ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 517.957

С.Л. ТОНКОНОГ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛОЖА

1. В настоящей работе с помощью методов приближенного группового анализа изучаются уравнения

$$u_t = (u^2\sigma^n + \varepsilon \cdot k(u,\sigma))_x, \quad \sigma = uu_x. \tag{1.1}$$

Уравнения вида (1.1) возникают, например, при моделировании одномерного течения пленки неньютоновской жидкости по горизонтальному ложу с проскальзыванием. В этом случае неизвестная функция $u(t,x)$ — толщина пленки в точке x в момент времени t, n — показатель степени в реологическом законе, второе слагаемое в правой части (1.1) описывает эффект проскальзывания, ε — параметр, который во многих случаях можно считать малым (в задачах проскальзывания в безразмерном уравнении (1.1) имеем $\varepsilon \approx 0.15$). Точные симметрии и инвариантные решения уравнения (1.1) при $\varepsilon = 0$ (т.е. в отсутствии проскальзывания) как для одномерного случая, так и для двумерных задач с круговой симметрией исследованы в [1]–[3]. Применяемая в данной работе методика базируется, как в работах [1]–[3], на классическом групповом анализе [4], т.к. наше исследование ограничивается точечными группами. Это естественно для рассматриваемого класса уравнений, поскольку даже для уравнения теплопроводности с источником его группа Ли–Беклунда [5] как правило (с двумя исключениями) тривиальна [6]. Их групповой анализ сводится к классификации точечных симметрий (групп Ли), выполненной для нелинейного уравнения теплопроводности без источника Л.В. Овсянниковым [7], а при наличии источника В.А. Дородницыным [8]. Предлагаемая работа может рассматриваться как продолжение этих работ по изучению приближенных симметрий с малым параметром, общая теория которых построена в [9], [10]. Так как уравнение (1.1) моделирует течение лишь с точностью $O(\varepsilon^2)$, то естественно с той же точностью рассматривать и его приближенные симметрии. Классификация уравнений вида (1.1), допускающих группу приближенных симметрий, приведена в пп. 2, 3. В п. 4 указаны приближенно-инвариантные решения с точностью $o(\varepsilon^2)$ для уравнений, полученных в пп. 2, 3 и представляющих наибольший интерес для динамики неньютоновских жидкостей. Для сокращения дальнейших записей удобно обозначить

$$t = y_1, \quad x = y_2, \quad u = y_3, \quad \sigma = y_4, \quad u_t = y_5, \quad u_x = y_6, \quad \sigma_t = y_7, \quad \sigma_x = y_8$$

и переписать уравнение (1.1) в виде

$$F_0^1 + \varepsilon F_1^1 = 0, \quad F_0^2 + \varepsilon F_1^2 = 0, \tag{1.2}$$

где

$$F_0^1 = 2y_3y_6y_4^n + ny_3^2y_4^{n-1}y_8 - y_5, \quad F_0^2 = y_3y_6 - y_4,$$
$$F_1^1 = \frac{\partial k}{\partial y_3}y_6 + \frac{\partial k}{\partial y_4}y_8, \quad F_1^2 \equiv 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 94-01-01191).

В [1] показано, что невозмущенное уравнение $F_0^1 = 0$, $F_0^2 = 0$, получающееся из (1.1) при $\varepsilon = 0$, допускает четырехпараметрическую группу Ли с инфинитезимальными операторами $X^0 = \xi_0^k \frac{\partial}{\partial y_k}$,

$$
\begin{aligned}
&X_1^0 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad X_2^0 = \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad X_3^0 = y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_2\frac{\partial}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial}{\partial y_3},\\
&X_4^0 = (n+1)y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial}{\partial y_2} - y_4\frac{\partial}{\partial y_4}.
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

2. Согласно алгоритму построения операторов приближенной симметрии для возмущенных уравнений, предложенному в [9], [10], каждый из операторов (1.3) порождает оператор приближенной симметрии (с точностью $O(\varepsilon^2)$)

$$
X = X^0 + \varepsilon\xi_1^k\frac{\partial}{\partial y_k},
$$

причем коэффициенты инфинитезимальных операторов и функция $k(y_3, y_4)$ находятся из определяющих уравнений, которые для системы уравнений (1.2) запишутся в виде

