

## *Дифракция Френеля*

Цель работы: изучить дифракцию Френеля на простейших преградах: круглом отверстии, прямолинейном крае полуплоскости и щели.

### Решаемые задачи:

- приобрести навыки юстировки оптических схем для наблюдения дифракции Френеля;
- пронаблюдать дифракцию Френеля на круглом отверстии и определить его радиус;
- пронаблюдать дифракцию Френеля на прямолинейном крае полуплоскости;
- пронаблюдать дифракцию Френеля на щели.

### Оптические элементы и аппаратура:

- ✓ лазер;
- ✓ линза с фокусным расстоянием  $F = 5$  мм;
- ✓ линза с фокусным расстоянием  $F = 50$  мм;
- ✓ линза с фокусным расстоянием  $F = 100$  мм;
- ✓ экран с отверстиями;
- ✓ предмет с прямолинейным краем;
- ✓ экран;
- ✓ оптическая скамья;
- ✓ рейтеры (держатели линз и других элементов оптической схемы);
- ✓ измерительная линейка или рулетка.

**Дифракция света** — это совокупность физических явлений, обусловленных волновой природой света и наблюдаемых при его распространении в среде с резко выраженной оптической неоднородностью (например, при прохождении через отверстия в экранах, вблизи границ непрозрачных тел и т.п.). В более узком плане под дифракцией понимают огибание светом различных препятствий, т.е. отклонение от законов геометрической оптики.

Точная теория дифракции даже для простых случаев представляет собой сложную в математическом отношении задачу. Простым и наглядным методом приближенного решения задач дифракции является метод, основанный *на принципе Гюйгенса–Френеля*. Он состоит из двух утверждений:

1. Каждая точка, в которую пришла волна от источника, можно принять за центр вторичных сферических волн.
2. Вторичные источники когерентны (дополнение Френеля).

Согласно дополнению Френеля дифракционные явления следует рассматривать как *результат интерференции* вторичных волн.

Окружим точечный монохроматический источник  $S$  произвольной поверхностью  $\sigma$  (рис. 1). В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля напряженность поля в точке  $P$  за объектом определяется суперпозицией волн

от вторичных источников  $d\sigma$ , расположенных на поверхности  $\sigma$ . При этом амплитуда и фаза вторичной сферической волны, приходящей в точку  $P$ , зависит как от расстояния  $\rho$  от  $S$  до вторичного источника  $d\sigma$ , так и от расстояния  $R$  от  $d\sigma$  до точки  $P$ .

Напряженность поля, создаваемого источником  $S$  в точке расположения вторичного источника равна [1]:

$$dA = \frac{E'_0}{\rho} e^{ik\rho} d\sigma_n,$$

где  $E'_0$  - постоянная,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число,  $d\sigma_n$  - проекция площади  $d\sigma$  на плоскость, перпендикулярную  $\vec{k}$ . Множитель  $\frac{e^{ik\rho}}{\rho}$  описывает сферическую волну, распространяющуюся из точки  $S$  до вторичного источника.

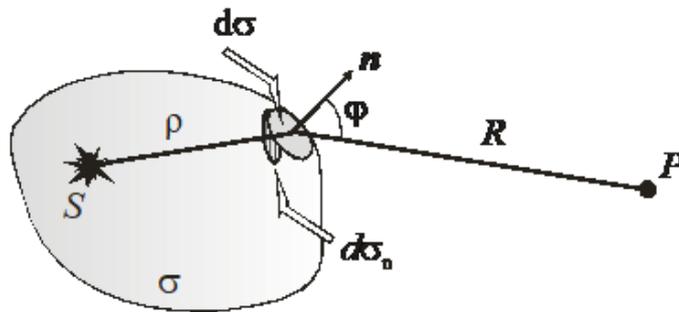


Рис. 1. К математической записи принципа Гюйгенса-Френеля.

При вычислении вклада  $dE_p$  вторичного источника в амплитуду напряженности  $E_p$  поля в точке  $P$  нужно учесть изменение амплитуды и фазы вторичной волны при её распространении от  $d\sigma$  к  $P$ . Это приводит к появлению множителя  $\frac{e^{ikR}}{R}$ :

$$dE_p = K(\varphi) \left( \frac{E'_0}{\rho} e^{ik\rho} \right) \frac{e^{ikR}}{R} d\sigma_n.$$

$K(\varphi)$  - «коэффициент наклона», учитывающий зависимость амплитуды вторичных волн от угла  $\varphi$  между  $\vec{k}$  и направлением на точку наблюдения.

