ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 1 (428)

УДК 517.958

С.Л. ТОНКОНОГ, Л.Д. ЭСКИН

О НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЯХ И ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ. I

1. Введение

1. В данной работе, продолжающей работу [1], рассматривается уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon F(t,x,u,\sigma), \quad \sigma = uu_x. \tag{1.1}$$

Уравнения вида (1.1) (n нечетно) описывают динамику свободной поверхности неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом [2], [3]. Первое слагаемое в правой части (1.1) — дивергенция потока жидкости $q = u^2\sigma^n$, второе — баланс массы, играющий роль поверхностного источника (стока). Уравнение (1.1) широко используется при моделировании динамики ледников, суспензий, растворов полимеров. Уравнения вида (1.1) моделируют и процессы переноса турбулентного газа в пористой среде, процессы гидроразрыва — развития трещины в породе при нагнетании в нее жидкости, процессы конвективного переноса в нелинейной среде (при $n = 1$) и так далее.

Уравнение (1.1) является уравнением с двойным вырождением — по неизвестной функции и ее градиенту. В последние годы для уравнений с двойным вырождением было доказано существование неотрицательных (именно неотрицательные решения представляют наибольший физический интерес), непрерывных по Гёльдеру обобщенных решений первой начально-краевой задачи [4], исследована проблема регулярности обобщенных решений (наиболее общие результаты в этом направлении принадлежат А.В. Иванову [5], где можно найти дальнейшие ссылки).

В предлагаемой работе рассматриваются некоторые классы симметрий уравнения (1.1) и строятся инвариантные решения инвариантных уравнений. В п. 2 приводятся в удобной для нас форме результаты работы [1], в которой была дана полная классификация приближенных с точностью $O(\varepsilon^2)$ симметрий возмущенного ($\varepsilon \neq 0$) уравнения (1.1), при этом существенно использовались результаты работ [2], [3], в которых классифицированы точные симметрии невозмущенного уравнения (1.1) с $\varepsilon = 0$ (эти результаты мы также приводим в п. 2) .

Приближенные симметрии уравнения (1.1) зависят, как показано в [1], от некоторого набора произвольных функций переменной t. В п. 3–5 мы исследуем условия, которым следует подчинить эти произвольные функции, чтобы найденные приближенные симметрии стали точными, и находим обширные классы уравнений (1.1) с ненулевым балансом массы (ε произвольно), допускающие точные группы точечных симметрий, для которых указываем их инфинитезимальные операторы.

Таким образом, для возмущенного уравнения (1.1) здесь реализован следующий подход к изучению симметрий уравнений математической физики. Путем введения множителя ε при некоторой группе слагаемых уравнение трактуется как возмущенное (во многих задачах математической физики множитель ε появляется в результате обезразмеривания уравнений, но его можно вводить и искусственно). Затем строятся точные симметрии невозмущенного уравнения, исследование симметрий которого часто оказывается более легкой задачей, чем исследование

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00346).

симметрий исходного уравнения (с этой целью и вводится параметр). Далее точные симметрии невозмущенного уравнения используются с помощью методики приближенного группового анализа, развитой в работах [6]–[8], для получения приближенных симметрий возмущенного уравнения. Наконец, выясняется, когда найденные приближенные симметрии будут точными. Плодотворность такого подхода к изучению точных симметрий уравнений динамики поверхности пленки неньютоновской жидкости и продемонстрирована в п. 3–5. Можно надеяться, что аналогичный подход окажется полезным и для ряда других уравнений механики и электродинамики сплошных сред и т. д.

В п. 6–8 строятся инвариантные решения уравнений (1.1), найденных в п. 3–5 и допускающих группу симметрий. В каждом случае построение инвариантных решений сводится с помощью инвариантов группы к решению соответствующего обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, среди решений которого имеются решения как с нулевым стоком на фронте, так и со стоком, отличным от нуля. При определенном выборе значений параметров, входящих в коэффициенты уравнения, и содержащейся в нем произвольной функции удается получить инвариантные решения в замкнутой форме, которая позволяет дать физическую интерпретацию геометрических свойств поверхности пленки и особенностей ее эволюции. Многочисленные примеры таких решений приводятся нами в п. 6–8. Эти решения описывают течение пленки с нулевым стоком на фронте. Разумеется, интересны и другие инвариантные решения. В частности, удается также указать и выбор значений параметров, который приводит к решениям в квадратурах, эти решения описывают течения с ненулевым стоком на фронте.

Ниже с целью упрощения записи формул систематически используются обозначения $(n+1)n^{-1} = p$, $(3n+2)^{-1} = r$, $(2n+1)^{-1} = s$, $(n+1)(2n+1)^{-1} = l$, $(2n+3)^{-1} = m$, $(1+\lambda(n+1))^{-1} = \alpha$. Другие обозначения поясняются в тексте статьи.