а) в случае оператора X_1^0

$$
\xi_1^k\frac{\partial F_0^2}{\partial y_k} = \xi_1^3 y_6 + \xi_1^6 y_3 - \xi_1^4 = 0, \tag{2.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_1^k\frac{\partial F_0^1}{\partial y_k} = \xi_1^3(2y_6y_4^n + 2ny_3y_4^{n-1}) + \xi_1^4(2ny_3y_6y_4^{n-1} + n(n-1)y_8y_3^2y_4^{n-2}) -\\
- \xi_1^5 + 2\xi_1^6 y_3y_4^n + n\xi_1^8 y_3^2 y_4^{n-1} = 0;
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

b) в случае оператора X_2^0 определяющие уравнения снова записываются в виде (2.1), (2.2);

c) в случае оператора $X_3^0 + \lambda X_4^0$ имеем уравнение (2.1), а вместо уравнения (2.2) получаем уравнение

$$
\begin{aligned}
\xi_1^k\frac{\partial F_0^1}{\partial y_k} = -y_3y_6\frac{\partial^2 k}{(\partial y_3)^2} + (\lambda y_4y_6 - y_3y_8)\frac{\partial^2 k}{\partial y_3\partial y_4} +\\
+ \lambda y_4y_8\frac{\partial^2 k}{(\partial y_4)^2} + (1-\lambda n)y_6\frac{\partial k}{\partial y_3} + (2+\lambda-\lambda n)y_8\frac{\partial k}{\partial y_4}.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Определяющие уравнения (2.1)–(2.3) должны выполняться на многообразии $F_0^1 = 0$, $F_0^2 = 0$. Коэффициенты ξ_1^k связаны между собой формулами продолжения [4]

$$
\begin{aligned}
\xi_1^5 &= D_1\xi_1^3 - y_5D_1\xi_1^1 - y_6D_1\xi_1^2,\\
\xi_1^6 &= D_2\xi_1^3 - y_5D_2\xi_1^1 - y_6D_2\xi_1^2,\\
\xi_1^8 &= D_2\xi_1^4 - y_7D_2\xi_1^1 - y_8D_2\xi_1^2,
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

где

$$
D_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} + y_5\frac{\partial}{\partial y_3} + y_7\frac{\partial}{\partial y_4}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial y_2} + y_6\frac{\partial}{\partial y_3} + y_8\frac{\partial}{\partial y_4}
$$

(формула для ξ_1^7 нам не понадобится). Отметим важный для дальнейшего факт независимости от $y_5, \ldots, y_8$ коэффициентов $\xi_1^1, \ldots, \xi_1^4$, т.к. рассматриваем лишь точечные симметрии уравнения (1.1), кроме того, правая часть в (2.3) не зависит от y_1, y_2, что также играет далее важную роль.

В предельно краткой форме изложим для случая а) методику решения системы уравнений (2.1), (2.2), (2.4) для коэффициентов ξ_1^k. Подставляя ξ_1^6 из (2.4) в (2.1) и расщепляя полученное соотношение по y_8, y_8^2, получим

$$\frac{\partial\xi_1^1}{\partial y_4}=0,\quad \frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_4}-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_4}y_6-n\Big(\frac{\partial\xi_1^1}{\partial y_2}+y_6\frac{\partial\xi_1^1}{\partial y_3}\Big)y_3^2y_4^{n-1}=0. \tag{2.5}$$

С помощью (2.1) нетрудно преобразовать (2.2) к виду

$$(2n\xi_1^3y_3y_4^{n-1}+n(n-1)\xi_1^4y_3^2y_4^{n-2})y_8+2(n+1)\xi_1^4y_4^n-\xi_1^5+n\xi_1^8y_3^2y_4^{n-1}=0. \tag{2.6}$$

Расщепляя (2.6) по y_7 (от y_7 зависят ξ_1^5 и ξ_1^8), найдем

$$-\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_4}+\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_4}y_6-n\Big(\frac{\partial\xi_1^1}{\partial y_2}+y_6\frac{\partial\xi_1^1}{\partial y_3}\Big)y_3^2y_4^{n-1}=0.$$

Сопоставляя это равенство с (2.5), получим $\xi_1^1=\varphi(y_1)$, φ — произвольная функция, причем

$$y_6\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_4}=\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_4}. \tag{2.7}$$

