline{L}_m(q) \geq \frac{2m}{\pi q}\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{2q}\sum_{k=0}^{[\frac{m-1}{2}]}\frac{1}{k+3/2} + O(1),$$

$$\overline{L}_m(q) \leq \frac{2m}{\pi q \sin\frac{\pi m}{2q}}\sum_{k=0}^{[\frac{m-1}{2}]}\frac{1}{k+1/2} + O(1),$$

откуда следует (8) при $q \geq 2m$.

Пусть теперь $q < 2m$. Так как

$$\overline{L}_m(q) = \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q-1} t_n + O(1) = \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q-1}\frac{|\sin\pi(q-m)(n+\frac{1}{2})/q|}{\sin\pi(n+\frac{1}{2})/q} + O(1),$$

то совершенно аналогично получим

$$\frac{2(q-m)}{\pi q}\operatorname{ctg}\frac{\pi(q-m)}{2q}\ln(q-m) + O(1) \leq \overline{L}_m(q) \leq \frac{2(q-m)\ln(q-m)}{\pi q\sin\pi\frac{q-m}{2q}} + O(1).$$

Неравенство (8) доказано. Из (8) следует утверждение п. а) для $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

Докажем пункт б). Пусть $\frac{m_n}{q_n} = \frac{s}{p} + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ такое, что существует (в силу (8)) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overline{L}_{m_n}(q_n)}{\ln m_n}$.

Допустим $\frac{m_{n_k}}{q_{n_k}}$ — подпоследовательность, для которой $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln(|\varepsilon_{n_k}|+q_{n_k}^{-1})}{\ln m_{n_k}} = \beta$. Не нарушая общности, будем считать $n_n = n$. Ясно, что $\beta \in [-1;0]$. Пусть для фиксированного целого k $|\varepsilon_n| < \frac{1}{2kp}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\|\frac{kpm_n}{q_n}\| + \frac{kp}{q_n})}{\ln m_n} = \beta, \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2\|\frac{kpm_n}{2q_n}\| + \frac{kp}{q_n})}{\ln m_n} = \begin{cases}\beta, & \text{если } ks \equiv 0 \pmod 2;\\ 0, & \text{если } ks \equiv 1 \pmod 2).\end{cases} \tag{10}$$

Так как

$$o \leq \ln\left(\left\|\frac{kpm_n}{q_n}\right\| + \frac{kp}{q_n}\right) - \ln\left(\left\|\frac{kpm_n}{q_n}\right\| + \frac{1}{q_n}\right) \leq \ln kp,$$

то, замечая, что $\frac{vs}{p}$ не целое при $v \equiv 0 \pmod p$, и применяя (8), из (7) получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{L}_{m_n}(q_n)}{\ln m_n} = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} + \frac{8\beta}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2p^2-1}, & \text{если } s+p \equiv 1 \pmod 2; \\ \frac{4}{\pi^2} + \frac{8\beta}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2p^2-1}, & \text{если } s+p \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

отсюда

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\overline{L}_{m_n}(q_n)}{\ln m_n} \geq \begin{cases} \frac{4}{\pi^2}, & \text{если } s+p \equiv 1 \pmod 2; \\ \frac{4}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2p^2-1}, & \text{если } s+p \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\overline{L}_{m_n}(q_n)}{\ln m_n} \leq \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2p^2-1}, & \text{если } s+p \equiv 1 \pmod 2; \\ \frac{4}{\pi^2}, & \text{если } s+p \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Для завершения доказательства первой части п. б) осталось заметить, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2p^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4p} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2p}, \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2p^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4p \sin \frac{\pi}{2p}}. \tag{12}$$

Докажем заключительную часть п. б). Рассмотрим последовательности $m_n = ns$, $q_n = np$. Заметив, что при $v = kp$, где $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \frac{vm_n}{q_n} \right\| = 0, \quad \left\| \frac{vm_n}{2q_n} \right\| = \begin{cases} 0, & ks \equiv 0 \pmod 2; \\ \frac{1}{2}, & ks \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

