И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2007 МАТЕМАТИКА № 12 (547)

УДК 514.76

В.И. ПАНЬЖЕНСКИЙ

ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ КАВАГУЧИ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

В данной работе установлена наибольшая размерность группы движений специальных пространств Кавагучи и указаны инвариантные характеристики максимально подвижных пространств.

1. Пространством Кавагучи называют n-мерное гладкое многообразие M, в котором длина s кривой $x(t)$ определяется интегралом [1]

$$s = \int L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(k)})dt, \tag{1}$$

где L — скалярная функция (лагранжиан) аргументов x^i, $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$, $\ddot{x}^i = \frac{d^2x^i}{dt^2}, \dots, {x^{(k)}}^i = \frac{d^kx^i}{dt^k}$ — координат k-скорости точки $x \in M$. Требуется, чтобы интеграл (1) принимал неотрицательные значения и не зависел от параметризации кривой.

Рассмотрим n-мерное (n четное) пространство Кавагучи, в котором метрика (1) определяется лагранжианом вида [2]

$$L(x, \dot{x}, \ddot{x}) = (\omega_{ij}(x)\dot{x}^i\ddot{x}^j + \gamma_{ijk}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k)^{\frac{1}{3}}, \tag{2}$$

где ω_{ij} — компоненты невырожденной дифференциальной 2-формы ω, задающей почти симплектическую структуру на M; $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, $\det\|\omega_{ij}\| \neq 0$, γ_{ijk} — совокупность функций, симметричная по всем индексам, определяющая дифференциально-геометрический объект γ, закон преобразования которого $\gamma_{i'j'k'} = \gamma_{ijk}\partial_{i'}x^i\partial_{j'}x^j\partial_{k'}x^k + \omega_{pq}\partial_{(i'}x^p\partial^2_{j'k')}x^q$ обеспечивает инвариантность лагранжиана $L(x, \dot{x}, \ddot{x})$ при замене координат $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$, $\dot{x}^{i'} = \dot{x}^i\partial_i x^{i'}$, $\ddot{x}^{i'} = \ddot{x}^i\partial_i x^{i'} + \dot{x}^i\dot{x}^j\partial^2_{ij}x^{i'}$.

Условия Цермело $\dot{x}^i\dot{\partial}_i L + 2\ddot{x}^i\ddot{\partial}_i L = L$, $\dot{x}^i\ddot{\partial}_i L = 0$ для лагранжиана (2) выполняются тождественно, поэтому интеграл (1) не зависит от параметризации кривой ($\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\dot{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$, $\ddot{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial \ddot{x}^i}$, $i, j, k, \dots = 1, \dots, n$).

2. Анализ уравнений Эйлера–Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} = 0$ позволяет присоединить к лагранжиану (2) связность $\overset{\circ}{\nabla}$ [1], [3]:

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} = \omega^{kp}\Big\{\frac{1}{3}(\partial_i\omega_{pj} + \partial_j\omega_{pi}) + \gamma_{ijp}\Big\}. \tag{3}$$

Несколько ранее аналогичную связность построил Э. Картан [4] для $n = 2$, изучая геометрию интеграла $\int F(x, y, y', y'')$.

Связность (3) не имеет кручения и, как легко проверить, обладает следующим свойством [3], [5]:

$$\overset{\circ}{\nabla}_i\omega_{jk} = (d\omega)_{ijk}, \tag{4}$$

где $(d\omega)_{ijk} = \partial_{[i}\omega_{jk]}$ — компоненты внешнего дифференциала $d\omega$ фундаментальной формы ω. Если $d\omega = 0$, т. е. почти симплектическая структура является симплектической, то связность $\overset{\circ}{\nabla}$, как следует из (4), согласована с ω. Если $d\omega \neq 0$, связность, согласованная с ω, необходимо имеет кручение. Действительно, условие согласованности $\nabla\omega = 0$ в локальных координатах имеет вид

$$\partial_k\omega_{ij} - \omega_{pj}\Gamma^p_{ki} - \omega_{ip}\Gamma^p_{kj} = 0, \tag{5}$$

где Γ^k_{ij} — коэффициенты связности $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k$. Циклируя (5) и складывая, получим

$$\omega_{pj}S^p_{ki} + \omega_{pi}S^p_{jk} + \omega_{pk}S^p_{ij} = \partial_k\omega_{ij} + \partial_i\omega_{jk} + \partial_j\omega_{ki}, \tag{6}$$

где $S^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ — компоненты тензора кручения $S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$. Из (6) следует, что если $d\omega \neq 0$, то и $S \neq 0$.