Формулы продолжения (2.4) теперь принимают вид

$$\begin{aligned}
\xi_1^5&=\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_1}+(2y_4^{n+1}+ny_3^2y_4^{n-1}y_8)\Big(\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_3}-\varphi'-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_3}y_6\Big)-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_1}y_6,\\
\xi_1^6&=\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_2}+\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_3}y_6-\Big(\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_2}+\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_3}y_6\Big)y_6,\\
\xi_1^8&=\frac{\partial\xi_1^4}{\partial y_2}+\frac{\partial\xi_1^4}{\partial y_3}y_6+\Big(\frac{\partial\xi_1^4}{\partial y_4}-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_2}-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_3}y_6\Big)y_8-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_4}y_8^2.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.6) и расщепляя полученное равенство по y_8, y_8^2, получим

$$\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_4}=0,\quad 2\xi_1^3y_4+(n-1)\xi_1^4y_3-\Big(\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_3}-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_2}-\frac{\partial\xi_1^4}{\partial y_4}-\varphi'\Big)y_3y_4=0, \tag{2.9}$$

причем соотношения (2.6), (2.1) теперь запишутся в виде

$$2(n+1)\xi_1^4y_4^n-\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_1}+\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_1}y_6-2\Big(\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_3}-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_3}y_6-\varphi'\Big)y_4^{n+1}+n\Big(\frac{\partial\xi_1^4}{\partial y_2}+\frac{\partial\xi_1^4}{\partial y_3}y_6\Big)y_3^2y_4^{n-1}=0, \tag{2.10}$$

$$\xi_1^3y_4-\xi_1^4y_3+\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_2}y_3^2+\Big(\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_2}-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_2}\Big)y_3y_4-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_3}y_4^2=0. \tag{2.11}$$

Так как ξ_1^2, ξ_1^3 не зависят в силу (2.9) и (2.7) от y_4, то из (2.11) следует

$$\xi_1^4=y_4^2\chi_1+y_4\chi_2+\chi_3, \tag{2.12}$$

причем

$$y_3\chi_1=-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_3},\quad y_3\chi_2=\xi_1^3+\Big(\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_3}-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_2}\Big)y_3,\quad \chi_3=y_3\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_2}, \tag{2.13}$$

χ_1, χ_2, χ_3 могут зависеть лишь от y_1, y_2, y_3. Подставляя (2.12) в (2.9) и расщепляя полученное соотношение по степеням y_4, получим

$$\chi_1=\chi_3=0,\quad \xi_1^4=y_4\chi_2, \tag{2.14}$$

$$2\xi_1^3+\Big(n\chi_2+\varphi'-\frac{\partial\xi_1^3}{\partial y_3}-\frac{\partial\xi_1^2}{\partial y_2}\Big)y_3=0. \tag{2.15}$$

После подстановки (2.14) в (2.10) получим, полагая $y_6 = y_4 y_3^{-1}$ с учетом равенства $F_0^2 = 0$ и расщепляя по степеням y_4,

$$\xi_1^2 = \theta(y_2),$$

θ — произвольная функция, $\frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} = 0$, $\xi_1^3 = \tau(y_3)$, τ — произвольная функция,

$$2(n+1)\chi_2 + ny_3 \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3} - 2(\tau' - \varphi') = 0. \tag{2.16}$$

Дифференцируя (2.15) по y_1, найдем теперь

$$\chi_2 = \mu(y_3) - \varphi'/n, \tag{2.17}$$

μ — произвольная функция. После подстановки (2.17) в (2.16) и (2.15) получим

$$2(n+1)\mu + ny_3\mu' - 2\tau' = 2\varphi'/n, \quad 2\tau + ny_3\mu - y_3\tau' = y_3\theta_2',$$

откуда легко следует $\varphi = c_1 y_1 + c_2$, $\theta = c_3 y_2 + c_4$, $c_1, \ldots, c_4$ — произвольные константы, и

$$2(n+1)\mu + ny_3\mu' - 2\tau' = 2c_1/n, \quad 2\tau + ny_3\mu - y_3\tau' = c_3 y_3. \tag{2.18}$$