2. Групповой анализ уравнения

$$u_t = (u^{n+2}u_x^n)_x, \tag{2.1}$$

получающегося из (1.1) при $\varepsilon = 0$, выполнен в [2], [3]. Оказалось, что (2.1) допускает четырехчленную точечную группу с операторами

$$X_1^0 = \partial_t, \quad X_2^0 = \partial_x, \quad X_3^0 = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u, \quad X_4^0 = (n+1)t\partial_t + x\partial_x - \sigma\partial_\sigma \tag{2.2}$$

(здесь и ниже $\partial_t = \partial/\partial t$ и т.д.). Для уравнения (2.1) наибольший интерес представляют автомодельные решения, инвариантные относительно группы растяжений с оператором $X_\lambda^0 = X_3^0 + \lambda X_4^0$. Такие решения имеют вид

$$u = t^\alpha \chi_1(\xi), \quad \sigma = t^{-\lambda\alpha}\chi_2(\xi), \quad \xi = xt^{-(2+\lambda)\alpha}, \tag{2.3}$$

где автомодельная переменная ξ — инвариант группы X_λ^0, а χ_1, χ_2 удовлетворяют нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + (2+\lambda)\alpha\xi\chi_1' - \alpha\chi_1 = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'. \tag{2.4}$$

Отметим, что уравнение (2.4) интегрируется в замкнутой форме при $\lambda = -3$ и в квадратурах при $\lambda = -2$. При $\lambda = -3$ по формулам (2.3) получаем решение задачи о свободном растекании (нулевые стоки при $x = 0$ и при $x = x_f$) неньютоновской жидкости или куполовидного ледника с нулевым балансом массы ($F = 0$), имеющее вид

$$u(t,x) = \begin{cases} c_n t^{-r}(\xi_0^p - |\xi|^p)^{l-s}, & |\xi| \le \xi_0, \quad c_n = (r^{1/n}l^{-1})^{l-s}, \\ 0, & |\xi| > \xi_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Купол ледника (точка максимума по координате x толщины u) неподвижен, а точки фронта ($u(t,x_f) = 0$) движутся по закону $x_f(t) = \pm\xi_0 t^r$, при $t \to \infty$ $u(t,x) \to 0$, $x_f \to \pm\infty$, т.е. за бесконечное время происходит полное растекание. Отметим, что поток q непрерывен на всей вещественной оси для решения (2.5). В случае $\lambda = -2$ получается решение, описывающее динамику поверхности стоячего ледника с ненулевым стоком на фронте. Другой класс замкнутых решений уравнения (2.1) составляют бегущие волны, инвариантные относительно группы с оператором $\partial_t - \lambda\partial_x$

$$u(t,x) = \begin{cases} ((l-s)^{-1}|\lambda|^{1/n}(\xi_0 - \xi))^{l-s}, & \xi \le \xi_0, \quad \xi = x + \lambda t; \\ 0, & \xi > \xi_0, \quad \lambda < 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

В [1] одним из авторов настоящей работы были найдены все уравнения (1.1), допускающие с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенные (в смысле работ [6]–[8]) группы симметрий и для каждой из них указаны инфинитезимальные операторы. Сформулируем необходимые для дальнейшего результаты из [1]. Введем оператор

$$X = \varphi(t)\partial_t + (\theta_1(t)x + \theta_2(t))\partial_x + \zeta_1(t)u\partial_u + \zeta_2(t)\sigma\partial_\sigma, \tag{2.7}$$

где φ, θ_1, θ_2 — произвольные функции независимой переменной t,

$$\zeta_1 = l\theta_1 - s\varphi', \quad \zeta_2 = s(\theta_1 - 2\varphi'). \tag{2.8}$$

Тогда уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon[\zeta_1' xu - (2^{-1}x^2\theta_1' + x\theta_2')\sigma u^{-1} + f(t,u,\sigma)], \quad \sigma = uu_x, \tag{2.9}$$

(f — произвольная функция своих аргументов) инвариантно с точностью $O(\varepsilon^2)$ относительно приближенной группы симметрии с оператором

$$X_2 = X_2^0 + \varepsilon X. \tag{2.10}$$

Уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon\Big[\alpha t^{-1}\Big(\zeta_1 u - \Big(x\theta_1 + t^{\alpha(2+\lambda)}\int t^{-\alpha(2+\lambda)}\theta_2' dt\Big)\sigma u^{-1}\Big) + {} \\ {} + t^{-(n+1)\alpha\lambda} f(I_1, I_2, I_3)\Big], \quad \sigma = uu_x, \tag{2.11}$$

инвариантно с точностью $O(\varepsilon^2)$ относительно приближенной группы симметрий с оператором

$$X_\lambda = X_\lambda^0 + \varepsilon X. \tag{2.12}$$

В (2.12)

$$I_1 = xt^{-\alpha(2+\lambda)}, \quad I_2 = t^{-\alpha}u, \quad I_3 = t^{\lambda\alpha}\sigma \tag{2.13}$$

— три независимых инварианта группы X_λ^0, f — произвольная функция. Наконец, уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon\Big[\zeta_1 u - \Big(\theta_1 x + \theta_2 + \lambda\int\theta_1 dt\Big)\sigma u^{-1} + f(x+\lambda t, u, \sigma)\Big], \quad \sigma = uu_x, \tag{2.14}$$

допускает с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенную группу симметрии с оператором

$$X_\lambda = X_1^0 - \lambda X_2^0 + \varepsilon X. \tag{2.15}$$

В [1] для каждого из уравнений (2.9), (2.11), (2.14) указаны и приближенные с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенно-инвариантные с той же точностью решения, обобщающие соответствующие автомодельные решения невозмущенного уравнения (2.1). При $\varepsilon \ll 1$ (случай достаточно важный для приложений) эти результаты дают решения с необходимой точностью. В случае же конечного ε естественно возникает вопрос: при каком выборе произвольных функций φ, θ_1, θ_2 и f приближенные группы симметрии с операторами (2.10), (2.12), (2.15) будут соответственно точными для уравнений (2.9), (2.11), (2.14). Для полученных уравнений затем следует поставить вопрос и о нахождении точных инвариантных решений. Исследованию этих задач и посвящена данная работа. Ниже сформулируем полученные результаты, как правило, опуская весьма громоздкие выкладки.