Имея связность $\overset{\circ}{\nabla}$ нетрудно построить связность ∇, согласованную с ω. Компоненты тензора кручения такой связности возьмем в виде

$$S^k_{ij} = \omega^{kp}(d\omega)_{ipj}, \tag{7}$$

где $\omega_{ip}\omega^{pj} = \delta^j_i$. Тогда

$$\Gamma^k_{ij} = \omega^{kp}\left\{\frac{1}{3}(\partial_i\omega_{pj} + \partial_j\omega_{pi}) + \frac{1}{2}(d\omega)_{ipj} + \gamma_{ijp}\right\} \tag{8}$$

и непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства (5). Построенную связность (8) назовем канонической метрической связностью. Компоненты тензора кривизны $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$:

$$R^l_{ijk} = \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ip}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^l_{jp}\Gamma^p_{ik}, \tag{9}$$

которые в силу определения обладают косой симметрией по первым двум индексам, а его ковариантные компоненты $R_{ijkl} = \omega_{lp}R^p_{ijk}$ являются симметричными по последним двум индексам, что немедленно следует, если расписать тождество Риччи для компонент фундаментальной формы ω. Поэтому справедливо очевидное тождество $\omega^{pq}R_{ijpq} = R^p_{ijp} = 0$, т. е. каноническая метрическая связность является эквиаффинной.

3. Векторное поле $X = \xi^k\partial_k$ на M является движением пространства Кавагучи (M,L), если производная Ли вдоль X от лагранжиана L обращается в нуль: $\text{Ł}_X L = 0$, или в локальных координатах

$$\xi^p\partial_p L + \dot{x}^p\partial_p\xi^l\dot{\partial}_l L + (\ddot{x}^p\partial_p\xi^l + \dot{x}^p\dot{x}^q\ddot{\partial}^2_{pq}\xi^l)\ddot{\partial}_l L = 0. \tag{10}$$

Подставляя (2) в (10), после несложных преобразований получим

$$\xi^p\partial_p\omega_{ij} + \partial_i\xi^p\omega_{pj} + \partial_j\xi^p\omega_{ip} = 0, \tag{11}$$

т. е. $\text{Ł}_X\omega = 0$ и

$$\xi^p\partial_p\gamma_{ijk} + \partial_i\xi^p\gamma_{pjk} + \partial_j\xi^p\gamma_{ipk} + \partial_k\xi^p\gamma_{ijp} + \partial^2_{(ij}\xi^p\omega_{k)p} = 0, \tag{12}$$

т. е. $\text{Ł}_X\gamma = 0$. Обратно, если справедливо (11) и (12), то имеет место и (10).

Лемма. *Любое инфинитезимальное движение пространства Кавагучи сохраняет присоединенную связность* $\overset{\circ}{\nabla}$.

Доказательство. В локальных координатах производная Ли вдоль X от коэффициентов связности Γ^k_{ij} имеет вид

$$\xi^p\partial_p\Gamma^k_{ij} + \partial_i\xi^p\Gamma^k_{pj} + \partial_j\xi^p\Gamma^k_{ip} - \partial_p\xi^k\Gamma^p_{ij} + \partial^2_{ij}\xi^k = 0. \tag{13}$$

Умножим (13) на ω_{lk} и учтем (11). В результате получим

$$\xi^p \partial_p \Gamma_{ijl} + \partial_i \xi^p \Gamma_{pjl} + \partial_j \xi^p \Gamma_{ipl} + \partial_l \xi^p \Gamma_{ijp} + \partial^2_{ij} \xi^p \omega_{lp} = 0, \tag{14}$$

где $\Gamma_{ijl} = \omega_{lk}\Gamma^k_{ij}$. Подставив в (14) вместо Γ_{ijl}

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{ijl} = \frac{1}{3}(\partial_i \omega_{lj} + \partial_j \omega_{li}) + \gamma_{ijl}$$

и учитывая (11) и (12), убеждаемся в справедливости (14), а следовательно, и (13).