Полное световое поле в точке  $P$  представляет собой суперпозицию полей вторичных волн от всех элементов  $d\sigma$ :

$$E_p = \int_{\sigma} K(\varphi) \frac{E'_0}{\rho R} e^{ik(\rho+R)} d\sigma_n. \quad (1)$$

Последняя формула даёт математическое выражение принципа Гюйгенса-Френеля.

Строгий математический расчет дифракционной картины по этой формуле представляет собой, вообще говоря, нетривиальную задачу. Однако в некоторых простейших случаях, отличающихся высокой симметрией, интегрирование может быть заменено наглядным геометрическим суммированием векторов на фазовой диаграмме. Каждый вектор на фазовой диаграмме соответствует колебанию в точке  $P$  от определенного открытого

участка волновой поверхности  $d\sigma$ , а их векторная сумма представляет собой результирующее колебание в этой точке.

### Дифракция Френеля на круглом отверстии. Зоны Френеля.

Наиболее интересным для рассмотрения является случай, когда характерный линейный размер препятствия (отверстия) мал по сравнению с расстояниями от источника до преграды ( $\rho$ ) и от преграды до точки наблюдения ( $R$ ). В этом случае как множитель  $K(\varphi)$ , так и множитель  $\rho R$  незначительно изменяются при интегрировании по отверстию, и основную роль в вычислении дифракционной картины по формуле (1) играет интеграл от быстро осциллирующего множителя вида  $e^{ik(\rho+R)}$ . Явления, описываемые в рамках такого приближения, носят название дифракции Френеля, или дифракции в ближней зоне.

Если на пути когерентного монохроматического излучения от точечного источника установить непрозрачный плоский объект с *круглым* отверстием, то на экране, установленном за объектом на расстоянии, много большем размера отверстия, будет наблюдаться дифракционная картина. Она представляет собой систему чередующихся темных и светлых колец, причем в центре картины может быть как темное, так и светлое пятно. Применим принцип Гюйгенса–Френеля для нахождения интенсивности в центре дифракционной картины при дифракции света на круглом отверстии.

Пусть точечный источник света  $S$  и точка наблюдения  $P$  лежат на прямой, проходящей через центр круглого отверстия (рис. 2).

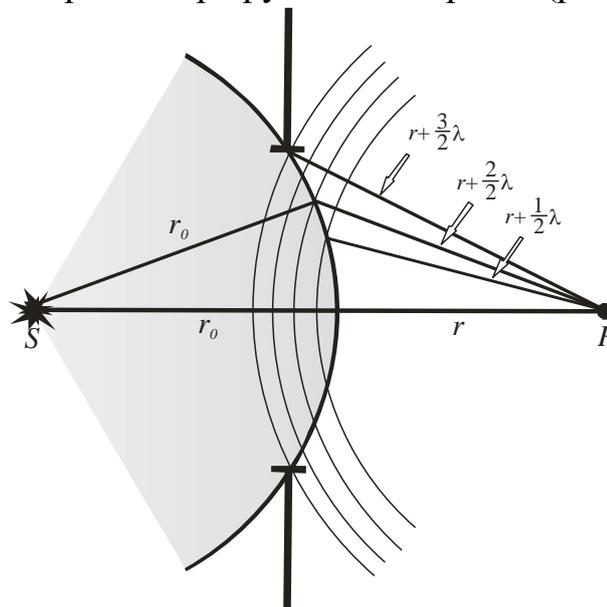


Рис. 2. Построение зон Френеля

Построим сферическую поверхность радиуса  $r_0$  с центром в  $S$ , касающуюся края отверстия. На этой поверхности будут располагаться вторичные источники, которые будут излучать сферические волны с одинаковой начальной фазой. Если взять малый элемент поверхности, то амплитуда излучаемой этим элементом вторичной волны будет пропорциональна его площади, а ее фаза в точке наблюдения  $P$  будет

определяться расстоянием от элемента до точки  $P$ . В качестве вторичного источника удобно выбрать тонкое сферическое кольцо, все точки которого лежат примерно на одинаковом расстоянии от точки наблюдения  $P$ .