и поступив так же, как при доказательстве п. а), из (7) получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{L}_{ns}(np)}{\ln(ns)} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} + \frac{8}{\pi^2} \sum\limits_{v=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^v}{4v^2-1}, & \text{если } s \equiv 0 \pmod 2; \\ \frac{2}{\pi} + \frac{8}{\pi^2} \sum\limits_{v=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^v}{4v^2-1} + \frac{16}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4(2k-1)^2p^2-1}, & \text{если } s \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

где $'$ при сумме означает, что $v \equiv 0 \pmod p$. Так как $\frac{8}{\pi^2} \sum\limits_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{4v^2-1} = \frac{4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}$, то, применяя (11), (12), получим

$$R(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{L}_{ns}(np)}{\ln(ns)} = \begin{cases} \frac{2}{\pi p \sin \frac{\pi}{2p}}, & \text{если } s+p \equiv 1 \pmod 2; \\ \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2p}}{\pi p}, & \text{если } s+p \equiv 0 \pmod 2. \end{cases} \tag{13}$$

Отсюда видно, что $R(p) \to \frac{4}{\pi^2}$ при $p \to \infty$. Следовательно, для любого рационального s/p существует последовательность $\frac{m_n}{q_n} \to \frac{s}{p}$ $(n \to \infty)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{L}_{m_n}(q_n)}{\ln m_n} = \frac{4}{\pi^2}. \tag{14}$$

Из (13), (14) следует утверждение п. б) для $\gamma = h$ и $\gamma = H$.

Если $\gamma \in (h; H)$, то возьмем $q_n' \in \mathbb{N}$, $q_n' \to \infty$ $(n \to \infty)$ и положим $m_n' = [\frac{sq_n' - (q_n')^{1-t}}{p}]$, где

$$t = \begin{cases} \frac{\gamma - h}{H-h}, & \text{если } s+p \equiv 1 \pmod 2; \\ \frac{H-\gamma}{H-h}, & \text{если } s+p \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Ясно, что $\frac{m'_n}{q'_n} = \frac{s}{p} + \varepsilon_n$, где $p^{-1}(q'_n)^{-t} \le |\varepsilon_n| \le p^{-1}(q'_n)^{-t} + (q'_n)^{-1}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(|\varepsilon_n|+1/q'_n)}{ln m'_n} = -t$, что доказывает утверждение для $\gamma \in (h; H)$ согласно (7), (9), (10). Теорема доказана, т. к. если $\alpha \ne 0; 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(q_n - m_n)}{\ln m_n} = 1$.

3. Основной результат

Обозначим $\tau_n = \min(2m_n - 1, q_n - 2m_n + 1) + 1$, $Y_n = \frac{C_{m_n}(W_q^r)}{m_n^{-r}\ln\tau_n}$, $g(\alpha) = \left(\frac{\alpha\pi}{2\sin\frac{\alpha\pi}{2}}\right)^r$, где $m_n, q_n \in \mathbb{N}$. Основным результатом данной работы является

Теорема 3. *Пусть $q_n \ge 2m_n$, $\tau_n \to \infty$, $\frac{2m_n - 1}{q_n} \to \alpha$ при $n \to \infty$, $r \equiv i \pmod 2$, $i = 0$ или $i = 1$. Тогда*

а) *если α иррационально или $\alpha = 0; 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = \frac{4}{\pi^2} g(\alpha)$,*

б) *если $\alpha = \frac{s}{p}$, где $s, p \in \mathbb{N}$, $(s,p) = 1$, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} Y_n = g(\alpha) h_i$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} Y_n = g(\alpha) H_i$, где*

$$h_0 = \frac{2}{\pi p}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2p}, \quad H_0 = \frac{4}{\pi^2},$$

$$h_1 = \begin{cases} h_0 & \text{при } s + p \equiv 0 \pmod 2; \\ H_0 & \text{при } s + p \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

$$H_1 = \begin{cases} H_0 & \text{при } s + p \equiv 0 \pmod 2; \\ \frac{2}{\pi p \sin\frac{\pi}{2p}} & \text{при } s + p \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Кроме того, для любого $\gamma \in [h_i; H_i]$, где $i = 0$ при $r \equiv 0 \pmod 2$ и $i = 1$ при $r \equiv 1 \pmod 2$, существует последовательность $\frac{m'_n}{q'_n} \to \frac{s}{p}$ $(n \to \infty)$ такая, при которой $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = \gamma g(\alpha)$.

