ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 1 (500)

УДК 517.977

А.С. БУЛДАЕВ

ПРОЕКЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ НЕЛОКАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ЛИНЕЙНО УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Введение

Для численного расчета задач оптимального управления традиционно применяют итерационные методы градиентного типа, игольчатого варьирования [1]–[3]. Улучшение по целевому функционалу на каждой итерации этих методов в общем случае обеспечивается лишь локально, т. е. в достаточно малой окрестности слабого или игольчатого варьирования управления. В некоторых классах задач от операции локального поиска улучшающего управления можно освободиться, что является существенным фактором повышения эффективности расчета задач. В [4], [5] предложены процедуры нелокального улучшения управления соответственно в линейных и квадратичных по состоянию системах управления. Платой за нелокальность улучшения в линейных по состоянию системах является необходимость решения задач Коши для системы дифференциальных уравнений с разрывной по состоянию правой частью. В квадратичных по состоянию системах платой уже является краевая задача для системы дифференциальных уравнений с разрывной по состоянию правой частью. Эта краевая задача значительно проще по свойствам гладкости, чем краевая задача принципа максимума. Для случая линейной по состоянию задачи оптимального управления краевая задача улучшения сводится к решению задач Коши и соответствующие процедуры улучшения [5] становятся эквивалентными процедурам из ([4], с. 14–15).

В данной работе предлагаются новые процедуры нелокального улучшения управления в линейной по управлению задаче оптимального управления

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T \{F_0(x(t),t) + \langle F_1(x(t),t), u(t)\rangle\} dt \to \min_{u\in V}, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = b(x(t),t) + A(x(t),t)u(t), \quad x(t_0) = x^0,\ u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{2}$$

в которой $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — вектор состояния, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ — вектор управления. Матричная функция $A(x,t)$, векторные функции $b(x,t)$, $F_1(x,t)$, функции $\varphi(x)$, $F_0(x,t)$ являются квадратичными по x с коэффициентами, непрерывно зависящими от t, на множестве $R^n \times T$. В качестве множества допустимых управлений $u(t)$, $t \in T$, рассматривается класс V кусочно-непрерывных функций со значениями в выпуклом замкнутом множестве $U \subset R^m$. Равенство для допустимых управлений понимается с точностью до множества нулевой меры на интервале T. Начальное состояние x^0 и промежуток управления T заданы. Используется следующая система обозначений: $\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение векторов x, y; $\|x\|$ — норма вектора x в евклидовом пространстве; A^T — матрица, транспонированная к матрице A; $\Delta_z q(x,u,\dots) = q(z,u,\dots) - q(x,u,\dots)$, $\Delta_v q(x,u,\dots) = q(x,v,\dots) - q(x,u,\dots)$, $\Delta_{z,v} q(x,u,\dots) = q(z,v,\dots) - q(x,u,\dots)$ — частные приращения функции q конечного числа аргументов; q_x, q_u, q_{xx}, q_{uu}, q_{xu} — частные производные функции q соответственно первого и второго порядка по аргументам x, u.

Трудоемкость нелокального улучшения на каждой итерации используемых проекционных процедур определяется решением краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, которая в отличие от [5] является непрерывной по состоянию. Для линейных по x функций $A(x,t)$, $b(x,t)$, $F_1(x,t)$, $\varphi(x)$, $F_0(x,t)$ решение краевой задачи сводится к решению непрерывных по состоянию задач Коши и процедуры становятся эквивалентными соответствующим проекционным методам [4], [6].

Основой проекционных процедур нелокального улучшения для задачи (1), (2) являются специальные точные (без остаточных членов) формулы приращения целевого функционала.

2. Условия оптимальности. Формулы приращения функционала

В задаче (1), (2) функция Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in R^n$ имеет следующую структуру по управлению: $H(\psi,x,u,t) = H_0(\psi,x,t) + \langle H_1(\psi,x,t),u\rangle$, где $H_0(\psi,x,t) = \langle \psi, b(x,t)\rangle - F_0(x,t)$, $H_1(\psi,x,t) = A^T(x,t)\psi - F_1(x,t)$. Стандартная сопряженная система имеет вид

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t),x(t),u(t),t), \quad t \in T. \tag{3}$$

Для допустимого управления $v \in V$ обозначим через $x(t,v)$, $t \in T$, решение системы (2) при $u(t) = v(t)$, $x(t_0,v) = x^0$, а через $\psi(t,v)$, $t \in T$, — решение системы (3) при $u(t) = v(t)$, $x(t) = x(t,v)$, $\psi(t_1,v) = -\varphi_x(x(t_1,v))$.

