И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 11 (510)

УДК 514.763

А.А. УТКИН, А.М. ШЕЛЕХОВ

ТРИ-ТКАНИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ УРАВНЕНИЕМ РИККАТИ

Введение. В [1] было начато систематическое изучение специальных классов криволинейных три-тканей, определяемых простейшими соотношениями на относительные инварианты ткани. Доказано, что обращение в нуль одной из ковариантных производных кривизны b характеризует такие ткани, два семейства которых определяются обобщенными уравнениями Абеля вида

$$\frac{dy}{dx} = -ay^n + b(x)y^{n-2} + \cdots + c(x).$$

В [2] найдена аналитическая характеристика криволинейных три-тканей, определяемых произвольным линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Этот класс тканей характеризуется следующими соотношениями на ковариантные производные от кривизны ткани:

$$bb_{22} - (b_2)^2 = 0, \quad bb_{21} - b_1 b_2 - b^3 = 0.$$

В данной работе рассматривается три-ткань W, определяемая произвольным уравнением Риккати,

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x). \tag{1}$$

Эта ткань образована декартовой сетью и интегральными кривыми уравнения (1). Основным результатом данной статьи является

Теорема. *Инварианты криволинейных три-тканей, определяемых дифференциальным уравнением Риккати, и только таких криволинейных тканей удовлетворяют соотношению*

$$b_{222}b - b_{22}b_2 = 0. \tag{2}$$

Напомним, что три-ткань рассматривается с точностью до локальных диффеоморфизмов. Это означает, что параметры слоений ткани допускают гладкие монотонные замены. Иными словами, уравнение (1) определено с точностью до замен вида

$$x = \alpha(\widetilde{x}), \quad y = \alpha(\widetilde{y}), \tag{3}$$

и, кроме того, такое же преобразование можно делать с постоянной интегрирования — параметром третьего слоения ткани.

1. Согласно [3] зададим слоения λ_α ткани W уравнениями Пфаффа $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_1 + \omega_2 = 0$. Базисные формы $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega \tag{4}$$

и

$$d\omega = b\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{5}$$

где b есть так называемая кривизна три-ткани W.

Дифференцируя внешним образом уравнение (5) и применяя лемму Картана, придем к уравнению

$$db - 2b\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2. \tag{6}$$

При дифференцировании последнего уравнения аналогичным образом получим

$$db_1 - 3b_1\omega = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2, \quad db_2 - 3b_2\omega = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2, \tag{7}$$

причем входящие сюда функции связаны соотношением

$$b_{12} - b_{21} = 2b^2. \tag{8}$$

Функции $b, b_1, b_2, b_{11}, \dots, b_{22}$ суть относительные инварианты три-ткани W.

2. Итак, рассмотрим уравнение (1). С помощью изотопического преобразования вида (3) отличную от нуля функцию $f(x)$ можно сделать равной -1. Тогда уравнение (1) примет вид

$$dy + (y^2 + g(x)y + h(x))dx = 0. \tag{9}$$

Положим

$$\omega_1 = (y^2 + g(x)y + h(x))dx, \quad \omega_2 = dy. \tag{10}$$

Тогда уравнение (9), определяющее третье слоение ткани, примет вид $\omega_1 + \omega_2 = 0$, а это означает [3], что структурные уравнения рассматриваемой три-ткани W должны иметь вид (4)–(7).

Так как $d\omega_2 = 0$, то из (4) следует

$$\omega = \lambda\omega_2 = \lambda\, dy.$$

Дифференцируя форму ω_1, заданную первым уравнением (10), и пользуясь структурными уравнениями (4), найдем

$$\omega = -\frac{2y + g}{y^2 + g(x)y + h(x)}\omega_2.$$

Далее, дифференцируя последнее уравнение и сравнивая результат со структурным уравнением (5), найдем кривизну рассматриваемой ткани

$$b = \frac{g'y^2 + 2h'y + h'g - hg'}{(y^2 + g(x)y + h(x))^3}. \tag{11}$$

Если теперь продифференцировать это уравнение и воспользоваться уравнением (6), то найдем инвариант

$$b_2 = -\frac{(-2h' + gg')y^2 + 2(2g'h - gh')y + 2hh' - g^2h' + gg'h}{(y^2 + g(x)y + h(x))^4}. \tag{12}$$