Построим сферические поверхности с центром в точке  $P$  и радиусами  $r, r + \lambda/2, \dots, r + n\lambda/2, \dots$ , где  $r$  - кратчайшее расстояние от поверхности вторичных источников до точки  $P$ . В результате поверхность разобьется на области, называемые зонами Френеля. Характерной особенностью зон Френеля является то, что вторичные волны от двух соседних границ между зонами будут приходить в точку  $P$  в противофазе.

Несложные вычисления позволяют получить приближенную формулу для радиуса  $n$ -й зоны Френеля:

$$R_n = \sqrt{\frac{rr_0}{r + r_0} n\lambda} \quad . \quad (2)$$

Можно доказать, что площади зон Френеля одинаковы. Следовательно, равны и амплитуды вторичных волн, идущих от каждой зоны. В то же время вторичные волны от двух соседних зон приходят в противофазе. Поэтому, если открыто четное число зон Френеля, в центре дифракционной картины будет наблюдаться темное пятно, а если нечетное – то светлое.

Для нахождения комплексной амплитуды поля в центре картины при дифракции на круглом отверстии воспользуемся методом векторных диаграмм, который дает наглядную геометрическую интерпретацию. Для этого разобьем каждую из зон Френеля на большое число подзон, при этом подход к процедуре разбиения аналогичен вышеизложенному разбиению на зоны Френеля.

Пусть, к примеру, первая зона Френеля разбивается на  $m$  подзон таким образом, чтобы разность хода для волн, идущих от границ каждой из подзон, была равна  $\frac{\lambda}{2m}$ . При большом  $m$  можно считать, что излучение от всех вторичных источников в пределах одной подзоны приходит в точку наблюдения  $P$  с одной и той же фазой. Разность фаз для волн, идущих от соседних подзон, будет равна  $\pi/m$ . Как и в случае разбиения на зоны Френеля, можно показать, что площади подзон одинаковы и составляют  $m$ -ю часть от площади одной зоны Френеля.

Построим векторную диаграмму для нахождения амплитуды светового поля в точке наблюдения (рис. 3). Вкладу в результирующее поле от первой подзоны будет соответствовать вектор  $OA_1$ . Вкладом от второй подзоны будет такой же по длине (вследствие равенства площадей) вектор  $A_1A_2$ , но он будет повернут относительно первого вектора  $OA_1$  на угол  $\pi/m$ . Повторяя эти рассуждения для последующих подзон, получим для первой зоны Френеля векторную диаграмму  $OA_1A_2\dots O_1$  в виде половины правильного  $2m$ -угольника. Результирующее колебание от всей первой зоны Френеля соответствует вектору  $OO_1$ , замыкающему концы получившейся ломаной. В пределе, при стремлении  $m$  к бесконечности, ломаная перейдет в полуокружность.

Проводя аналогичные рассуждения для второй зоны, получим вторую ломаную, которая замкнула бы первую, если бы амплитуды складываемых элементарных векторов действительно были бы равны. Однако следует помнить о коэффициенте  $K(\varphi)$ , который учитывает зависимость амплитуды излучаемых вторичных волн от угла  $\varphi$  между лучом, идущим от вторичного источника к точке наблюдения  $P$ .

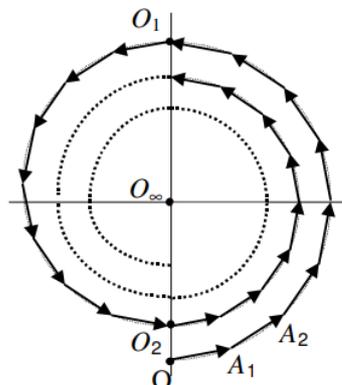


Рис. 3. Спираль Френеля

Так как этот коэффициент монотонно уменьшается с ростом угла  $\varphi$ , то конец ломаной, соответствующий второй зоне, попадет не в точку  $O$ , а в близкую к ней - точку  $O_2$ . Таким образом, вклад от второй зоны характеризуется вектором  $O_1O_2$ , который примерно равен по длине вектору  $OO_1$ , но направлен в противоположную сторону. В результате вклад от двух первых зон Френеля пропорционален длине малого вектора  $OO_2$ .

Учитывая третью, четвертую и все последующие зоны, получим в результате векторную диаграмму в виде скручивающейся спирали, где точка  $O_\infty$  расположена в центре спирали, т.е. вектор  $OO_\infty$  соответствует случаю, когда открыты все зоны Френеля – препятствие отсутствует. Получившуюся спираль называют спиралью Френеля. Из рис. 3 видно, что вектор  $OO_\infty$  в два раза меньше вектора  $OO_1$ . Таким образом, если для точки  $P$  открыта первая зона Френеля, то напряженность поля в центре экрана будет в два раза больше, чем напряженность в отсутствие препятствия. А так как интенсивность пропорциональна квадрату напряженности электрического поля, то для интенсивностей отношение будет равно четырем.