Из выше изложенного следует, что если имеет место (11) и (13), то справедливо и (12). Кроме того, т. к. производная Ли коммутирует с внешним дифференциалом, то любое движение пространства Кавагучи сохраняет и каноническую метрическую связность (8). Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Векторное поле X является инфинитезимальным движением пространства Кавагучи ($L_X L = 0$) тогда и только тогда, когда оно является инфинитезимальным автоморфизмом почти симплектической структуры ω ($L_X \omega = 0$) и сохраняет каноническую метрическую связность ∇ ($L_X \nabla = 0$).*

Из этой теоремы, в частности, следует, что алгебра Ли инфинитезимальных движений пространства Кавагучи имеет конечную размерность.

4. Теорема 2. *Размерность r алгебры Ли инфинитезимальных изометрий n-мерного пространства Кавагучи не превосходит $\frac{n(n+3)}{2}$. Если $r = \frac{n(n+3)}{2}$, то базисное многообразие (M, ω, ∇) является локально аффинно-симплектическим пространством*: $d\omega = 0$, $R = 0$.

Доказательство. Как было показано, векторное поле X является инфинитезимальным движением пространства Кавагучи тогда и только тогда, когда $L_X \omega = 0$ и $L_X \nabla = 0$, где ω — фундаментальная 2-форма, ∇ — каноническая метрическая связность. В локальных координатах имеем уравнения (11) и (13). Заменяя в этих уравнениях частные производные ковариантыми и вводя новые неизвестные функции

$$\xi^k_j = \nabla_j \xi^k - \xi^p S^k_{jp}, \tag{15}$$

приведем уравнения (7) к виду

$$\xi_{ij} - \xi_{ji} = 0, \tag{16}$$

где $\xi_{ij} = \omega_{ip}\xi^p_j$, а уравнения (9) будут выглядеть в виде

$$\nabla_j \xi^k_l + \xi^p R^k_{pjl} = 0. \tag{17}$$

Таким образом, имеем смешанную систему дифференциальных уравнений в частных производных (15)–(17), разрешимую относительно первых производных от $n + n^2$ неизвестных функций ξ^k, ξ^k_j:

$$\partial_j \xi^k = \xi^k_j - \xi^p \Gamma^k_{pj}, \tag{18}$$

$$\partial_j \xi^k_l = \xi^k_p \Gamma^p_{jl} - \xi^p_l \Gamma^k_{jp} - \xi^p R^k_{pjl}. \tag{19}$$

Уравнения (16) накладывают на неизвестные функции $\frac{n(n-1)}{2}$ алгебраических условий. Поэтому общее решение $\xi^k(x)$ зависит не более чем от $n + n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$ произвольных постоянных, а значит, размерность r алгебры Ли инфинитезимальных движений не превосходит $\frac{n(n+3)}{2}$. Если условия интегрируемости уравнений (18) и (19) выполняются тождественно, то пространство Кавагучи максимально подвижно, т. е. $r = \frac{n(n+3)}{2}$. Рассмотрим условия интегрируемости уравнений (18) и (19).

Дифференцируя (18) по x^i, получим

$$\partial^2_{ij}\xi^k = \partial_i\xi^k_j - \partial_i\xi^p\Gamma^k_{pj} - \xi^p\partial_i\Gamma^k_{pj}. \qquad (20)$$

Меняя в (20) индексы i и j и приравнивая правые части ($\partial^2_{ij}\xi^k = \partial^2_{ji}\xi^k$), будем иметь

$$\partial_i\xi^k_j - \partial_i\xi^p\Gamma^k_{pj} - \xi^p\partial_i\Gamma^k_{pj} = \partial_j\xi^k_i - \partial_j\xi^p\Gamma^k_{pi} - \xi^p\partial_j\Gamma^k_{pi}. \qquad (21)$$