Дифференцируя это уравнение и пользуясь уравнениями (7), найдем инвариант

$$b_{22} = \frac{g^2 - 4h}{(y^2 + g(x)y + h(x))^2}b. \tag{13}$$

Наконец, аналогичным образом найдем инвариант

$$b_{222} = \frac{1}{(y^2 + g(x)y + h(x))^6}[(gg' - 2h')y^2 + 2(2g'h - gh')y + 2hh' - g^2h' + gg'h](g^2 - 4h). \tag{14}$$

Исключая из уравнений (11)–(14) переменные g, h и т. д., получим соотношение (2). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

3. Обратно, рассмотрим три-ткань W, для которой выполняется соотношение (2), и докажем, что ей отвечает линейное дифференциальное уравнение Риккати.

Заметим сначала, что дифференциальное уравнение любой криволинейной три-ткани можно записать в виде $\omega_1 + \omega_2 = 0$, причем форма ω_1 пропорциональна dx, а форма ω_2 является полным дифференциалом: $\omega_2 = dy$. Тогда $d\omega_2 = 0$, откуда $\omega = k\omega_2 = k\, dy$. Продифференцировав это уравнение внешним образом и воспользовавшись структурными уравнениями (5), придем к уравнению $(dk - b\omega_1) \wedge dy = 0$. Отсюда находим

$$dk = b\omega_1 + p\,dy. \tag{15}$$

Соотношение (2) можно разрешить, введя параметр λ:

$$b_{22} = \lambda b, \quad b_{222} = \lambda b_2. \tag{16}$$

В результате уравнения (6)–(8) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} db &= b_1\omega_1 + (b_2 + 2bk)dy, \\ db_2 &= b_{21}\omega_1 + (\lambda b + 3b_2 k)dy, \\ db_{22} &= b_{221}\omega_1 + (\lambda b_2 + 4\lambda bk)dy, \\ db_{222} &= b_{2221}\omega_1 + (\lambda^2 b + 5\lambda b_2 k)dy. \end{aligned} \tag{17}$$

Если теперь продифференцировать первое из равенств (16) и воспользоваться третьим уравнением (17), то придем к дифференциальному уравнению

$$d\lambda = (\dots)\omega_1 + 2\lambda k\,dy. \tag{18}$$

Из этого уравнения получается два важных следствия. Во-первых, $\lambda_y = 2\lambda k$. Положив $\lambda = e^{2\varphi}$, получим $k = \varphi_y$. Во-вторых, умножив уравнение (18) внешним образом на форму ω_1, получим

$$d\lambda \wedge \omega_1 = 2\lambda k\,dy \wedge \omega_1 = -2\lambda\,d\omega_1$$

или

$$d\omega_1 = -(2\lambda)^{-1} d\lambda \wedge \omega_1 = \omega_1 \wedge d\varphi.$$

Решением этого уравнения будет форма

$$\omega_1 = e^{-\varphi}dx. \tag{19}$$

Подставляя найденные значения k и ω_1 уравнение (15), найдем выражение для кривизны: $b = e^{\varphi}\varphi_{xy}$. Из первого уравнения (17) видно, что $b_y = b_2 + 2bk$. Подставляя сюда найденные уже b и k, получим $b_2 = e^{\varphi}(\varphi_{xyy} - \varphi_{xy}\varphi_y)$. Из второго уравнения (17) имеем $b_{2y} = \lambda b + 3b_2 k$. Подставляя сюда b, b_2 и k, придем к дифференциальному уравнению на функцию φ:

$$\varphi_{xyyy} - \varphi_{xy}\varphi_{yy} + 2\varphi_{xy}\varphi_y^2 - e^{2\varphi}\varphi_{xy} - 3\varphi_y\varphi_{xyy} = 0. \tag{20}$$

Непосредственным вычислением доказываются следующие утверждения.