Следовательно, при изменении числа открытых зон Френеля в центре картины будет наблюдаться то темное, то светлое пятно. Из формулы (2) видно, что число открытых зон зависит не только от радиуса отверстия. Число зон изменяется и при перемещении точки наблюдения  $P$ . Если определить положения точек  $P$ , для которых в центре дифракционной картины наблюдаются светлые и темные пятна, то можно рассчитать длину световой волны. Этот подход применяется в настоящей работе.

### **Дифракция Френеля на прямолинейном крае экрана. Спираль Корню.**

В предыдущем параграфе мы рассматривали с помощью принципа Гюйгенса-Френеля дифракцию сферической волны от круглого отверстия. Осевая симметрия задачи подсказывала выбор конфигурации зон, на которые

мы разбивали открытую часть волновой поверхности - в виде круговых колец. Теперь перейдем к случаю, когда волновая поверхность плоская и характер препятствия (полуплоскость или щель) предписывает разбивать открытую часть волновой поверхности на зоны в виде прямолинейных полосок, параллельных краю полуплоскости (рис. 4).

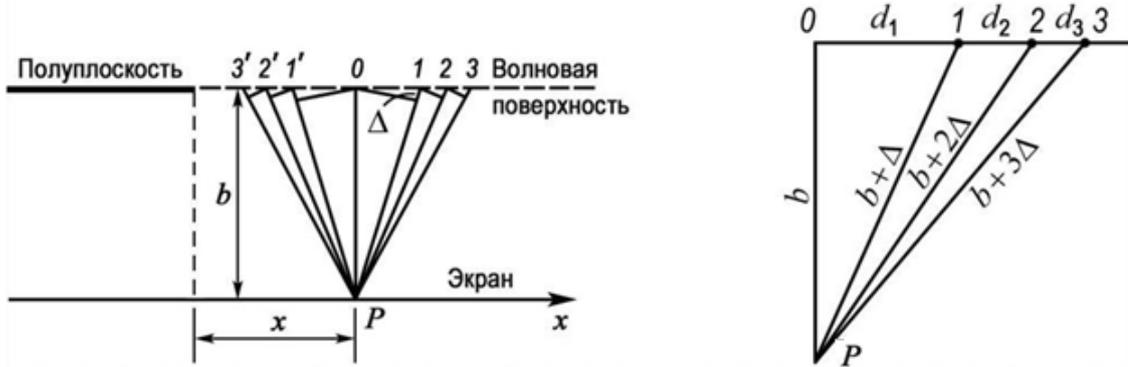


Рис. 4. Построение зон Шустера для случая нормального падения плоской световой волна на полуплоскость.

Расстояния, отсчитанные от точки  $P$  до краёв любой зоны (полоски) отличаются на одинаковую величину  $\Delta = \lambda/2$ . Зоны с номерами  $m$  и  $m'$ , расположенные симметрично относительно  $P$ , имеют одинаковую ширину, поэтому создаваемые ими колебания в точке  $P$  будут совпадать по амплитуде и фазе. Можно показать, что ширина  $m$ -й зоны равна:

$$d_m = d_1(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}).$$

Расчёт даёт следующие соотношения для ширины зон (а значит и их площадей):

$$d_1 : d_2 : d_3 : d_4 \dots = 1 : 0,41 : 0,32 : 0,27 \dots$$

В таких отношениях находятся и амплитуды колебаний, создаваемых в точке  $P$  отдельными зонами: сначала, для первых зон, амплитуда убывает очень быстро, а затем это убывание становится медленным.

Для поиска результирующей амплитуды колебаний в точке  $P$  воспользуемся методом векторных диаграмм. Как и в предыдущем случае, когда мы рассматривали дифракцию на круглом отверстии, разобьём каждую зону на малые подзоны одинаковой площади. Рассмотрим вклад подзон 1, 2, 3, ... , расположенных справа от точки  $O$  (рис. 4). На фазовой диаграмме при сложении колебаний от этих зон возникает ломаная линия (рис. 5а).