Доказательство. Докажем, что равномерно по m и q имеет место формула

$$C_m(W_q^r) = \left(\frac{\pi}{q\sin\frac{\pi m}{q}}\right)^r (L'_{2m-1}(q) + O(1)), \tag{15}$$

где

$$L'_{2m-1}(q) = \begin{cases} L_{2m-1}(q) & \text{при } r \equiv 0 \pmod 2; \\ \overline{L}_{2m-1}(q) & \text{при } r \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Так как класс W_q^r инвариантен относительно сдвига аргумента, то в определении $C_m(W_q^r)$ можно вместо нормы $\|f - S_{m-1}(\mathbf{f})\|$ взять отклонение $|f(0) - S_{m-1}(\mathbf{f}, 0)|$.

Применяя r раз преобразование Абеля, получим для дискретных коэффициентов Фурье 2π-периодической функции следующее выражение:

$$c_k = \frac{1}{q(1 - e^{ix_k})^r} \sum_{n=0}^{q-1} \Delta^r_{2\pi/q} f(x_n) e^{-kx_n i}, \quad k \ne 0.$$

Следовательно, подставляя значения $f(0)$, $S_{m-1}(\mathbf{f}, 0)$ и c_k, получим

$$C_m(W_q^r) = \sup_{f\in W_q^r} \frac{2}{q}\left|\sum_{n=0}^{q-1} \Delta^r_{2\pi/q} f(x_n) \sum_{k=m}^{[q/2]} \frac{\cos(\frac{\pi k(2n+r)}{q} + \frac{r\pi}{2})}{(2\sin\frac{\pi k}{2})^r}\right| + O(q^{-r}). \tag{16}$$

Допустим сначала, что $r \equiv 0 \pmod 2$. Из (16) следует

$$C_m(W_q^r) \le \frac{2^{r+1}\pi^r}{q^{r+1}} \sum_{n=0}^{q-1} \left|\sum_{k=m}^{[q/2]} \frac{\cos kx_n}{(2\sin x_k/2)^r}\right| + O(q^{-r}). \tag{17}$$

Обозначим

$$a_k = (2\sin x_k/2)^{-r}, \quad \Delta(k) = a_k - a_{k+1}, \quad \Delta^2(k) = \Delta(k) - \Delta(k+1),$$
$$B_m(n) = \sum_{k=m}^{[q/2]} a_k \cos kx_n, \quad D_j(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{j} \cos nx, \quad F_k(x) = \sum_{n=0}^{k} D_n(x).$$

Применяя дважды преобразование Абеля, получим

$$B_m(n) = -a_m D_{m-1}(x_n) + a_{[q/2]} D_{[q/2]}(x_n) + \\ + \sum_{k=m}^{[q/2]-2} \Delta^2(k) F_k(x_n) - \Delta(m) F_{m-1}(x_n) + \Delta([q/2]-1) F_{[q/2]-1}(x_n) \equiv \\ \equiv -a_m \frac{\sin(m-\frac{1}{2})x_n}{2\sin x_n/2} + G(n). \quad (18)$$

Так как $F_k(x) \geq 0$ и $\sum\limits_{n=0}^{q-1} F_k(x_n) = \frac{(k+1)q}{2}$, то

$$\frac{1}{q}\sum_{n=0}^{q-1}\sum_{k=m}^{[q/2]-2} \Delta^2(k) F_k(x_n) = \frac{1}{2}(m\Delta(m) - ([q/2]-1)\Delta([q/2]-1) + a_m - a_{[q/2]-1}).$$