Принцип максимума для управления $u \in V$ в задаче (1), (2) представляется в виде

$$\langle H_1(\psi(t,u),x(t,u),t), w - u(t)\rangle \le 0, \quad w \in U, \quad t \in T. \tag{4}$$

Обозначим через

$$P_U(z) = \arg\min_{w\in U}(\|w - z\|), \quad z \in R^m,$$

оператор проектирования на множество U.

Аналогично [4] для допустимого управления $u \in V$ образуем векторную функцию

$$u^\alpha(\psi,x,t) = P_U(u(t) + \alpha H_1(\psi,x,t)), \quad \psi, x \in R^n, \quad t \in T, \quad \alpha > 0.$$

На основании условия Липшица для оператора P_U функция u^α непрерывна по совокупности $(\psi,x) \in R^n \times R^n$ и кусочно-непрерывна по $t \in T$. Согласно известному свойству проекции имеет место неравенство

$$\langle H_1(\psi,x,t), u^\alpha(\psi,x,t) - u(t)\rangle \ge \frac{1}{\alpha}\|u^\alpha(\psi,x,t) - u(t)\|^2. \tag{5}$$

Функцию u^α можно представить также в следующем виде:

$$u^\alpha(\psi,x,t) = \arg\max_{w\in U}(H(\psi,x,w,t) - \frac{1}{2\alpha}\|w - u(t)\|^2). \tag{6}$$

Принцип максимума (4) для управления $u \in V$ можно записать в форме

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t,u),x(t,u),t), \quad t \in T. \tag{7}$$

Отметим, что для выполнения (4) достаточно проверить условие (7) хотя бы для одного α. Обратно, из условия (4) следует выполнение (7) при всех $\alpha > 0$.

Следуя [5], введем модифицированную сопряженную систему в задаче (1), (2)

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t),x(t),u(t),t) - \frac{1}{2}H_{xx}(p(t),x(t),u(t),t)y(t). \tag{8}$$

Для допустимых управлений u^0, $v \in V$ обозначим через $p(t,u^0,v)$, $t \in T$, решение системы (8) при $u(t) = u^0(t)$, $x(t) = x(t,u^0)$, $y(t) = x(t,v) - x(t,u^0)$, $p(t_1,u^0,v) = -\varphi_x(x(t_1,u^0)) - \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x(t_1,u^0))(x(t_1,v) - x(t_1,u^0))$. Отметим очевидное равенство $p(t,u^0,u^0) = \psi(t,u^0)$, $t \in T$.

В соответствии с [5] первая и вторая точные формулы приращения целевого функционала в задаче (1), (2) принимают следующий вид:

$$\Delta_v \Phi(u^0) = -\int_T \langle H_1(p(t,u^0,v), x(t,v),t), v(t) - u^0(t)\rangle dt, \tag{9}$$

$$\Delta_v \Phi(u^0) = -\int_T \langle H_1(p(t,v,u^0), x(t,u^0),t), v(t) - u^0(t)\rangle dt. \tag{10}$$

Используя (9), (10), построим процедуры улучшения для управления u^0 на основе операции проектирования.

3. Процедуры улучшения

Поставим задачу об улучшении управления u^0: найти управление $v \in V$ с условием $\Delta_v \Phi(u^0) \le 0$.

Первая процедура улучшения.

1. Для заданного $\alpha > 0$ найдем решение $(x^\alpha(t), p^\alpha(t))$, $t \in T$, краевой задачи

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^\alpha(p(t), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{11}$$

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t,u^0), u^0(t), t) - \frac{1}{2} H_{xx}(p(t), x(t,u^0), u^0(t), t)(x(t) - x(t,u^0)),$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1,u^0)) - \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x(t_1,u^0))(x(t_1) - x(t_1,u^0)). \tag{12}$$

2. Сформируем управление $v^\alpha(t) = u^\alpha(p^\alpha(t), x^\alpha(t), t)$, $t \in T$.