2. Инвариантные уравнения

1. В этом пункте укажем уравнения (2.9), для которых приближенные симметрии с оператором (2.10) являются точными. С помощью инфинитезимального критерия точной инвариантности можно показать, что уравнение (2.9) точно инвариантно относительно группы с оператором X_2 (2.10) тогда и только тогда, когда не зависящая от x функция $f(t,u,\sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi f_t + \zeta_1 u f_u + \zeta_2 \sigma f_\sigma - (n+1)\zeta_2 f = -u(\zeta_1'(\theta_1 x + \theta_2) + x(\varphi\zeta_1')') + \\ + \sigma u^{-1}[\varphi(2^{-1}\theta_1'' x^2 + \theta_2'' x) + (\theta_1 x + \theta_2)(\theta_1' x + \theta_2') + (\varphi' - \theta_1)(2^{-1}\theta_1' x^2 + \theta_2' x)]. \quad (3.1)$$

Вместе с функцией f левая часть уравнения (3.1) не зависит от x, следовательно, не должна зависеть от x и правая часть. Приравнивая нулю коэффициенты при x и x^2 в правой части (3.1), найдем

$$((\varphi\theta_2')' + \theta_2\theta_1')\sigma u^{-1} - ((\varphi\zeta_1')' + \theta_1\zeta_1')u = 0, \quad (3.2)$$

$$(\varphi\theta_1')' + \theta_1\theta_1' = 0. \quad (3.3)$$

Так как u и σ произвольны, то для определения трех неизвестных функций φ, θ_1, θ_2 получаем систему трех уравнений

$$(\varphi\zeta_1')' + \theta_1\zeta_1' = 0, \quad (\varphi\theta_2')' + \theta_2\theta_1' = 0 \quad (3.4)$$

и уравнение (3.3). Для функции f из (3.1) получаем уравнение

$$\varphi f_t + \zeta_1 u f_u + \zeta_2 \sigma f_\sigma - (n+1)\zeta_2 f = \theta_2\theta_2'\sigma u^{-1} - \theta_2\zeta_1' u. \quad (3.5)$$

Система уравнений (3.3), (3.4), (3.5) для функций φ, θ_1, θ_2, f дает необходимые и достаточные условия инвариантности уравнения (2.9) относительно группы с оператором X_2 (2.10).

Частное решение f_1 уравнения (3.5) ищем в виде

$$f_1 = \mu(t)u + \nu(t)\sigma u^{-1}.$$

Подставляя f_1 в уравнение (3.5), получаем линейные неоднородные уравнения первого порядка для неизвестных функций μ и ν

$$(\varphi\mu)' = -\theta_2\zeta_1', \quad \varphi\nu' - (\theta_1 - \varphi')\nu = \theta_2\theta_2',$$

откуда

$$f_1 = \varphi^{-1}\left[\left(c_1 - \int \theta_2\zeta_1' dt\right)u + \left(c_2 + \int \theta_2\theta_2' \exp\left(-\int \theta_1\varphi^{-1} dt\right)dt\right)\exp\left(\int \theta_1\varphi^{-1} dt\right)\sigma u^{-1}\right]. \quad (3.6)$$

Общее решение приведенного однородного уравнения

$$\varphi f_t + \zeta_1 u f_u + \zeta_2 \sigma f_\sigma - (n+1)\zeta_2 f = 0$$

имеет вид

$$f_0 = \psi\left(u\exp\left(-\int \zeta_1\varphi^{-1} dt\right),\ \sigma\exp(\left(-\int \zeta_2\varphi^{-1} dt\right)\right)\exp\left((n+1)\int \zeta_2\varphi^{-1} dt\right), \quad (3.7)$$

где ψ — произвольная функция двух аргументов. Общее решение уравнения (3.5) есть сумма $f = f_0 + f_1$. Итак, мы получили следующий результат. Уравнение (2.9) инвариантно относительно группы с оператором X_2 тогда и только тогда, когда функции φ, θ_1, θ_2 удовлетворяют системе из трех уравнений (3.3), (3.4), а функция f есть сумма функций (3.6) и (3.7).

Приведем конкретные примеры инвариантных уравнений (2.9). Положив $\varphi = \beta t$, $\theta_1 = -\beta$, $\theta_2 = \ln t$, найдем, что уравнения (3.3), (3.4) удовлетворяются. С помощью соотношения (3.6) (где, не уменьшая общности, положили $c_1 = c_2 = 0$) найдем, что уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon[(\ln t - \beta x - 1)\sigma(\beta t u)^{-1} + t^{-3l}\psi(ut^{l+s}, \sigma t^{3s})], \quad \sigma = uu_x, \tag{3.8}$$

инвариантно относительно группы с оператором

$$X_2 = \varepsilon\beta t\partial_t + (1 + \varepsilon(\ln t - \beta x))\partial_x - \varepsilon\beta(l+s)u\partial_u - 3\varepsilon\beta s\sigma\partial_\sigma. \tag{3.9}$$

Второй пример построим с помощью решения

$$\varphi = t^{(2n+2)m}, \quad \theta_1 = 2mt^{-m}, \quad \theta_2 = \rho t^{-m}$$

системы (3.3), (3.4). С помощью (3.6) (снова, не уменьшая общности, полагаем $c_1 = c_2 = 0$), (3.7) после замены $x + \rho(2m)^{-1}$ на x получим, что уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon(m^2t^{-(2n+4)m}x^2\sigma u^{-1} + t^{-(2n+2)m}\psi(u, \sigma t^{2m})), \quad \sigma = uu_x, \tag{3.10}$$

допускает группу с оператором

$$X_2 = \varepsilon t^{(2m+2)m}\partial_t + (1 + 2\varepsilon mt^{-m}x)\partial_x - 2\varepsilon mt^{-m}\sigma\partial_\sigma. \tag{3.11}$$