Вклад от подзон 1', 2', 3', ... , расположенных слева от точки  $O$  (рис. 4), удобно изобразить так, как показано на рис. 5б.

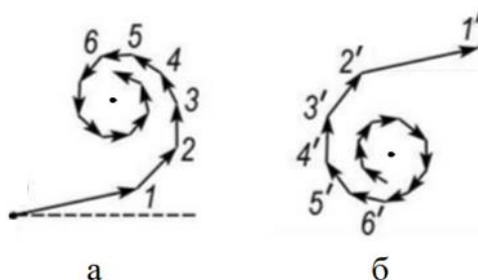


Рис. 5. Сложение колебаний от подзон, расположенных (а) справа от точки  $O$  (рис. 4, правая часть волновой поверхности) и слева от точки  $O$  (левая часть волновой поверхности).

Если совместить эти две векторные диаграммы, то мы получим *спираль Корню* (рис. 6).

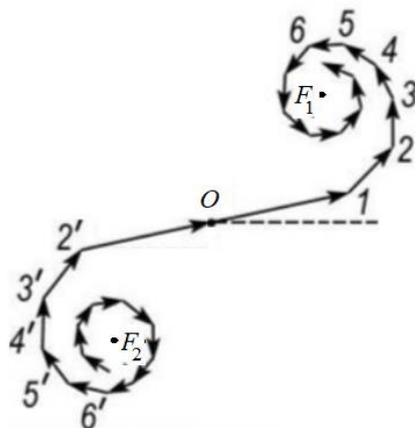


Рис. 6. Спираль Корню.

Эта спираль состоит из двух симметричных ветвей, закручивающихся вокруг фокусов  $F_1$  и  $F_2$ . Правый виток описывает вклад от зон 1, 2, 3, ... , расположенных справа от точки  $O$  (рис. 4 и 5а), а левый виток - от зон 1', 2', 3', ... , лежащих левее точки  $O$ .

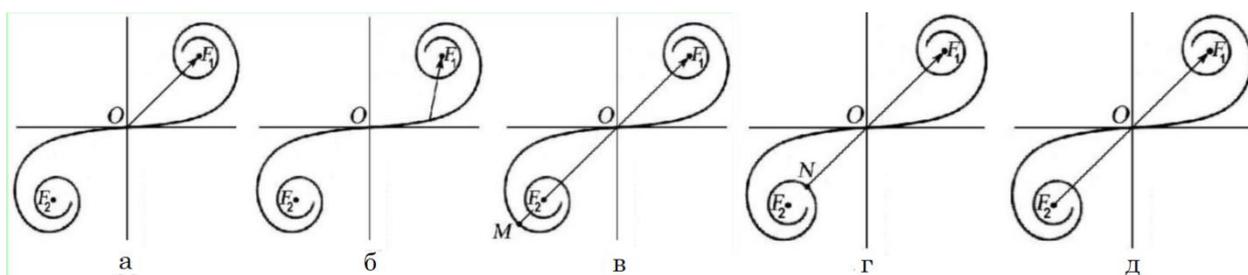


Рис. 7. Примеры использования спирали Корню.

При смещении точки  $P$  в область геометрической тени начало результирующего вектора перемещается по правому витку в направлении полюса  $F_1$ , амплитуда колебания монотонно уменьшается (рис. 7б).

При смещении точки  $P$  от границы геометрической тени вправо (при этом для точки  $P$  открываются левые, штрихованные зоны) начало результирующего вектора скользит по левому витку спирали в направлении полюса  $F_2$  (рис. 7в). Вектор  $\overline{MF_1}$  соответствует первому максимуму. А возникновение первого минимума иллюстрируется рис. 7г.

Амплитуда колебаний в точке  $P$  от полностью открытой волновой поверхности изобразится вектором  $\overrightarrow{F_2 F_1}$  (рис. 7д): амплитуда колебаний в этом случае в 2 раза больше амплитуды колебаний на границе геометрической тени (случай, показанный на рис. 7а). Значит интенсивность будет отличаться в 4 раза.

Зависимость интенсивности света от координаты  $x$  изображена на рис. 8. Интенсивность света на границе геометрической тени составляет  $1/4$  получающейся на экране в случае отсутствия преграды. При переходе в область геометрической тени интенсивность меняется не скачком, а постепенно стремится к нулю. Справа от границы геометрической тени расположен ряд чередующихся максимумов и минимумов интенсивности.