Решение системы (2.18) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\mu = c_5 y_3^{\alpha_1} + c_6 y_3^{\alpha_2} + (2n+1)^{-1}(n^{-1}c_1 + c_3),\\
&\tau = n(c_5(\alpha_1 - 1)^{-1} y_3^{\alpha_1+1} + c_6(\alpha_2 - 1)^{-1} y_3^{\alpha_2+1}) + (2n+1)^{-1}((n+1)c_3 - c_1)y_3,
\end{aligned}$$

где α_1, α_2 — корни уравнения $n\alpha^2 + (2-n)\alpha - 2(2n+1) = 0$, c_5, c_6 — произвольные константы. В силу (2.17) имеем теперь

$$\chi_2 = c_5 y_3^{\alpha_1} + c_6 y_3^{\alpha_2} + (2n+1)^{-1}(c_3 - 2c_1).$$

После подстановки этого выражения во второе из соотношений (2.13) получим $c_5 = c_6 = 0$. Итак, окончательно находим

$$\xi_1^1 = c_1 y_1 + c_2, \quad \xi_1^2 = c_3 y_2 + c_4, \quad \xi_1^3 = (2n+1)^{-1}((n+1)c_3 - c_1)y_3, \quad \xi_1^4 = (2n+1)^{-1}(c_3 - 2c_1)y_3,$$

ξ_1^5, ξ_1^6, ξ_1^7, ξ_1^8 находятся по формулам продолжения.

Мы получили, что уравнение (1.1) с произвольной функцией $k(u,\sigma)$ допускает с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенную группу симметрии с оператором

$$X_1 = (1 + \varepsilon t)\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\Big(cx\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(n+1)c - 1}{2n+1}u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{c-2}{2n+1}\sigma\frac{\partial}{\partial \sigma}\Big). \tag{2.19}$$

Аналогично найдем, что это уравнение допускает с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенную группу с оператором

$$X_2 = (1 + \varepsilon cx)\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\Big(t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{(n+1)c - 1}{2n+1}u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{c-2}{2n+1}\sigma\frac{\partial}{\partial \sigma}\Big). \tag{2.20}$$

3. Значительно более сложным оказывается случай b). Приведем лишь окончательный результат. Уравнение (1.1) приближенно инвариантно относительно приближенной группы с оператором

$$X(\lambda) = X_3^0 + \lambda X_4^0 + \varepsilon\Big(\xi_1^1\frac{\partial}{\partial t} + \xi_1^2\frac{\partial}{\partial x} + \xi_1^3\frac{\partial}{\partial u} + \xi_1^4\frac{\partial}{\partial \sigma}\Big), \tag{3.1}$$

где

$$
\begin{aligned}
&\xi_1^1 = c_1t^2 + c_2t + c_3,\\
&\xi_1^2 = -\int u\chi_1(u)du + c_4t + c_5x^2 + c_6x + c_7,\\
&\xi_1^3 = -\frac{2c_1t}{2n+1}u + \frac{2(n+1)}{2n+1}c_3xu + u\nu(u),\\
&\xi_1^4 = \sigma^2\chi_1(u) + \sigma\chi_2 + \frac{2(n+1)}{2n+1}c_5u^2,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

χ_1, ν — произвольные функции, $c_1, \ldots, c_7$ — произвольные константы и

$$
\chi_2 = -\frac{4c_1t}{2n+1} + 2\nu(u) + u\nu' + \frac{2c_5x}{2n+1} - c_6.
$$

Функция $k(u,\sigma)$ в рассматриваемом случае определяется из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
nu^2\sigma^{n-2}\Big[(2n+1)\sigma\nu + (n-1)u\sigma\nu' + (n+1)\sigma^2\chi_1 + \frac{2(n^2-1)}{2n+1}c_5u^2 - \sigma((n+1)c_6 - c_2)\Big] =\\
= -u\frac{\partial^2k}{\partial u\partial\sigma} + \lambda\sigma\frac{\partial^2k}{\partial\sigma^2} + (2-\lambda(n-1))\frac{\partial k}{\partial\sigma},
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
u\sigma^{n-1}\Big[2n\sigma^2\chi_1 + nu\sigma^2\chi_1' + 2(2n+1)\sigma\nu + 5nu\sigma\nu' + nu^2\sigma\nu'' + \frac{2n+4(n+1)(2n+1)}{2n+1}c_5u^2 -\\
- 2\sigma((n+1)c_6 - c_2)\Big] + c_4 + \frac{2c_1u^2}{(2n+1)\sigma} = -u\frac{\partial^2k}{\partial u^2} + \lambda\sigma\frac{\partial^2k}{\partial u\partial\sigma} + (1-\lambda n)\frac{\partial k}{\partial u}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Сформулируем полученные в пп. 2, 3 результаты классификации приближенных симметрий уравнения (1.1).