2. Рассмотрим условия точной инвариантности уравнения (2.11) относительно группы с оператором $X_\lambda = X_\lambda^0 + \varepsilon X$ (2.12). Обозначим

$$\zeta_3 = \int t^{-\alpha(2+\lambda)}\theta_2' dt.$$

С помощью инфинитезимального критерия точной инвариантности и весьма громоздких выкладок, которые мы снова опускаем, можно показать, что для того чтобы уравнение (2.11) было инвариантно относительно группы с оператором X_λ, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(I_1, I_2, I_3)$, зависящая лишь от инвариантов (2.13), удовлетворяла уравнению

$$\begin{gathered}(R_1(t)I_1 + P(t))\frac{\partial f}{\partial I_1} + R_2(t)I_2\frac{\partial f}{\partial I_2} + R_3(t)\Big(I_3\frac{\partial f}{\partial I_3} - (n+1)f\Big) = \\ = A(t)I_2 + B(t)I_1I_3I_2^{-1} + C(t)I_3I_2^{-1},\end{gathered} \tag{4.1}$$

где обозначено

$$\begin{gathered}R_1(t) = \theta_1 - \alpha(2+\lambda)t^{-1}\varphi, \quad P(t) = t^{-\alpha(2+\lambda)}\theta_2, \quad R_2(t) = \zeta_1 - \alpha t^{-1}\varphi, \\ R_3(t) = \zeta_2 + \alpha\lambda t^{-1}\varphi, \quad A(t) = \alpha(t^{-1}\zeta_1\varphi - (\zeta_1\varphi)'), \quad B(t) = \alpha((\varphi\theta_1)' - t^{-1}\varphi\theta_1), \\ C(t) = \alpha[(\alpha(2+\lambda) - 1)t^{-1}\varphi\zeta_3 + t^{-\alpha(2+\lambda)}(\varphi\theta_2' + \theta_1\theta_2) - \zeta_3(\theta_1 - \varphi')].\end{gathered} \tag{4.2}$$

Условие, что функция f — решение уравнения (4.1) — зависит лишь от инвариантов I_1, I_2, I_3, снова налагает очень жесткие ограничения на функции φ, θ_1, θ_2.

Прежде всего отметим, что общее решение уравнения (4.1) имеет вид

$$f = f_0 + f_1, \tag{4.3}$$

где f_0 — частное решение неоднородного уравнения (4.1)

$$f_0 = c_1(t)I_2 + c_2(t)I_1I_3I_2^{-1} + c_3(t)I_3I_2^{-1}, \tag{4.4}$$

причем функции $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ определяются соотношениями

$$c_1(t)(R_2 - (n+1)R_3) = A, \quad c_2(t)(R_1 - R_2 - nR_3) = B, \quad c_2(t)P - c_3(t)(R_2 + nR_3) = C, \tag{4.5}$$

а f_1 — общее решение его приведенного однородного уравнения

$$(R_1I_1+P)\frac{\partial f}{\partial I_1}+R_2I_2\frac{\partial f}{\partial I_2}+R_3\Big(I_3\frac{\partial f}{\partial I_3}-(n+1)f\Big)=0.$$

В случае $R_1\neq 0$

$$f_1=\Big(I_1+\frac{P}{R_1}\Big)^{(n+1)R_3/R_1}\psi\Big(I_2\Big(I_1+\frac{P}{R_1}\Big)^{-R_2/R_1},\ I_3\Big(I_1+\frac{P}{R_1}\Big)^{-R_3/R_1}\Big),\tag{4.6}$$

а в случае $R_1=0$, $P\neq 0$

$$f_1=\psi\Big(I_2\exp\Big(\frac{-R_2I_1}{P}\Big),\ I_3\exp\Big(\frac{-R_3I_1}{P}\Big)\Big)\exp\Big((n+1)\frac{I_1R_3}{P}\Big),\tag{4.7}$$

ψ — произвольная функция своих двух аргументов.

Из (4.6), (4.7) следует, что решение f_1 будет зависеть лишь от аргументов I_1, I_2, I_3 (т.е. не будет зависеть от параметра t) лишь при условии, что при $R_1\neq 0$ дроби R_2/R_1, R_3/R_1, P/R_1, а при условии $R_1=0$, $P\neq 0$ дроби R_2/P, R_3/P являются константами. Из (4.2) следует, что для этого необходима и достаточна степенная зависимость функций φ, θ_1, θ_2 от t, а именно

$$\varphi=\beta t^k,\quad \theta_1=\gamma t^{k-1},\quad \theta_2=\delta t^{\alpha(2+\lambda)+k-1}\tag{4.8}$$

(β, γ, δ — константы). Тогда

$$\zeta_1=\beta_1t^{k-1},\quad \zeta_2=\gamma_1t^{k-1},\quad \zeta_3=\begin{cases}\delta_1t^{k-1}, & k\neq 1;\\ \delta_2\ln t, & k=1,\end{cases}\tag{4.9}$$

$$\beta_1=l\gamma-ks\beta,\quad \gamma_1=s(\gamma-2k\beta),\quad \delta_1=\delta(k-1)(\alpha(2+\lambda)+k-1),\quad \delta_2=\delta\alpha(2+\lambda).$$

Сначала рассмотрим случай $k\neq 1$. С учетом (4.9) уравнение (4.1), в котором функции φ, θ_1, θ_2 определены с помощью соотношений (4.8), будет однородным лишь при условии, что коэффициенты β, γ, δ в (4.8) удовлетворяют алгебраической системе уравнений

$$\beta(\alpha(2+\lambda)+k-1)(\delta_1+\delta)+\gamma(\delta-\delta_1)=0,\quad \beta\beta_1=0,\quad \beta\gamma=0.\tag{4.10}$$