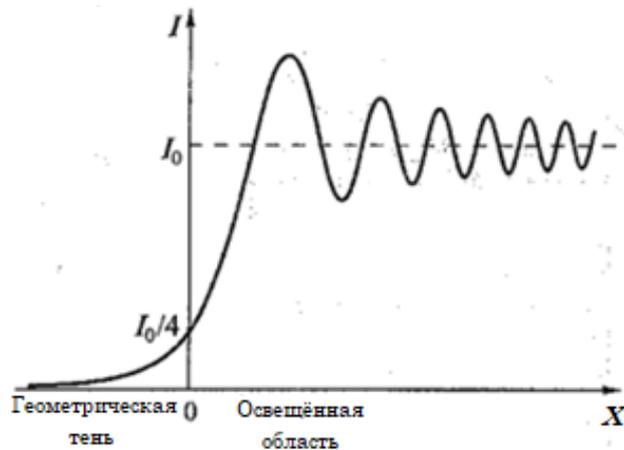


Рис. 8. Распределение интенсивности света при дифракции на прямолинейном крае полуплоскости.

Порядок выполнения работы:

Упражнение 1. Юстировка оптической схемы для наблюдения дифракции Френеля на круглом отверстии.

Схема оптической установки приведена на рис. 9.

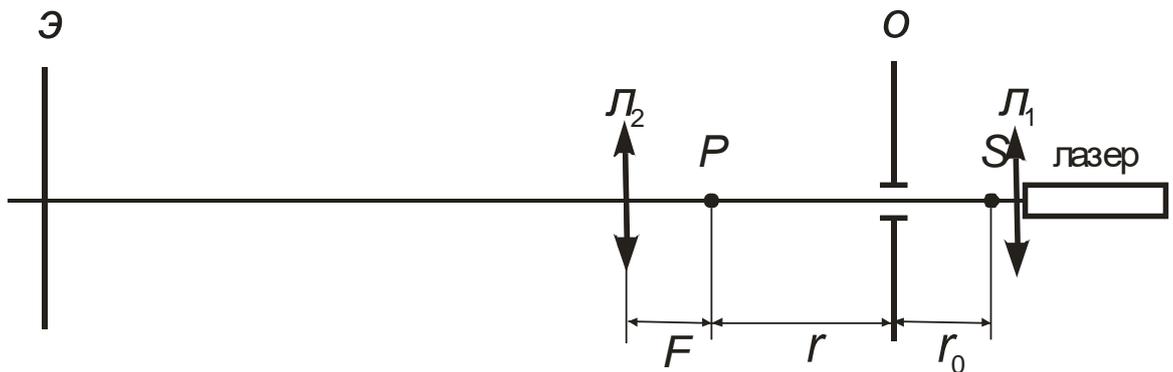


Рис. 9. Оптическая схема для наблюдения дифракции Френеля на круглом отверстии  $O$ .

Плоская волна от лазера падает на короткофокусную линзу  $L_1$  с фокусным расстоянием 5 мм, которая формирует в своей фокальной плоскости точечный источник света  $S$ . Сферическая волна от этого источника попадает на пластинку с круглым отверстием  $O$ . За пластинкой вблизи точки  $P$  формируется дифракционная картина. Для её наблюдения используется линза  $L_2$  ( $F = 50$  мм), которая формирует

увеличенное изображение дифракционной картины на удалённом экране Э. Поскольку расстояние от линзы до экрана много больше фокусного расстояния линзы, то можно считать, что плоскость экрана сопряжена с фокальной плоскостью линзы: картина, наблюдаемая на экране, является изображением дифракционной картины, образующейся на фокусном расстоянии от линзы.

1. Юстировку оптической схемы следует начинать с установки лазера. Для этого на расстоянии 1 - 1,5 м от лазера установите экран. Включите лазер и проверьте, чтобы его луч распространялся в горизонтальном направлении вдоль оптического рельса. Отметьте карандашом положение лазерного пятна на экране.
2. Установите линзу  $L_1$  вблизи лазера так, чтобы центр возникшего на экране широкого пятна совпал с отметкой.
3. На расстоянии 100 мм от линзы  $L_1$  ( $r_0 = 100$  мм) поместите пластинку с отверстиями так, чтобы центр изображения третьего<sup>1</sup> отверстия попал на отметку на экране.
4. На расстоянии  $\sim 100$  мм от пластинки  $O$  установите линзу  $L_2$ . Это расстояние равно  $r + F$  (рис. 9). На столе на расстоянии  $\sim 1$  м от линзы  $L_2$  поставьте непрозрачный экран Э. На нём должна наблюдаться дифракционная картина в виде светлых и тёмных колец. Для удобства наблюдения экран можно развернуть к себе на  $45^\circ$ .