Предположим, что решение краевой задачи (11), (12) (возможно, не единственное) существует на интервале T. Обоснуем свойство улучшения. Поскольку $x^\alpha(t) = x(t, v^\alpha)$, $p^\alpha(t) = p(t, u^0, v^\alpha)$, $t \in T$, то

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(p(t,u^0,v^\alpha), x(t,v^\alpha), t), \quad t \in T. \tag{13}$$

Отсюда на основании (5) имеем

$$\langle H_1(p(t,u^0,v^\alpha), x(t,v^\alpha), t), v^\alpha(t) - u^0(t)\rangle \ge \frac{1}{\alpha}\|v^\alpha(t) - u^0(t)\|^2.$$

После интегрирования по $t \in T$ с учетом (9) получаем оценку уменьшения целевого функционала

$$\Phi(v^\alpha) - \Phi(u^0) \le -\frac{1}{\alpha}\int_T \|v^\alpha(t) - u^0(t)\|^2 dt. \tag{14}$$

Таким образом, выходное управление v^α, в силу $\alpha > 0$, обеспечивает невозрастание целевого функционала с оценкой (14).

Рассмотрим множество $V_1^\alpha(u^0)$ управлений на выходе первой процедуры улучшения, характеризуемых равенством (13). Если $u^0 \in V_1^\alpha(u^0)$ хотя бы для одного $\alpha > 0$, то $u^0(t) = u^\alpha(\psi(t,u^0), x(t,u^0), t)$, $t \in T$, т.е. управление u^0 удовлетворяет принципу максимума. Обратно, если u^0 удовлетворяет принципу максимума, то оно определяется условием (13) при $v^\alpha = u^0$ для всех $\alpha > 0$. Следовательно, $u^0 \in V_1^\alpha(u^0)$. Таким образом, верна

Лемма. *Управление $u^0 \in V$ удовлетворяет принципу максимума тогда и только тогда, когда $u^0 \in V_1^\alpha(u^0)$ хотя бы для одного $\alpha > 0$.*

Следствие. Если краевая задача улучшения не имеет решения хотя бы для одного $\alpha > 0$, то управление u^0 не удовлетворяет принципу максимума.

Необходимое условие оптимальности, эквивалентное принципу максимума, можно сформулировать следующим образом: для оптимальности управления u^0 в задаче (1), (2) необходимо, чтобы $u^0 \in V_1^\alpha(u^0)$ хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Оценка (14) гарантирует строгое улучшение управления u^0 (в том числе удовлетворяющего принципу максимума) при условии $v^\alpha \neq u^0$, $v^\alpha \in V_1^\alpha$. Таким образом, случай неединственности решения краевой задачи улучшения обеспечивает строгое улучшение управления u^0, удовлетворяющего принципу максимума.

Оценка (14) позволяет сформулировать новое необходимое условие оптимальности (условие неулучшения) на основе первой процедуры улучшения: для оптимальности управления u^0 в задаче (1), (2) необходимо, чтобы оно было единственным управлением на выходе процедуры для всех $\alpha > 0$, т. е.

$$\{u^0\} = V_1^\alpha(u^0), \quad \alpha > 0. \tag{15}$$

Понятно, что принцип максимума является следствием (15). Это означает, что первая процедура может улучшать управления, удовлетворяющие принципу максимума и не удовлетворяющие условию (15).

Переформулируем условия оптимальности в терминах решения краевой задачи (11), (12).

Принцип максимума. Для оптимальности управления u^0 в задаче (1), (2) необходимо, чтобы пара $(x(t,u^0), \psi(t,u^0))$ была решением краевой задачи (11), (12) хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Условие неулучшения. Для оптимальности управления u^0 в задаче (1), (2) необходимо, чтобы пара $(x(t,u^0), \psi(t,u^0))$ была единственным решением краевой задачи (11), (12) для всех $\alpha > 0$.

Трудоемкость построения улучшающего управления определяется трудоемкостью решения гладкой краевой задачи (11), (12), которая в общем случае существенно проще, чем разрывная по состоянию краевая задача в процедурах [5].

В линейной по состоянию задаче (1), (2) (функции $A(x,t)$, $b(x,t)$, $F_1(x,t)$, $\varphi(x)$, $F_0(x,t)$ линейны по x) краевая задача (11), (12) сводится к двум гладким задачам Коши для фазовой и сопряженной переменных. В этом случае процедуры становятся эквивалентными проекционным методам [4], [6]. При этом фазовая и сопряженная задачи Коши имеют единственные решения $x^\alpha(t), p^\alpha(t), t \in T$, которые однозначно определяют выходное управление $v^\alpha(t)$, $t \in T$, для любого заданного $\alpha > 0$. Потеря свойства неединственности решения в линейной по состоянию задаче (1), (2) означает, что управления, удовлетворяющие принципу максимума, строго не улучшаются первой процедурой. Таким образом, в данном линейном случае условие неулучшения и принцип максимума равнозначны.