Не представляет труда перечислить все решения системы (4.10). А именно, переписав (4.10) в виде

$$\delta[\beta(\alpha(2+\lambda)+k-1)(\alpha(2+\lambda)+2(k-1))-\alpha\gamma(2+\lambda)]=0,$$
$$\beta((n+1)\gamma-k\beta)=0,\quad \beta\gamma=0,$$

без труда найдем, что возможны лишь следующие случаи

1) $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta\neq 0$, $k\neq 1$, λ произвольны;
2) $\beta=0$, $\delta=0$, γ, k, λ произвольны;
3) $\delta=0$, $\gamma=0$, $k=0$, $\beta\neq 0$, λ произвольны;
4) $\beta=0$, $\lambda=-2$, γ, $k\neq 1$, δ произвольны;
5) $\gamma=0$, $k=0$, $\lambda=n^{-1}$, β, δ произвольны;
6) $\gamma=0$, $k=0$, $\lambda=0$, β, δ произвольны.

Наибольший интерес представляют случаи 1)–3), в которых λ остается произвольным. В случае 1) из (4.7) получаем $f_1=\psi(I_2,I_3)$, причем, не уменьшая общности, можно положить $\delta=1$. Из (2.11) следует, что уравнение

$$u_t=(u^2\sigma^n)_x+\varepsilon\Big[t^{-(n+1)\alpha\lambda}\psi(I_2,I_3)-\Big(\frac{\alpha(2+\lambda)}{k-1}+1\Big)t^{\alpha(2+\lambda)+k-2}\sigma u^{-1}\Big],\quad \sigma=uu_x,\tag{4.11}$$

инвариантно относительно группы с оператором

$$X_\lambda=t\partial_t+(\alpha(2+\lambda)x+\varepsilon t^{\alpha(2+\lambda)+k-1})\partial_x+\alpha(u\partial_u-\lambda\sigma\partial_\sigma).\tag{4.12}$$

В случае 2) с помощью (4.6) найдем, что уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon[t^{k-2}(lu - x\sigma u^{-1}) + t^{-(n+1)\alpha\lambda} I_1^l \psi(I_2 I_1^{-l}, I_3 I_1^{-s})], \quad \sigma = uu_x, \tag{4.13}$$

допускает группу с оператором

$$X_\lambda = t\partial_t + (\alpha(2+\lambda) + \varepsilon t^{k-1})x\partial_x + (\alpha + \varepsilon l t^{k-1})u\partial_u + (\varepsilon s t^{k-1} - \lambda\alpha)\sigma\partial_\sigma \tag{4.14}$$

(не уменьшая общности полагаем $\gamma = 1$, что достигается заменой $\varepsilon\gamma$ на ε). С учетом соотношений (2.13) уравнение (4.13) можно переписать в виде уравнения

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon[t^{k-2}(lu - x\sigma u^{-1}) + (xt^{-2})^l \psi(ux^{-l}t^s, \sigma x^{-s}t^{2s})], \quad \sigma = uu_x,$$

не содержащего параметр λ.

В случае 3) имеем уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon t^{-(n+1)\alpha\lambda} I_1^{-(n+1)\lambda/(2+\lambda)} \psi(I_2 I_1^{-1/(2+\lambda)},\, I_3 I_1^{\lambda/(2+\lambda)}, \quad \sigma = uu_x, \tag{4.15}$$

допускающее группу с оператором

$$X_\lambda = (t + \varepsilon\alpha)\partial_t + \alpha((2+\lambda)x\partial_x + u\partial_u - \lambda\sigma\partial_\sigma).$$

После подстановки инвариантов I_1, I_2, I_3 из (2.13) получаем равенство

$$t^{-(n+1)\alpha\lambda} I_1^{-(n+1)\lambda/(2+\lambda)} \psi(I_2 I_1^{-1/(2+\lambda)},\, I_3 I_1^{\lambda/(2+\lambda)}) = x^{-(n+1)\lambda/(2+\lambda)} \psi(x^{-1/(2+\lambda)},\, x^{\lambda/(2+\lambda)}\sigma).$$

Следовательно, уравнение (4.15) допускает и оператор ∂_t. Окончательно найдем, что уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon x^{-(n+1)\lambda/(2+\lambda)} \psi(x^{-1/(2+\lambda)}u,\, x^{\lambda/(2+\lambda)}\sigma), \quad \sigma = uu_x \tag{4.16}$$

инвариантно относительно группы с операторами X_λ^0 и ∂_t.

Случаи 4) и 5) после простых преобразований сводятся соответственно к случаям 2) при $\lambda = -2$ и 3) при $\lambda = n^{-1}$. В случае 6) получаем уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon[\sigma u^{-1} + \psi((2I_1 - \mu)^{1/2} I_2,\, I_3], \quad \sigma = uu_x, \quad \mu = \delta/\beta, \tag{4.17}$$

инвариантное относительно группы с оператором

$$(t + \varepsilon\mu^{-1})\partial_t + (2x + \varepsilon t)\partial_x + u\partial_u. \tag{4.18}$$

В случае $R_1 = 0$, $P = 0$, $R_2 \neq 0$ общее решение приведенного однородного уравнения для уравнения (4.1)

$$f_1 = I_2^{(n+1)R_3/R_2} \psi(I_1,\, I_3 I_2^{-R_3/R_2}),$$

ψ — произвольная функция. Оно зависит лишь от аргументов I_1, I_2, I_3 при условии, что дробь R_3/R_2 является константой. Следовательно, имеем

$$cR_2 = R_3 \quad (c \text{ — константа}), \quad \theta_1 = \alpha(2+\lambda)t^{-1}\varphi, \quad \theta_2 = 0, \quad R_2 = \delta(t^{-1}\varphi - \varphi') \neq 0.$$

Нетрудно убедиться, что эти соотношения выполняются лишь при $c = 2$, причем функция φ остается произвольной, но отличной от $\varphi = \beta t$ (т.к. при $\varphi = \beta t$ $R_2 = 0$).