Учитывая (18) и (19), равенства (21) приведем к виду

$$\xi^k_p\Gamma^p_{ij} - \xi^p_j\Gamma^k_{ip} - \xi^pR^k_{pij} - \xi^p_i\Gamma^k_{pj} + \xi^p\Gamma^s_{pi}\Gamma^k_{sj} - \xi^p\partial_i\Gamma^k_{pj} = \xi^k_p\Gamma^p_{ji} - \xi^p_i\Gamma^k_{jp} - \xi^pR^k_{pji} - \xi^p_j\Gamma^k_{pi} + \xi^p\Gamma^s_{pj}\Gamma^k_{si} - \xi^p\partial_j\Gamma^k_{pi}$$

или

$$\begin{aligned}\xi^k_pS^p_{ij} - \xi^p_jS^k_{ip} - \xi^p_iS^k_{pj} - \xi^p(R^k_{pij} - R^k_{pji}) + \xi^p(\Gamma^q_{ip} + S^q_{pi})(\Gamma^k_{jq} + S^k_{qj}) -\\ - \xi^p\partial_i\Gamma^k_{jp} - \xi^p\partial_iS^k_{pj} - \xi^p(\Gamma^q_{jp} + S^q_{pj})(\Gamma^k_{iq} + S^k_{qi}) + \xi^p\partial_j\Gamma^k_{ip} + \xi^p\partial_jS^k_{ip} = 0,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\xi^k_pS^p_{ij} - \xi^p_jS^k_{ip} - \xi^p_iS^k_{pj} - \xi^p(R^k_{ijp} + R^k_{jpi} + R^k_{pij}) +\\ + \xi^p(S^q_{pi}\Gamma^k_{jq} + \Gamma^q_{ip}S^k_{qj} + S^q_{pi}S^k_{qj} - \partial_iS^k_{pj} - S^q_{pj}\Gamma^k_{iq} - \Gamma^q_{jp}S^k_{qi} - S^q_{pj}S^k_{qi} + \partial_jS^k_{pi}) = 0. \qquad (22)\end{aligned}$$

Так как $\xi^k_j = \omega^{kq}\xi_{qi}$, $\omega_{ip}\omega^{pj} = \omega_{pi}\omega^{jp} = \delta^j_i$, то (22) примет вид

$$\xi_{rq}(\omega^{rk}\delta^q_pS^p_{ij} - \omega^{rp}\delta^q_jS^k_{ip} - \omega^{rp}\delta^q_iS^k_{pj}) - \xi^p\nabla_pS^k_{ij} = 0, \qquad (23)$$

где $R^k_{ijp} + R^k_{jpi} + R^k_{pij} = \partial_iS^k_{jp} + \partial_jS^k_{pi} + \partial_pS^k_{ij} + \Gamma^k_{iq}S^q_{jp} + \Gamma^k_{jq}S^q_{pi} + \Gamma^k_{pq}S^q_{ij}$.

Равенства (23) должны выполняться для любых ξ^p и симметричных ξ_{rq}. Поэтому

$$\omega^{rk}\delta^q_pS^p_{ij} - \omega^{rp}\delta^q_jS^k_{ip} - \omega^{rp}\delta^q_iS^k_{pj} + \omega^{qk}\delta^r_pS^p_{ij} - \omega^{qp}\delta^r_jS^k_{ip} - \omega^{qp}\delta^r_iS^k_{pj} = 0 \qquad (24)$$

и $\nabla_pS^k_{ij} = 0$.

В равенствах (24) свернем r с i, а k с j, получим $S^j_{ij} = 0$ и, следовательно, $S^i_{ij} = 0$. Но $S^k_{ij} = \omega^{kp}(d\omega)_{ipj}$, поэтому

$$\omega^{kp}(d\omega)_{ipk} = 0, \quad \omega^{kp}(d\omega)_{kpj} = 0, \quad \omega^{kp}(d\omega)_{klp} = 0. \qquad (25)$$

Теперь равенства (24) умножим на $\omega_{lr}\omega_{mq}$. В результате получим

$$\delta^k_l\omega_{mp}S^p_{ij} - \omega_{mj}S^k_{il} - \omega_{mi}S^k_{lj} + \delta^k_m\omega_{lp}S^p_{ij} - \omega_{lj}S^k_{im} - \omega_{li}S^k_{mj} = 0. \qquad (26)$$

Свернув в (26) индексы k и l, с учетом (25) получим $(n-1)(d\omega)_{ijm} = 0$, т. е. $S^k_{ij} = 0$ и, следовательно, $d\omega = 0$.