#### Упражнение 2. Определение радиуса отверстия.

Это упражнение иллюстрирует возможность извлечения информации об объекте, по анализу дифракционной картины.

1. Плавно отодвигайте линзу  $L_2$  от отверстия и наблюдайте за изменениями в центре дифракционной картины. Добейтесь появления наиболее тёмного пятна. Измерьте расстояние  $OL_2$ . Определите расстояние  $r_1$  от отверстия до точки  $P$ :  $r_1 = OL_2 - F$ . Определите положение края держателя линзы по шкале оптического рельса. Это показание понадобится в дальнейшем при определении величины перемещения линзы.
2. Продолжайте плавно отодвигать линзу: сначала в центре появится светлое пятно, а затем - вновь тёмное. По шкале оптического рельса определите перемещение линзы  $\Delta_1$ . Вычислите расстояние  $r_2$  от отверстия до нового положения точки наблюдения  $P$  по формуле:

$$r_2 = r_1 + \Delta_1.$$

3. Повторите 5 - 6 раз действия предыдущий пункт. Для определения расстояния от отверстия до точки наблюдения  $r_i$  каждый раз к предыдущему значению  $r_{i-1}$  прибавляйте измеренный сдвиг линзы  $\Delta_{i-1}$ :

$$r_3 = r_2 + \Delta_2, r_4 = r_3 + \Delta_3, \dots r_i = r_{i-1} + \Delta_{i-1}.$$

Представьте полученные результаты в виде таблицы:

---

<sup>1</sup> Нумерация ведётся от большого отверстия.

Таблица. Экспериментальные результаты. Радиус отверстия  $R = 0,6$  мм.

Номер измерения $i$	$X = i$	$r_i$ , мм	$Y = \frac{1}{r_i}$ , мм <sup>-1</sup>
1			
2			
...			

4. Покажем, что зависимость  $Y$  от  $X$  (см. таблицу) является линейной. Обозначим через  $R$  - радиус отверстия. Если в нём укладывается  $m$  зон Френеля, то из формулы (2) следует:

$$\frac{1}{r} = \frac{m\lambda}{R^2} - \frac{1}{r_0} \quad (3)$$

Число открытых отверстием зон неизвестно. Поступим так. Обозначим число зон, открытых отверстием при регистрации  $i$ -го тёмного пятна  $m = m_0 - i$ . Знак минус выбран на том основании, что в нашем эксперименте мы будем удалять точку наблюдения  $P$  от отверстия. Поэтому число зон Френеля, открытых отверстием, будет уменьшаться (при увеличении  $r$   $m$  уменьшается, см. формулу (3)). Тогда:

$$\frac{1}{r_i} = \left(-\frac{\lambda}{R^2}\right) i + \left(\frac{m_0\lambda}{R^2} - \frac{1}{r_0}\right) \quad (4)$$

Обозначим:  $Y = \frac{1}{r_i}$ ,  $X = i$ ,  $b = \frac{m_0\lambda}{R^2} - \frac{1}{r_0}$ .

Тогда уравнение (4) примет вид:

$$Y = kX + b, \quad \text{где } k = -\frac{\lambda}{R^2}$$

Радиус отверстия  $R$  можно определить по тангенсу угла наклона графика линейной зависимости  $Y$  от  $X$ . Длина волны излучения лазера указана на его корпусе.

5. Постройте график зависимости  $Y$  от  $X$ . Программа, позволяющая аппроксимировать экспериментальные данные линейной функцией методом наименьших квадратов и оценивать доверительный интервал, приведена на сайте: [https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F829841697/MNK\\_ABSD\\_.xlsx](https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F829841697/MNK_ABSD_.xlsx)



6. Определите по этому графику радиус отверстия  $R_{\text{ср}}$  и доверительный интервал  $\Delta R$ . Запишите ответ в виде  $R = R_{\text{ср}} \pm \Delta R$ .

Упражнение 3. Наблюдение дифракции Френеля на прямолинейном крае полуплоскости.

Схема оптической установки приведена на рис.9.