Итак, в рассматриваемом случае приведенное однородное уравнение уравнения (4.1) имеет зависящее лишь от I_1, I_2, I_3 решение

$$f_1 = I_2^{2(n+1)} \psi(I_1,\, I_3 I_2^{-2}) \tag{4.19}$$

тогда и только тогда, когда

$$\theta_1 = \alpha(2+\lambda)t^{-1}\varphi, \quad \theta_2 = 0, \tag{4.20}$$

φ — произвольная функция, отличная от $\varphi = \beta t$.

Уравнение (4.1), в котором функции φ, θ_1, θ_2 определены с помощью соотношений (4.20), будет однородным ($A(t) = B(t) = C(t) = 0$) лишь при условии, что $\lambda = -2$ (следовательно, $\theta_1 = 0$), $\varphi = \sqrt{\beta t^2 + \beta_2}$ (β, $\beta_2 \neq 0$ — произвольные постоянные).

С учетом (4.19), (2.11)-(2.13) (после замены в уравнении и операторе εs снова на ε) уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon\Big[\frac{s\beta u}{\sqrt{\beta t^2 + \beta_2}} + u^{2(n+1)}\psi\Big(x, \frac{\sigma}{u^2}\Big)\Big], \quad \sigma = uu_x, \tag{4.21}$$

допускает группу с оператором

$$X_\lambda = -(t - \varepsilon\sqrt{\beta t^2 + \beta_2})\partial_t + s\Big(1 - \frac{\varepsilon\beta t}{\sqrt{\beta t^2 + \beta_2}}\Big)(u\partial_u + 2\sigma\partial_\sigma). \tag{4.22}$$

В случае $R_1 = 0$, $P = 0$, $R_2 = 0$ получаем

$$\varphi = \beta t, \quad \theta_1 = \alpha\beta(2+\lambda), \quad \theta_2 = 0, \quad \zeta_1 = \alpha\beta, \quad \zeta_2 = -\alpha\beta\lambda, \quad R_3 = 0,$$
$$A(t) = B(t) = C(t) = 0.$$

Уравнение (4.1) оказывается тождеством для любой $f(I_1, I_2, I_3)$. Мы не выписываем для этого случая инвариантное уравнение, т.к. в конце п. 4 получим более общее уравнение (см. уравнение (4.33)).

Перейдем к неоднородному уравнению (4.1). Из (4.4), (4.5) следует, что уравнение (4.1) имеет частное решение

$$f_0 = c_1 I_2 + c_2 I_1 I_3 I_2^{-1} + c_3 I_3 I_2^{-1} \tag{4.23}$$

(c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные), зависящее лишь от инвариантов I_1, I_2, I_3 тогда и только тогда, когда функции φ, θ_1, θ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$c_1(\varphi' - t^{-1}\varphi) = \alpha(t^{-1}\zeta_1\varphi - (\zeta_1\varphi)'), \quad c_2(\varphi' - t^{-1}\varphi) = \alpha((\varphi\theta_1)' - t^{-1}\varphi\theta_1), \tag{4.24}$$

$$c_2 t^{-\alpha(2+\lambda)}\theta_2 - c_3[\theta_1 - \varphi' - (\alpha(2+\lambda) - 1)t^{-1}\varphi] =$$
$$= \alpha[(\alpha(2+\lambda) - 1)t^{-1}\varphi\zeta_3 + t^{-\alpha(2+\lambda)}(\varphi\theta_2' + \theta_1\theta_2) - \zeta_3(\theta_1 - \varphi')]. \tag{4.25}$$

Уравнения (4.24) этой системы определяют функции φ, θ_1, после чего функция θ_2 определяется из интегро-дифференциального уравнения (4.25).

С учетом (2.11) и (2.13) уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon t^{-1}[(\alpha\zeta_1 + c_1)u + (c_2 - \alpha\theta_1)x\sigma/u + t^{\alpha(2+\lambda)}(c_3 - \alpha\zeta_3)\sigma/u], \quad \sigma = uu_x, \tag{4.26}$$

допускает группу с оператором X_λ (2.12) тогда и только тогда, когда функции φ, θ_1, θ_2 удовлетворяют системе уравнений (4.24), (4.25).

Функции φ, θ_1 находятся в замкнутой форме. Действительно, из уравнений (4.24) нетрудно найти

$$(\varkappa - \varphi')\varphi = d_1 t, \quad \theta_1 = \alpha^{-1}\Big(c_2 - \frac{d_2 t}{\varphi}\Big), \tag{4.27}$$

где d_1, d_2 — произвольные константы, $\varkappa = \alpha^{-1}((2n+1)c_1 + (n+1)c_2)$. Положив в первом из соотношений (4.27) $\varphi = tv$, получим уравнение

$$(\varkappa - v - tv')v = d_1$$

для определения функции v, откуда без труда находим, что функция $\varphi(t)$ неявно определяется из соотношений

$$\begin{aligned}
&d_3 = \sqrt{\varphi^2 - \varkappa t\varphi + d_1 t^2}\, \exp\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{4d_1^2 - \varkappa^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\varphi - \varkappa t}{t\sqrt{4d_1^2 - \varkappa^2}}\right), \quad && 4d_1 - \varkappa^2 > 0,\\
&d_3 = (\varphi - \rho_1 t)^{\rho_1/(\rho_1-\rho_2)} (\varphi - \rho_2 t)^{\rho_2/(\rho_2-\rho_1)}, && 4d_1 - \varkappa^2 < 0,\\
&d_3 = (2\varphi - \varkappa t)\exp\left(\frac{\varkappa t}{\varkappa t - 2\varphi}\right), && 4d_1 - \varkappa^2 = 0,
\end{aligned}$$

d_3 — произвольная постоянная, ρ_1, ρ_2 — корни квадратного уравнения $v^2 - \varkappa v + d_1 = 0$.