Отметим, что краевая задача (11), (12) в линейной по состоянию задаче (1), (2) приобретает свойство существования решения. Это свойство и оценка (14) гарантируют строгое улучшение первой процедурой любого управления, не удовлетворяющего принципу максимума.

В нелинейной по состоянию задаче (1), (2) возможен случай, когда краевая задача (11), (12) не имеет решения. Это означает, что управление u^0 не удовлетворяет принципу максимума. В этом случае используемая процедура не действует и нужно перейти к другим процедурам улучшения.

Опишем альтернативную процедуру улучшения, основанную на формуле (10) приращения функционала.

Вторая процедура улучшения.

1. Для заданного $\alpha > 0$ определим функцию

$$\overline{u}^\alpha(p,t) = u^\alpha(p, x(t,u^0), t), \quad p \in R^n, \quad t \in T.$$

2. Найдем решение $(x^\alpha(t), p^\alpha(t))$, $t \in T$, краевой задачи

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \overline{u}^\alpha(p(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{16}$$

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), \overline{u}^\alpha(p(t), t), t) - \frac{1}{2} H_{xx}(p(t), x(t), \overline{u}^\alpha(p(t), t), t)(x(t, u^0) - x(t));$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) - \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x(t_1))(x(t_1, u^0) - x(t_1)). \tag{17}$$

3. Сформируем управление $v^\alpha(t) = \overline{u}^\alpha(p^\alpha(t), t)$, $t \in T$.

В случае существования решения краевой задачи (16), (17) имеем $x^\alpha(t) = x(t, v^\alpha)$, $p^\alpha(t) = p(t, v^\alpha, u^0)$, $t \in T$; $v^\alpha(t) = u^\alpha(p(t, v^\alpha, u^0), x(t, u^0), t)$, $t \in T$. Отсюда на основании (5)

$$\langle H_1(p(t, v^\alpha, u^0), x(t, u^0), t), v^\alpha(t) - u^0(t)\rangle \geq \frac{1}{\alpha}\|v^\alpha(t) - u^0(t)\|^2.$$

После интегрирования по $t \in T$ с учетом (10) получаем оценку (14) уменьшения целевого функционала вместе с аналогичными первой процедуре утверждениями по свойствам улучшения и принципу максимума.

Выделим связь предлагаемых проекционных процедур улучшения с нелокальными процедурами улучшения [5]. В соответствии со свойством (6) функции u^α, проекционные процедуры в задаче (1), (2) адекватны процедурам [5] после регуляризации задачи по управлению с функционалом

$$\Phi^\alpha(u) = \Phi(u) + \frac{1}{2\alpha}\int_T \|u(t) - u^0(t)\|^2 dt.$$

Оптимальное значение α в проекционных процедурах улучшения соответствует минимуму оценки (14) по $\alpha > 0$. Поскольку соответствующая задача в общем случае аналитически неразрешима, то можно использовать следующие эвристические рекомендации [6]. В задачах с оптимальным управлением разрывного типа целесообразно использовать стратегию увеличения α от 1. Стратегия уменьшения α от 1 оправдывает себя в задачах с непрерывным решением.

Проиллюстрируем возможность строгого улучшения особого управления первой процедурой в линейно-квадратичной задаче (функции $A(x,t)$, $b(x,t)$ линейны по x). Проекционные методы [4], [6] таким свойством не обладают.

Рассмотрим семейство задач с параметром $t_1 > 0$

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(t)dt \ \rightarrow \ \min,$$
$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad u(t) \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, t_1].$$

В данном случае функция Понтрягина $H = \psi u + \frac{1}{2}x^2$, стандартная сопряженная система $\dot{\psi}(t) = -x(t)$, модифицированная сопряженная система $\dot{p}(t) = -x(t) - \frac{1}{2}y(t)$.