Кроме того, $\Delta(k) = O(\frac{a_k}{k})$, $D_{[q/2]}(x_n) = O(1)$. Следовательно, будем иметь

$$\frac{1}{q}\sum_{n=0}^{q-1} |G(n)| = O(a_m). \quad (19)$$

Из (17)–(19) следует оценка сверху. Теперь докажем оценку снизу. Пусть

$$A = \{([o; [\tfrac{q}{4}] - 1] \cup [\tfrac{3q}{4} + 2; q-1]) \cap \mathbb{Z}\},$$
$$B = \{[0; q-1] \cap (\mathbb{Z} \setminus A)\}$$

— множество целых точек. Положим

$$\varphi(x_n) = \left(\frac{2\pi}{q}\right)^r \begin{cases} \operatorname{sign} \frac{\sin(m-\frac{1}{2})x_n}{\sin x_n/2}, & n \in A; \\ \frac{-\sum\limits_{j\in A} \varphi(x_j)}{|B|}, & n \in B, \end{cases}$$

где $|B|$ — число элементов B. Убедимся, что из условия $\sum\limits_{n=0}^{q-1} \varphi(x_n) = 0$ следует существование функции $f \in W_q^r$ такой, при которой $\Delta_{2\pi/q}^r f(x_n) = \varphi(x_n)$. Возьмем $f_1(x_n) = -\sum\limits_{k=0}^{n} \varphi(x_k) + C_1$, $n = 1, \dots, q-1$, $f_1(o) = C_1$ и выберем C_1 так, чтобы $\sum\limits_{n=0}^{q-1} f_1(x_n) = 0$. Ясно, что функцию f_1 можно продолжить как периодическую с периодом 2π и $\Delta_{2\pi/q} f(x_n) = \varphi(x_n)$. Далее возьмем

$$f_2(x_n) = -\sum_{k=0}^{n} f_1(x_k) + C_2, \quad n = 1, \dots, q-1,$$

$$f_2(o) = C_2, \quad \sum_{n=0}^{q-1} f_2(x_n) = 0$$

и т. д. Продолжая процесс, можно построить $\mathbf{f} = \{f(x_n)\}_{n=0}^{q-1}$ с периодом 2π так, чтобы $\Delta^r_{2\pi/q} f(x_n) = \varphi(x_n)$. Поэтому из (16) следует

$$C_m(W^r_q) \geq \frac{2}{q}\Big|\sum_{n=0}^{q-1}\varphi(x_n)B_m(n)\Big| + O\Big(\frac{a_m}{q^r}\Big).$$

Заметив, что $|\varphi(x_n)| \leq (\frac{2\pi}{q})^r$ и $\frac{\sin(m-\frac{1}{2})x_n}{\sin x_n/2} = O(1)$ при $n \in B$, из (18), (19) имеем

$$C_m(W^r_q) \geq \frac{a_m}{q}\Big(\frac{2\pi}{q}\Big)^r\Big(\sum_{n=0}^{q-1}\frac{|\sin(m-\frac{1}{2})x_n|}{\sin x_n/2} - \\ - 2\sum_{n\in B}\frac{|\sin(m-\frac{1}{2})x_n|}{\sin x_n/2}\Big) + O\Big(\frac{a_m}{q^r}\Big) = \Big(\frac{2\pi}{q}\Big)^r a_m(L_m(q) + O(1)).$$

Для четных r формула (16) установлена.

Пусть теперь $r \equiv 1 \pmod 2$. Обозначим

$$\varphi_0(x_n) = \Big(\frac{2\pi}{q}\Big)^r \operatorname{sign}\sum_{k=m}^{[q/2]}\frac{\sin(2n+r)\pi k/q}{(2\sin\frac{\pi k}{q})^r}.$$

Ясно, что $\sum\limits_{n=0}^{q-1}\varphi_0(n) = 0$. Поэтому существует функция $f \in W^r_q$ такая, что $\Delta^r_{2\pi/q} f(x_n) = \varphi_0(x_n)$. Следовательно, из (16) имеем

$$C_m(W^r_q) = \frac{2}{q}\Big(\frac{2\pi}{q}\Big)^r\sum_{n=0}^{q-1}|A_m(n)| + O\Big(\frac{a_m}{q^r}\Big), \tag{20}$$

где $A_m(n) = \sum\limits_{k=m}^{[q/2]}\frac{\sin 2\pi k(n+\frac{1}{2})/q}{(2\sin\frac{\pi k}{q})^r}$.