Итак, найдены, с одной стороны, условия, обеспечивающие существование зависящего лишь от инвариантов I_1, I_2, I_3 нетривиального решения f_1 приведенного однородного уравнения уравнения (4.1) (представление (4.8) или (4.20) для функций φ, θ_1, θ_2) и, с другой стороны, условия, обеспечивающие существование зависящего лишь от инвариантов решения (4.23) неоднородного уравнения (4.1) (функции φ, θ_1, θ_2 удовлетворяют системе уравнение (4.24), (4.25)). Найдены и соответствующие инвариантные уравнения вида (2.11) и допускаемые ими группы с операторами (2.12).

Возникает вопрос, когда эти условия будут выполняться одновременно (в этом случае уравнение (4.1) будет иметь зависящее лишь от инвариантов I_1, I_2, I_3 решение $f = f_0 + f_1$ (4.3)). Нетрудно показать с помощью (4.8), (4.9), (4.24), (4.25), что для этого необходимо и достаточно, чтобы функции φ, θ_1, θ_2 определялись с помощью соотношений (эти соотношения соответствуют значению $k = 1$ в (4.8))

$$\varphi = \beta t, \quad \theta_1 = \gamma, \quad \theta_2 = \delta t^{\alpha(2+\lambda)}$$

(β, γ, δ — константы), причем

$$\begin{gathered}
\delta(2+\lambda)(\gamma - \beta\alpha(2+\lambda)) = 0,\\
c_2\delta + c_3(\alpha\beta(2+\lambda) - \gamma) = \alpha\delta(\alpha\beta(2+\lambda) + \gamma).
\end{gathered} \tag{4.28}$$

Из (4.28) следует, что возможны лишь следующие четыре случая

1) $\delta = 0$, откуда $\theta_2 = 0$, $\zeta_1 = l\gamma - s\beta$, $\zeta_2 = s(\gamma - 2\beta)$. Если $\alpha\beta(2+\lambda) - \gamma \neq 0$, то $c_3 = 0$ и приведенное однородное уравнение уравнения (4.1) имеет общее решение (4.6)

$$f_1 = I_1^l \psi(I_2 I_1^{-l}, I_3 I_1^{-s}).$$

Таким образом, уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon t^{-1}(c_1 u + c_2 x\sigma/u + t^\alpha I_1^l \psi(I_2 I_1^{-l}, I_3 I_1^{-s})), \tag{4.29}$$

инвариантно относительно группы с оператором

$$\begin{aligned}
X_\lambda = (1+\varepsilon\mu)t\partial_t + (\alpha(2+\lambda)+\varepsilon)x\partial_x + (\alpha + \varepsilon(l - s\mu))u\partial_u +\\
+ (-\alpha\lambda + \varepsilon s(1-2\mu))\sigma\partial_\sigma, \mu = \beta/\gamma.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

При выводе уравнения (4.29) и выражения (4.30) для оператора X_λ заменили $\varepsilon\alpha\gamma$ снова на ε, $c_1/\alpha\gamma$ на c_1, $c_2(\alpha\gamma)^{-1} - 1$ на c_2 и воспользовались соотношениями

$$\frac{\alpha\mu\lambda + s(1-2\mu)}{1 - \alpha\mu(2+\lambda)} = s, \qquad \frac{(\alpha+s)\mu - l}{\alpha\mu(2+\lambda) - 1} = l.$$

Следует отметить, что уравнение (4.29) допускает и группу с оператором X_λ^0.

2) $\lambda = -2$. В этом случае $(c_2 - \alpha\gamma)\delta = c_3$ и после замены $x + \delta$ на x получаем уравнение и оператор, которые получаются из (4.29), (4.30) при $\lambda = -2$.

3) $\gamma = \beta\alpha(2+\lambda)$, $\delta \neq 0$. Следовательно, $R_1 = 0$, $P = \delta \neq 0$, $c_2 = 2\alpha\gamma$, $\zeta_1 = \alpha\beta$, $\zeta_2 = -\alpha\beta\lambda$, $R_2 = R_3 = 0$. Приведенное однородное уравнение уравнения (4.1) имеет общее решение вида (4.7) $f_1 = \psi(I_2, I_3)$, отсюда уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon t^{-1}[c_1 u + (\gamma x + t^{\alpha(2+\lambda)}(c_3 - \delta\alpha(2+\lambda)\ln t))\sigma u^{-1} + t^\alpha \psi(I_2, I_3)], \quad \sigma = uu_x, \tag{4.31}$$

допускает группу с оператором

$$X_\lambda = t\partial_t + (\alpha(2+\lambda)x + \varepsilon\delta(1+\varepsilon\beta)^{-1}t^{\alpha(2+\lambda)})\partial_x + \alpha(u\partial_u - \lambda\sigma\partial_\sigma). \tag{4.32}$$

4) $\gamma = \beta\alpha(2+\lambda)$, $\delta = 0$, c_1, c_2, c_3 произвольны, $f_1 = \psi(I_1, I_2, I_3)$, ψ — произвольная функция. В этом случае найдем, что уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon t^{-1}(c_1 u + (c_2 x + c_3 t^{\alpha(2+\lambda)})\sigma u^{-1} + t^\alpha \psi(I_1, I_2, I_3)), \quad \sigma = uu_x, \tag{4.33}$$

допускает группу с оператором X_λ^0.