Теорема. *Уравнение* (1.1) *с произвольной функцией* $k(u,\sigma)$ *допускает с точностью* $O(\varepsilon^2)$ *приближенные группы симметрии с операторами* (2.19) *и* (2.20). *В случае, когда функция* $k(u,\sigma)$ *удовлетворяет уравнениям* (3.3), (3.4), *уравнение* (1.1) *допускает с точностью* $O(\varepsilon^2)$ *и приближенную группу симметрий с оператором* (3.1), *коэффициенты которого определяются из соотношений* (3.2).

Будем искать решение системы уравнений (3.3), (3.4) в виде

$$
k = a(u)\sigma^{n+1} + b(u)\sigma^n + c(u)\sigma^{n-1} + \frac{c_4}{1-\lambda n}u,
\tag{3.5}
$$

где коэффициенты $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ подлежат определению. Подставляя (3.5) в (3.3), получим после расщепления по степеням σ

$$
(2+\lambda)a - ua' = nu^2\chi_1,
\tag{3.6}
$$

$$
2b - ub' = (2n+1)u^2\nu + (n-1)u^3\nu' - u^2((n+1)c_6 - c_2),
\tag{3.7}
$$

$$
(2-\lambda)c - uc' = \frac{2n(n+1)}{2n+1}c_5u^4.
\tag{3.8}
$$

Аналогично после подстановки (3.5) в (2.4) и расщепления по степеням σ найдем $c_1 = 0$ и следующие уравнения для коэффициентов a, b, c

$$
-ua'' + (1+\lambda)a' = n(2u\chi_1 + u^2\chi_1),
\tag{3.9}
$$

$$
-ub'' + b' = 2(2n+1)u\nu + 5nu^2\nu' + nu^3\nu'' - 2u((n+1)c_6 - c_2),
\tag{3.10}
$$

$$
-uc'' + (1-\lambda)c' = \frac{2n+4(n+1)(2n+1)}{2n+1}c_5u^3.
\tag{3.11}
$$

Таким образом, получили шесть уравнений (3.6)–(3.11) для определения трех неизвестных функций a, b, c. Уравнение (3.9) является, однако, следствием уравнения (3.6) (получается из него дифференцированием по u). Условием совместности (3.7) и (3.10) является

$$u\nu'' + 2\nu' = 0, \tag{3.12}$$

а из (3.8) и (3.11) следует $c_5 = 0$. Из (3.12), (3.6), (3.7), (3.8) находим

$$\nu = c_8 + c_9 u^{-1}, \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered} a = c_{10}u^{2+\lambda} - nu^{2+\lambda}\int u^{-1-\lambda}\chi_1 du, \\ b = (n+2)c_9 u + c_{11}u^2 - [(2n+1)c_8 - (n+1)c_6 - c_2]u^2 \ln u, \quad c = c_{12}u^{2-\lambda}, \end{gathered} \tag{3.14}$$

где $c_8, \ldots, c_{12}$ — произвольные константы. Таким образом, уравнение (1.1), в котором функция $k(u,\sigma)$ определена равенством (3.5) с коэффициентами a, b, c из (3.14), допускает с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенную группу симметрий с оператором (3.1), в котором операторы X_3^0, X_4^0 задаются соотношениями (1.5), а коэффициенты ξ_1^k, $k = \overline{1,4}$, — соотношениями (3.2), причем $c_1 = c_5 = 0$, а функция ν определена в (3.13).