Таким образом, условия интегрируемости уравнений (18) выполняются тогда и только тогда, когда тензор кручения канонической метрической связности равен нулю, т. е. фундаментальная 2-форма замкнута, и, следовательно, почти симплектическая структура является симплектической.

Рассмотрим теперь условия интегрируемости уравнений (19). Дифференцируя (19) по x^i, получим

$$\partial^2_{ij}\xi^k_l = \partial_i\xi^k_p\Gamma^p_{jl} + \xi^k_p\partial_i\Gamma^p_{jl} - \partial_i\xi^p_l\Gamma^k_{jp} - \xi^p_l\partial_i\Gamma^k_{jp} - \partial_i\xi^pR^k_{pjl} - \xi^p\partial_iR^k_{pjl}.$$

Меняя индексы i и j ($\partial^2_{ij}\xi^k_l = \partial^2_{ji}\xi^k_l$) и приравнивая правые части, будем иметь

$$\begin{aligned}\partial_i\xi^k_p\Gamma^p_{jl} + \xi^k_p\partial_i\Gamma^p_{jl} - \partial_i\xi^p_l\Gamma^k_{jp} - \xi^p_l\partial_i\Gamma^k_{jp} - \partial_i\xi^pR^k_{pjl} - \xi^p\partial_iR^k_{pjl} =\\ = \partial_j\xi^k_p\Gamma^p_{il} + \xi^k_p\partial_j\Gamma^p_{il} - \partial_j\xi^p_l\Gamma^k_{ip} - \xi^p_l\partial_j\Gamma^k_{ip} - \partial_j\xi^pR^k_{pil} - \xi^p\partial_jR^k_{pil}. \qquad (27)\end{aligned}$$

Подставив (18) и (19) в (27), получим

$$\begin{aligned}
&\xi^k_s\Gamma^s_{ip}\Gamma^p_{jl} - \xi^s_p\Gamma^k_{is}\Gamma^p_{jl} - \xi^s R^k_{sip}\Gamma^p_{jl} + \xi^k_p\partial_i\Gamma^p_{jl} - \xi^p_s\Gamma^s_{il}\Gamma^k_{jp} + \xi^s_l\Gamma^p_{is}\Gamma^k_{jp} + \\
&\qquad + \xi^s R^p_{sil}\Gamma^k_{jp} - \xi^p_l\partial_i\Gamma^k_{jp} - \xi^p_i R^k_{pjl} + \xi^s\Gamma^p_{is}R^k_{pjl} - \xi^p\partial_i R^k_{pjl} = \\
&\qquad = \xi^k_s\Gamma^s_{jp}\Gamma^p_{il} - \xi^s_p\Gamma^k_{js}\Gamma^p_{il} - \xi^s R^k_{sjp}\Gamma^p_{il} + \xi^k_p\partial_j\Gamma^p_{il} - \xi^p_s\Gamma^s_{jl}\Gamma^k_{ip} + \xi^s_l\Gamma^p_{js}\Gamma^k_{ip} + \\
&\qquad\qquad + \xi^s R^p_{sjl}\Gamma^k_{ip} - \xi^p_l\partial_j\Gamma^k_{ip} - \xi^p_j R^k_{pil} + \xi^s\Gamma^p_{js}R^k_{pil} - \xi^p\partial_j R^k_{pil}
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&-\xi^p\{\partial_i R^k_{pjl} - R^k_{sjl}\Gamma^s_{ip} - R^k_{pjs}\Gamma^s_{il} + R^s_{pjl}\Gamma^k_{is} - R^k_{psl}\Gamma^s_{ij}\} + \\
&\qquad + \xi^p\{\partial_j R^k_{pil} - R^k_{sil}\Gamma^s_{jp} - R^k_{pis}\Gamma^s_{jl} + R^s_{pil}\Gamma^k_{js} - R^k_{psl}\Gamma^s_{ji}\} + \\
&\qquad + \xi^k_p(\partial_i\Gamma^p_{jl} - \partial_j\Gamma^p_{il} + \Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^p_{js}\Gamma^s_{il}) - \\
&\qquad - \xi^p_l(\partial_i\Gamma^k_{jp} - \partial_j\Gamma^k_{ip} + \Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jp} - \Gamma^k_{js}\Gamma^s_{ip}) - \xi^p_i R^k_{pjl} + \xi^p_j R^k_{pil} = 0,
\end{aligned}$$