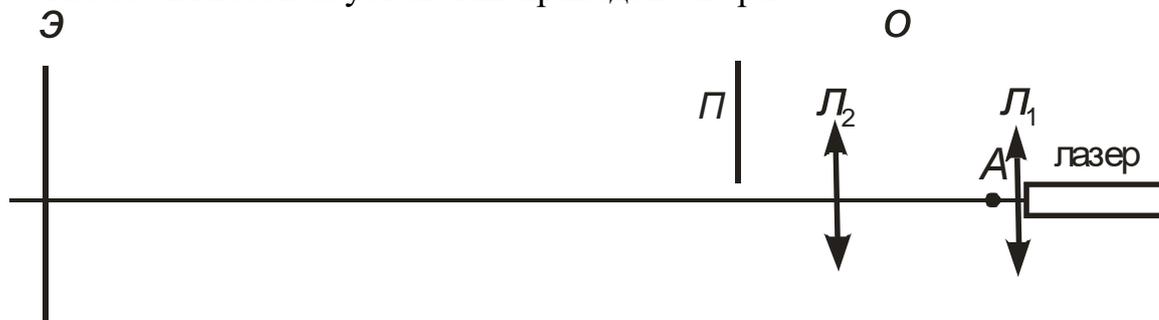


Рис. 10. Оптическая схема для наблюдения дифракции Френеля на прямолинейном крае полуплоскости.

1. Направьте луч лазера вдоль оптического рельса и установите короткофокусную линзу  $L_1$  ( $F_1 = 5$  мм) (см. пункты 1 и 2 упражнения 1).

2. Установите линзу  $L_2$  с фокусным расстоянием  $F_2 = 100$  мм так, чтобы её передний фокус совпал с задним фокусом линзы  $L_1$  (точка  $A$ ). Эта система линз сформирует плоскую волну: если в световой луч поместить лист бумаги и наблюдать за светлым пятном на листе, то его размеры не будут меняться при удалении листа от линзы  $L_2$ . Если размер пятна меняется, следует слегка переместить линзу  $L_2$ .

3. На расстоянии 5 – 10 см от линзы  $L_2$  поставьте предмет  $\Pi$  так, чтобы его прямолинейный край располагался вблизи оптической оси установки.

4. На расстоянии около 1 м от предмета поставьте экран  $\text{Э}$ . На экране на границе геометрической тени будет наблюдаться характерная дифракционная картина: чередующиеся светлые и тёмные полосы.

5. Объясните наблюдаемую картину на качественном уровне.

Упражнение 4. Наблюдение дифракции Френеля на щели.

Схема оптической установки приведена на рис. 11.



Рис. 11. Оптическая схема для наблюдения дифракции Френеля на щели.

1. Направьте луч лазера вдоль оптического рельса и установите короткофокусную линзу  $L_1$  ( $F_1 = 5$  мм) (см. пункты 1 и 2 упражнения 1). Свет соберётся в фокусе. Эта точка будет являться точечным источником  $S$ .

2. На расстоянии 100 мм от линзы  $L_1$  расположите щель  $Щ$ , ширину которой можно менять. Установите самую большую ширину.

3. На расстоянии 1.5 – 2 м поставьте экран. На экране будет наблюдаться дифракционная картина: размытая тень щели, внутри которой располагаются светлые и тёмные полосы.

4. Постепенно уменьшая ширину щели, проследите за изменениями дифракционной картины: центральная светлая полоса будет меняться на тёмную и далее вновь на светлую.

5. Объясните наблюдаемую картину на качественном уровне.

#### Вопросы к обсуждению с преподавателем.

1. Дифракция Френеля на круглых отверстиях и дисках. Зоны Френеля.
2. Дифракция Френеля на прямолинейном крае экрана. Зоны Шустера. Спираль Корню.
3. Вывести формулу (3).
4. Объяснить функциональное назначение всех элементов оптических схем.
5. Объясните наблюдаемые дифракционные картины на качественном уровне.

#### Рекомендуемая литература.

1. Бутиков Е.И. Оптика. Изд.3, С-Пб., Лань, 2021. §§6.1, 6.2
2. Ландсберг Г.С. Оптика, Изд.7, М., Физматлит, 2021. Гл.VIII.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т.4. Оптика. Изд.3. М., Физматлит, 2021. §§39, 40, 42.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.4. Волны. Оптика, Изд. Лань, Санкт-Петербург, 2022. §§5.2, 5.3, 5.4.