В теории проскальзывания функция $k(u,\sigma)$ выбирается обычно в виде (модель Кэмба [11])

$$k(u,\sigma) = u\sigma^m. \tag{3.15}$$

Для $k(u,\sigma)$, определенной равенством (3.15), правая часть соотношения (3.3) принимает вид $m(1+\lambda(m-n))u\sigma^{m-1}$, а правая часть соотношения (3.4) равна $(1+\lambda(m-n))\sigma^m$. Следовательно, при $\lambda = (n-m)^{-1}$ обе правые части обращаются в нуль. Нетрудно проверить, что равны нулю и левые части соотношений (3.3), (3.4), если

$$c_1 = c_4 = c_5 = c_9 = 0, \quad \nu = c_8, \tag{3.16}$$

причем

$$(2n+1)c_8 = (n+1)c_6 - c_2. \tag{3.17}$$

Таким образом, уравнение (1.1) с функцией k, определенной равенством (3.15), при любом m допускает с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенную группу симметрии с оператором (3.2), где $\lambda = (n-m)^{-1}$,

$$\xi_1^1 = t, \quad \xi_1^2 = cx, \quad \xi_1^3 = \frac{(n+1)c-1}{2n+1}u, \quad \xi_1^4 = \frac{c-2}{2n+1}\sigma \tag{3.18}$$

(не уменьшая общности, положили $c_2 = 1$ и обозначили $c_6 = c$, затем воспользовались соотношением (3.17)).

Отдельно рассмотрим случай $m = n+1$. В этом случае соотношения (3.3), (3.4) оказываются справедливыми и при произвольном λ, если выполнены равенства (3.16) и

$$\chi_1 = \frac{1+\lambda}{nu}.$$

Таким образом, в случае $k = u\sigma^{n+1}$ уравнение (1.1) допускает с точностью $O(\varepsilon^2)$ и приближенную группу с оператором (3.2), где

$$\xi_1^1 = c_1 t, \quad \xi_1^2 = c_2 x - \frac{1+\lambda}{nu}u, \quad \xi_1^3 = c_3 u, \quad \xi_1^4 = (2c_3 - c_2)\sigma + \frac{(1+\lambda)\sigma^2}{nu}.$$

4. Построим приближенное с точностью $O(\varepsilon^2)$ решение уравнения (1.1), инвариантное относительно приближенной группы с оператором (2.19). Вычисляя инварианты группы, найдем, что это решение следует искать в виде

$$u = f_1(I)(1+\varepsilon t)^{\frac{(n+1)c-1}{2n+1}}, \quad \sigma = f_2(I)(1+\varepsilon t)^{\frac{c-2}{2n+1}}, \quad I = x(1+\varepsilon t)^{-c}, \tag{4.1}$$

где функции f_1, f_2 подлежат определению из условия, что невязка, возникающая после подстановки (4.1) в уравнение (1.1), равна $O(\varepsilon^2)$. С помощью простых выкладок, которые опускаем, нетрудно убедиться, что это условие будет выполнено тогда и только тогда, когда функции f_1, f_2 удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений ($'$ — дифференцирование по I)

$$f_2 = f_1 f_1', \quad (f_1^2 f_2^n + \varepsilon k(f_1, f_2))' + \varepsilon c I f_1' + \varepsilon \frac{(n+1)c-1}{2n+1} f_1 = 0.$$

При $\varepsilon = 0$ построенное решение совпадает со стационарным решением невозмущенного уравнения $u_t = (u^{n+2} u_x^n)_x$.

Рассмотрим теперь уравнение (1.1) с функцией $k(u,\sigma)$ вида (3.15), допускающее приближенную группу симметрии с оператором (3.1), где $\lambda = (n-m)^{-1}$, а коэффициенты ξ_1^k определены равенствами (3.18), (3.17). Вычисляя инварианты группы, найдем, что приближенное с точностью $O(\varepsilon^2)$ инвариантное решение следует искать в виде

$$u = f_1(I) t^{\frac{2n+1+\varepsilon((n+1)c-1)}{(2n+1)(1+2(n+1)+\varepsilon)}}, \quad \sigma = f_2(I) t^{\frac{\varepsilon(c-2)-\lambda(2n+1)}{(2n+1)(1+\lambda(n+1)+\varepsilon)}}, \quad I = x t^{-\frac{2+\lambda+\varepsilon c}{1+\lambda(n+1)+\varepsilon}}, \tag{4.2}$$

f_1, f_2 — неизвестные функции. Подстановка (4.2) в уравнение (1.1) с учетом соотношения (3.17) приводит к невязке, равной $O(\varepsilon^2)$, тогда и только тогда, когда неизвестные функции f_1, f_2 удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} f_2 = f_1 f_1', \\ (f_1^2 f_2^n + \varepsilon f_1 f_2^m)' + \frac{2n-2m+1+\varepsilon(n-m)c}{2n-m+1+\varepsilon(n-m)} I f_1' - \frac{2n+1+\varepsilon((n+1)c-1)}{(2n+1)(2n-m+1+\varepsilon(n-m))} f_1 = 0. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Замечание. Если кроме (3.17) выполняется еще и соотношение