Поставим задачу строгого улучшения особого управления $u^0(t) = 0$, $t \in T$, которому соответствует фазовая траектория $x(t, u^0) = 0$, $t \in T$, значение функционала $\Phi(u^0) = 0$, сопряженная траектория $\psi(t, u^0) = 0$, $t \in T$. Отображение u^α, $\alpha > 0$, имеет вид

$$u^\alpha(\psi, x, t) = P_U(\alpha\psi) = \begin{cases} -1, & \alpha\psi < -1; \\ 1, & \alpha\psi > 1; \\ \alpha\psi, & -1 \leq \alpha\psi \leq 1. \end{cases}$$

Применим первую процедуру улучшения. Краевая задача улучшения принимает вид

$$\dot{x}(t) = u^\alpha(p(t), x(t), t), \quad x(0) = 0;$$
$$\dot{p}(t) = -\frac{1}{2}x(t), \quad p(t_1) = 0.$$

Очевидно, для любого $\alpha > 0$ пара $(x(t,u^0),\psi(t,u^0))$, $t \in T$, является решением краевой задачи, т. е. u^0 удовлетворяет принципу максимума. Покажем, что существуют моменты $t_1 > 0$, для которых краевая задача допускает решение, отличное от указанного. Подберем решение, удовлетворяющее условию $-\frac{1}{\alpha} \leq p(0) \leq \frac{1}{\alpha}$.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\dot{x}(t) = \alpha p(t), \quad x(0) = 0;$$
$$\dot{p}(t) = -\frac{1}{2}x(t), \quad -\frac{1}{\alpha} \leq p(0) \leq \frac{1}{\alpha},$$

имеющую решение $p(t) = p(0)\cos\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t$, $x(t) = \sqrt{2\alpha}p(0)\sin\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t$. Поскольку при всех $t > 0$ выполняется $-\frac{1}{\alpha} \leq p(t) \leq \frac{1}{\alpha}$, то решение задачи Коши будет удовлетворять краевой задаче в случае выполнения краевого условия $p(t_1) = p(0)\cos\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t_1 = 0$. Отсюда следует, что для любого заданного $\alpha > 0$ существует множество конечных моментов $t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2\alpha}} + \pi\sqrt{\frac{2}{\alpha}}k$, $k = 0,1,2,\ldots$, для которых краевая задача допускает ненулевое решение при $p(0) \neq 0$, $-\frac{1}{\alpha} \leq p(0) \leq \frac{1}{\alpha}$. Соответствующее выходное управление $v^\alpha(t) = \alpha p(0)\cos\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t$, $t \in T$, строго улучшает особое управление $u^0(t) = 0$, $t \in T$.

Данный пример демонстрирует следующие особенности процедур улучшения.

1. Управление, удовлетворяющее принципу максимума, является решением краевой задачи улучшения для любого $\alpha > 0$.

2. Возможность неединственного решения краевой задачи улучшения.

3. Возможность строгого улучшения управления, удовлетворяющего принципу максимума, что обуславливается неединственностью решения краевой задачи.

4. Заключение

Выделим основные особенности, характеризующие проекционные процедуры улучшения.

1. Нелокальность улучшения управления без процедуры варьирования по малому параметру.

2. Возможность строгого улучшения управления, удовлетворяющего принципу максимума (в том числе, особого управления). Такая возможность реализуется через неединственность решения краевой задачи улучшения.

3. Процедуры позволяют сформулировать новые необходимые условия оптимальности (условия неулучшения) управления, дополняющие и усиливающие принцип максимума в изучаемом классе задач.

4. Трудоемкость улучшения определяется трудоемкостью решения гладкой краевой задачи, которая в общем случае существенно проще краевой задачи с разрывной по состоянию правой частью в нелокальных процедурах [5].

5. Проекционные процедуры, в отличие от процедур [5], не требуют ограниченности множества U. В частности, при $U = R^m$ получаем нелокальные процедуры улучшения для задачи (1), (2) без ограничений на управление.

6. В линейной по состоянию задаче (1), (2) краевая задача улучшения распадается на две задачи Коши для фазовых и сопряженных переменных. В этом случае процедуры становятся эквивалентными проекционным методам [4], [6].

7. В линейно-квадратичных задачах (1), (2) процедуры могут улучшать управления, удовлетворяющие принципу максимума. Проекционные методы [4], [6] таким свойством не обладают.

Литература

1. Федоренко Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* – М.: Наука, 1978. – 487 с.

2. Любушин А.А., Черноусько Ф.Л. *Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления* // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернет. – 1983. – № 2. – С. 147–159.
3. Васильев О.В. *Лекции по методам оптимизации.* – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994. – 342 с.
4. Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
5. Булдаев А.С. *Нелокальное улучшение управлений в динамических системах, квадратичных по состоянию* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 12. – С. 3–9.
6. Антоник В.Г., Срочко В.А. *Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 4. – С. 564–572.

Бурятский государственный университет

Поступила
18.03.2003