Лемма 1. *Уравнение* (20) *эквивалентно уравнению*

$$(e^{-2\varphi})_{xyyy} + 2\varphi_{xy} + 3(\varphi_y(e^{-2\varphi})_{xy})_y + 2(\varphi_x(e^{-2\varphi})_{yy})_y + 6((\varphi_y)^2(e^{-2\varphi})_x)_y = 0. \tag{21}$$

Лемма 2. *Уравнение* (21) *эквивалентно уравнению*

$$\left(\frac{u_{yy}}{u} + u^{-1} - \frac{3}{4}\left(\frac{u_y}{u}\right)^2\right)_x = \frac{\gamma(x)}{u}, \tag{22}$$

где

$$u = e^{-2\varphi}. \tag{23}$$

Лемма 3. *Уравнение* (21) *эквивалентно уравнению*

$$\left(\frac{1}{(t^2)_y}\left(-\frac{1}{t^2} + 4(t_y)^2\right)_y\right)_x = \frac{\gamma(x)}{t^4}, \tag{24}$$

где $\gamma(x)$ *— произвольная функция, а*

$$u = t^4. \tag{25}$$

Лемма 4. *Уравнение* (24) *эквивалентно уравнению*

$$\left(\frac{1}{z_y}\left(-\frac{1}{z}+\frac{(z_y)^2}{z}\right)_y\right)_x=\frac{\gamma(x)}{z^2}, \tag{26}$$

где

$$z=t^2. \tag{27}$$

Обозначим через $y=y(x,z)$ функцию, правую обратную для $z=z(x,y)$. Тогда $z_y=(y_z)^{-1}$ и уравнение (26) преобразуется к виду

$$\left(-\frac{1}{z}+\frac{1}{z(y_z)^2}\right)_{zx}=\frac{\gamma(x)}{z^2}.$$

Выражение, стоящее в левой части в скобках, зависит от переменных y, z и x. Поэтому, вводя вместо z переменную $v=z^{-1}$, получим

$$\gamma(x)v^2=\left(-v+\frac{v}{(y_z)^2}\right)_{xv}\frac{dv}{dz}.$$

Но $\frac{dv}{dz}=-v^2$, поэтому последнее уравнение принимает вид

$$\left(-v+\frac{v}{(y_z)^2}\right)_{xv}=-\gamma(x)$$

или

$$\left(\frac{v}{(y_z)^2}\right)_{xv}=-\gamma(x). \tag{28}$$

Обозначим правую часть через $\alpha'(x)$. Тогда, проинтегрировав (28) последовательно по x и v, получим $\left(\frac{v}{(y_z)^2}\right)_v=\alpha(x)$ и $\frac{v}{(y_z)^2}=\alpha(x)v+\beta(x)$. Разделив на v, получим $\frac{1}{(y_z)^2}=\alpha(x)+\beta(x)z$ или $\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{\alpha(x)+\beta(x)z}$. Это уравнение можно записать в виде $\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{\alpha(x)+\beta(x)z})=\frac{1}{2}\beta(x)$. Отсюда легко получаем $z=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$, где $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — произвольные гладкие функции.

Осталось найти уравнение третьего слоения рассматриваемой ткани. Как уже отмечалось, оно имеет вид $\omega_1+\omega_2=0$ или с учетом (19) $e^{-\varphi}dx+dy=0$. Из обозначений (23), (24) и (27) вытекает, что $e^{-\varphi}=z$, следовательно, уравнение рассматриваемой ткани есть уравнение Риккати общего вида. Теорема доказана.

Литература

1. Utkin A.A., Shelekhov A.M. *On local classification of curvilinear three-webs* // Webs and quasigroups. – Tver: 1998–1999. – P. 76–85.
2. Уткин А.А., Шелехов А.М. Три-ткани, определяемые линейным дифференциальным уравнением // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11. – С. 54–57.
3. Akivis M.A., Shelekhov A.M. *Geometry and algebra of multidimensional three-webs.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1992. – 375 p.

Орский гуманитарно-технологический институт

Тверской государственный университет

Поступила
02.03.2004