или

$$\xi^p(-\nabla_i R^k_{pjl} + \nabla_j R^k_{pil}) + \xi^k_p R^p_{ijl} - \xi^p_l R^k_{ijp} - \xi^p_i R^k_{pjl} + \xi^p_j R^k_{pil} = 0. \tag{28}$$

Равенства (28) представим в виде

$$\xi^p(-\nabla_i R^k_{pjl} + \nabla_j R^k_{pil}) + \xi_{sp}\omega^{ks}R^p_{ijl} - \xi_{sl}\omega^{ps}R^k_{ijp} - \xi_{si}\omega^{ps}R^k_{pjl} + \xi_{sj}\omega^{ps}R^k_{pil} = 0$$

или

$$\xi^p(-\nabla_i R^k_{pjl} + \nabla_j R^k_{pil}) + \xi_{sq}\{\omega^{ks}\delta^q_r R^r_{ijl} - \omega^{ps}\delta^q_l R^k_{ijp} - \omega^{ps}\delta^q_i R^k_{pjl} + \omega^{ps}\delta^q_j R^k_{pil}\} = 0,$$

или

$$\xi^p(-\nabla_i R^k_{pjl} + \nabla_j R^k_{pil}) + \xi_{sq}\omega^{ps}\{\delta^k_p R^q_{ijl} - \delta^q_l R^k_{ijp} - \delta^q_i R^k_{pjl} - \delta^q_j R^k_{ipl}\} = 0. \tag{29}$$

Равенства (29) должны выполняться для всех ξ^p и симметричных ξ_{sq}. Поэтому имеем $\nabla_i R^k_{pjl} - \nabla_j R^k_{pil} = 0$ и

$$\omega^{ps}\{\delta^k_p R^q_{ijl} - \delta^q_l R^k_{ijp} - \delta^q_i R^k_{pjl} - \delta^q_j R^k_{ipl}\} + \omega^{pq}\{\delta^k_p R^s_{ijl} - \delta^s_l R^k_{ijp} - \delta^s_i R^k_{pjl} - \delta^s_j R^k_{ipl}\} = 0.$$

В последних равенствах для удобства меняем слагаемые. В результате получим

$$\omega^{ps}\{\delta^k_p R^q_{ijl} - \delta^q_i R^k_{pjl} - \delta^q_j R^k_{ipl} - \delta^q_l R^k_{ijp}\} + \omega^{pq}\{\delta^k_p R^s_{ijl} - \delta^s_i R^k_{pjl} - \delta^s_j R^k_{ipl} - \delta^s_l R^k_{ijp}\} = 0. \tag{30}$$

Равенства (30) умножим на $\omega_{sm}\cdot\omega_{qr}$. В результате будем иметь

$$\delta^k_m R_{ijlr} - \omega_{ir}R^k_{mjl} - \omega_{jr}R^k_{iml} - \omega_{lr}R^k_{ijm} + \delta^k_r R_{ijlm} - \omega_{im}R^k_{rjl} - \omega_{jm}R^k_{irl} - \omega_{lm}R^k_{ijr} = 0. \tag{31}$$

В равенствах (31) свернув индексы k и m, учитывая, что тензор R_{ijkl} симметричен по последним двум индексам, получим

$$nR_{ijlr} - \omega_{ir}R^k_{kjl} + \omega_{jr}R^k_{kil} - R_{rjil} - R_{irjl} = 0. \tag{32}$$