Применяя дважды преобразование Абеля, получим

$$A_m(n) = a_m\frac{\cos(2m-1)(n+\frac{1}{2})\pi/q}{2\sin(n+\frac{1}{2})/q} - \\ - a_{[q/2]}\frac{\cos([\frac{q}{2}]+\frac{1}{2})(2n+1)\pi/q}{2\sin\pi(n+\frac{1}{2})/q} + \frac{\Delta(m)\sin(2n+1)\pi m/q}{4\sin^2\pi(n+\frac{1}{2})/q} - \\ - \Delta([\tfrac{q}{2}]-1)\frac{\sin[\frac{q}{2}](2n+1)\pi/q}{4\sin^2\pi(n+\frac{1}{2})/q} - \sum_{k=m}^{[q/2]-2}\frac{\sin(k+1)(2n+1)\pi/q}{4\sin^2\pi(n+\frac{1}{2})/q}\Delta^2(k) \equiv \\ \equiv a_m\frac{\cos(2m-1)(n+\frac{1}{2})\pi/q}{2\sin\pi(n+\frac{1}{2})/q} + Q_m(n). \tag{21}$$

Заметив, что

$$\frac{\cos([\frac{q}{2}]+\frac{1}{2})(2n+1)\pi/q}{2\sin(n+\frac{1}{2})\pi/q} = \begin{cases} 0, & \text{если } q \equiv 1 \pmod 2; \\ \frac{(-1)^n}{2}, & \text{если } q \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

$$\sum_{n=[\frac{q}{2m-1}]+2}^{q-[\frac{q}{2m-1}]-3}\frac{|\sin(k+1)(2n+1)\pi/q|}{\sin^2\pi(n+\frac{1}{2})/q} = O(mq),$$

получим

$$\frac{2}{q}\sum_{n=[\frac{q}{2m-1}]+2}^{q-[\frac{q}{2m-1}]-3}|Q_m(n)| = O(a_m). \tag{22}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{q}\Bigg(\sum_{n=0}^{[\frac{q}{2m-1}]+1}|A_m(n)|+\sum_{n=q-[\frac{q}{2m-1}]-2}^{q-1}|A_m(n)|\le\frac{2}{q}\Bigg(\Big[\frac{q}{2m-1}\Big]+2\Bigg)\sum_{k=m}^{[q/2]}\frac{1}{(2\sin\frac{\pi k}{q})^r}=O(a_m). \quad (23)$$

Применяя (21)–(23), из (20) получим формулу (15) для нечетных r.

Так как $L_{2m_n-1}(q_n)=L_{q_n-(2m_n+1)}(q_n)+O(1)$ при $2m_n-1\ge q_n/2$ и $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \frac{2m_n-1}{q_n}\to\alpha}}\frac{\ln(q_n-2m_n+1)}{\ln(2m_n-1)}=1$ при $\alpha\ne 0;1$, то для завершения доказательства теоремы 3 осталось применить теоремы 1 и 2. $\square$

Литература

1. Kolmogoroff A.N. *Zur Grösenordung des Restgliedes Fourieschen Reihen differenzierbarer Funktionen* // Ann. Math. – 1935. – V. 36. – № 2. – P. 521–526.
2. Пинкевич В.Т. *О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1940. – Т. 4. – № 6. – С. 521–528.
3. Никольский С.М. *Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье* // ДАН СССР. – 1941. – Т. 32. – № 6. – С. 386–389.
4. Ефимов А.В. *Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1960. – Т. 24. – № 2. – С. 243–296.
5. Теляковский С.А. *Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье* // Матем. заметки. – 1968. – Т. 4. – № 3. – С. 291–300.
6. Стечкин С.Б. *Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1980. – Т. 145. – С. 126–151.
7. Григорян А.Л. *Дискретные константы Лебега* // Матем. заметки. – 1983. – Т. 34. – № 6. – С. 857–866.

Государственный инженерный университет Армении, департамент математики

Поступила 14.06.2001