$$c = \frac{2n+1-2m}{2n+1-m}, \tag{4.4}$$

то построенное решение (4.2) с функциями f_1, f_2, удовлетворяющими уравнению (4.3), оказывается не приближенным, а точным решением уравнения (4.1) ($k = u\sigma^m$). Это решение точно инвариантно относительно оператора $X(\lambda)$ (3.1) с $\lambda = (n-m)^{-1}$ и коэффициентами ξ_1^k, определенными в (3.18). Из (3.1), (4.4) следует

$$\begin{gathered} \frac{2n-2m+1+\varepsilon(n-m)c}{2n-m+1+\varepsilon(n-m)} = \frac{2n+1-2m}{2n+1-m}, \\ \frac{2n+1+\varepsilon((n+1)c-1)}{(2n+1)(2n-m+1+\varepsilon(n-m))} = \frac{1}{2n+1-m}. \end{gathered}$$

С учетом этих соотношений (4.3) превращается в уравнение

$$(f_1^2 f_2^n + \varepsilon f_1 f_2^m)' + \frac{2n+1-2m}{2n-m+1} I f_1' - \frac{1}{2n-m+1} f_1 = 0, \tag{4.5}$$

а оператор X после умножения на постоянный множитель

$$\frac{(n-m)(2n+1-m)}{2n+1-m+\varepsilon(n-m)}$$

— в инфинитезимальный оператор

$$X = (2n+1-m)t\frac{\partial}{\partial t} + (2n+1-2m)x\frac{\partial}{\partial x} + (n-m)u\frac{\partial}{\partial u} - \sigma\frac{\partial}{\partial \sigma} \tag{4.6}$$

группы, точно допускаемой уравнением (1.1) с $k = u\sigma^m$. Оператор (4.6) и уравнение (4.5) были ранее получены в работе [1].

Аналогично с помощью оператора X_2 из (2.20) нетрудно построить для уравнения (1.1) с произвольной $k(u,\sigma)$ приближенное с точностью $O(\varepsilon^2)$ инвариантное решение

$$u = f_1(I)t^{\frac{(n+1)c-1}{2n+1}}, \quad \sigma = f_2(I)t^{\frac{c-2}{2n+1}},$$

где

$$f_1 = dI^{\frac{(n+1)c-1}{(2n+1)c}}, \quad f_2 = \varepsilon c d^2 I^{\frac{c-2}{(2n+1)c}}, \quad I = (1+\varepsilon cx)t^{-c}.$$

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность В.А. Чугунову и Л.Д. Эскину за внимание к работе.

Литература

1. Саламатин А.Н., Чугунов В.А., Мазо А.Б. *Численные и инвариантные решения задачи о динамике субизотермического ледника в одномерном приближении* // Задачи механики природных процессов. – М., 1983. – С. 82–95.
2. Чугунов В.А. *О групповых свойствах уравнения, описывающего течение ледников* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 10. – С. 84–87.
3. Чугунов В.А., Ахмедова Ф.Х. *Групповые свойства и инвариантные решения уравнения, описывающего двумерное течение ледников* // ПМТФ. – 1987. – № 1. – С. 84–89.
4. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978.
5. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Наука, 1983. – 280 с.
6. Дородницын В.А., Свирщевский С.Р. *О группах Ли–Беклунда, допускаемых уравнением теплопроводности с источником* // Препринт. Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1983. – № 101. – 28 с.
7. Овсянников Л.В. *Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности* // ДАН СССР. – 1959. – Т. 125. – № 3. – С. 492–495.
8. Дородницын В.А. *Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1982. – Т. 22. – № 6. – С. 1393–1400.
9. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Приближенные симметрии* // Матем. сб. – 1988. – Т. 136. – вып. 4. – С. 435–450.
10. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Методы возмущений в групповом анализе* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1989. – Т. 34. – С. 84–147.
11. Kamb B. *Sliding motion of glaciers, theory and observation* // Reviews of geophysics and space physics. – 1970. – V. 8. – № 4. – P. 673–728.

Казанский государственный университет

Поступила
15.03.1995