Но т. к. связность теперь без кручения, то $R_{irjl} + R_{rjil} + R_{jirl} = 0$. Поэтому (32) примет вид

$$(n+1)R_{ijlr} - \omega_{ir}R^k_{kjl} + \omega_{jr}R^k_{kil} = 0. \tag{33}$$

Равенства (33) умножим на ω^{rl}, получим $R^k_{kij} = R^k_{kji}$. Поэтому $\omega^{ij}R^k_{kij} = R^{ki}_{ki} = 0$. Вернемся к (33) и умножим их на ω^{ql}. В результате получим

$$(n+1)R^q_{ijr} - \omega_{ir}R^{kq}_{kj} + \omega_{jr}R^{kq}_{ki} = 0. \tag{34}$$

Теперь, свернув в (34) индексы q и i, получим $(n+1)R^k_{kjr} - R^k_{kjr} = 0$, откуда $R^k_{kjr} = 0$, и из (33) следует $R_{ijlr} = 0$. $\square$

5. Напомним, что аффинное пространство $A(V)$ называется аффинно-симплектическим $AS(V)$, если его пространство переносов V является симплектическим векторным пространством. В симплектическом репере $\{O, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$: $\omega(e_\alpha, e_{n+\alpha}) = -\omega(e_{n+\alpha}, e_\alpha)$, равны единице, остальные — нулю. Матрица Грамма фундаментальной 2-формы ω имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Аффинное преобразование φ называется симплектическим, если линейное преобразование φ_* векторного пространства V является симплектическим: $\omega(\varphi_* u, \varphi_* v) = \omega(u, v)$. Для того чтобы аффинное преобразование φ было симплектическим, необходимо и достаточно, чтобы оно симплектический репер переводило в симплектический. Матрица S преобразования φ_* в этом случае удовлетворяет условию $S^T I S = I$ и называется симплектической. Аналитическое выражение группы симплектических преобразований в симплектических координатах содержит $\frac{n(n+3)}{2}$ параметров и имеет вид

$$\overline{x}^i = S^i_j x^j + S^i_0.$$

Поскольку максимально подвижные пространства Кавагучи являются локально аффинно-симплектическими ($d\omega = 0$, $R = 0$), то в некоторой окрестности каждой точки существуют аффинно-симплектические координаты (p_α, q^α), в которых фундаментальная 2-форма ω имеет канонический вид: $\omega = dp_\alpha \wedge dq^\alpha$, а $\Gamma^k_{ij} = 0$. Поэтому метрика максимально подвижного пространства Кавагучи и базисные операторы алгебры Ли его движений в аффинно-симплектических координатах имеют вид

$$S = \int |\dot{p}_\alpha \ddot{q}^\alpha - \ddot{p}_\alpha \dot{q}^\alpha|^{\frac{1}{3}} dt,$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\alpha}, \quad p_\beta \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - q^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\beta},$$

$$q^\beta \frac{\partial}{\partial p_\alpha} + q^\alpha \frac{\partial}{\partial p_\beta} \quad (\alpha < \beta), \quad q^\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \ \text{(по } \alpha \text{ нет суммирования)},$$

$$p_\beta \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + p_\alpha \frac{\partial}{\partial q^\beta} \quad (\alpha < \beta), \quad p_\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \ \text{(по } \alpha \text{ нет суммирования)}.$$

Литература

1. Kawaguchi A. *Geometry in an n-dimensional space with the arc length* $s = \int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1938. – V. 44. – P. 153–167.
2. Лосик М.В. *О пространствах Кавагучи, связанных с пространствами Клейна* // Тр. семин. по вект. и тензорн. анализу. – 1963. – Вып. XII. – С. 213–237.
3. Лемлейн В.Г. *О пространствах симметричной почти симплектической связности* // ДАН СССР. – 1957. – Т. 115. – № 4. – С. 655–698.
4. Cartan E. *La géométrie de l'integrale* $\int F(x, y, y', y'')dx$ // J. Math. Pura Appl. – 1936. – V. 15. – P. 42–69.
5. Левин Ю.И. *Об аффинных связностях, присоединенных к кососимметрическому тензору* // ДАН СССР. – 1959. – Т. 128. – № 4. – С. 668–671.

Пензенский государственный
педагогический университет

Поступила
20.04.2007