3. Рассмотрим условия точной инвариантности уравнения (2.14) относительно группы с оператором (2.15). Обозначив $I_1 = x + \lambda t$, найдем, что для того чтобы уравнение (2.14) допускало группу с оператором (2.15), необходимо и достаточно, чтобы функция $f(I_1, u, \sigma)$ в (2.14) удовлетворяла уравнению

$$(\lambda\varphi + \theta_1 x + \theta_2)\frac{\partial f}{\partial I_1} + \zeta_1 u f_u + \zeta_2 \sigma f_\sigma - (n+1)\zeta_2 f =$$
$$= -u(\varphi\zeta_1)' + \left[\varphi(\theta_1 x + \theta_2) + \lambda\varphi\int\theta_1 dt - 2^{-1}\lambda\left(\int\theta_1 dt\right)^2\right]'\sigma u^{-1}. \tag{5.1}$$

Тот факт, что функция f в (5.1) должна зависеть лишь от I_1, u, σ, снова налагает жесткие условия на φ, θ_1, θ_2. Будем искать решение неоднородного уравнения (5.1) в виде

$$f = \beta u + \gamma\sigma u^{-1} + \delta I_1 \sigma u^{-1} + f_0(I_1, u, \sigma), \tag{5.2}$$

где f_0 — решение приведенного однородного уравнения, также зависящее лишь от I_1, u, σ. Нетрудно найти, что уравнение (5.1) имеет решение вида (5.2) тогда и только тогда, когда функции φ, θ_1, θ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$(\varphi(\zeta_1 + \beta))' = 0,$$
$$\delta(\theta_2 + \lambda(\varphi - t\theta_1)) - \gamma(\theta_1 - \varphi') = \left[\varphi\left(\theta_2 + \lambda\int\theta_1 dt\right) - 2^{-1}\lambda\left(\int\theta_1 dt\right)^2\right]' - \lambda t(\varphi\theta_1)', \tag{5.3}$$
$$\delta\varphi' = (\varphi\theta_1)'.$$

Без труда находится общее решение системы (5.3), оно находится в неявной форме. Остановимся на частных случаях, когда функции φ, θ_1, θ_2 задаются в явном виде.

1) $\varphi = 0$, $\theta_1(t)$ — произвольная функция, $\theta_2(t) = \delta^{-1}\theta_1(\delta\lambda t + \gamma - \lambda\int\theta_1 dt)$. Оказывается, что функция f_0 в (5.2) не должна зависеть от I_1, отсюда уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon\left[l\theta_1 u + (1 - \delta^{-1}\theta_1)\left(\delta I_1 - \lambda\int\theta_1 dt\right)\sigma u^{-1} + u\psi(u\sigma^{-n-1})\right], \quad \sigma = uu_x, \tag{5.4}$$

допускает группу с оператором

$$X_\lambda - \partial_t + \left[-\lambda + \varepsilon\left(\theta_1 I_1 - \delta^{-1}\lambda\theta_1\int\theta_1 dt\right)\right]\partial_x + \varepsilon\theta_1(lu\partial_u + s\sigma\partial_\sigma) \tag{5.5}$$

(не уменьшая общности, можно положить $\gamma = 0$, что достигается заменой $x + \gamma\delta^{-1}$ на x).

2) $\varphi = \varphi_0$, $\theta_1 = \theta_0$ (φ_0, θ_0 — произвольные постоянные), θ_2 находится из второго уравнения в (5.3)

$$\theta_2 = c\exp(\delta t\varphi_0^{-1}) + \delta^{-1}(\gamma\theta_0 - \lambda\varphi_0\delta^{-1}(\delta - \theta_0)^2 + \lambda\theta_0(\delta - \theta_0)t).$$

Функция f_0 снова не должна зависеть от I_1, тогда уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon[((\delta-\theta_0)(I_1 + (\delta-\theta_0)\lambda\varphi_0\delta^{-2} - \lambda\theta_0\delta^{-1}t) - \\ - c\exp(\delta t\varphi_0^{-1}))\sigma u^{-1} + u\psi(u\sigma^{-n-1})], \quad \sigma = uu_x, \quad (5.6)$$

инвариантно относительно группы с оператором

$$X_\lambda = (1+\varepsilon\varphi_0)\partial_t + [-\lambda + \varepsilon(\theta_0 I_1 + c\exp(\delta t\varphi_0^{-1}) - \lambda\varphi_0(\delta-\theta_0)^2\delta^{-2} - \\ - \lambda\theta_0^2\delta^{-1}t)]\partial_x + \varepsilon\theta_0(lu\partial_u + s\sigma\partial_\sigma). \quad (5.7)$$

3) Положим $\varphi = at$. Тогда из (5.3) следует $a = (2n+1)\beta + (n+1)\delta$, $\theta_1 = \delta + ct^{-1}$ (c — произвольная постоянная). Ради упрощения выкладок полагаем $c = 0$ и находим с помощью второго уравнения в (5.3)

$$\theta_2 = bt^{(\delta-a)a^{-1}} + \gamma$$

(b — произвольная постоянная). Решение f_0 приведенного однородного уравнения снова не зависит от I_1

$$f_0 = u^{(n+1)(2\beta+\delta)\beta^{-1}}\psi(u\sigma^{-\beta(2\beta+\delta)^{-1}}).$$

После замены $x+\gamma\delta^{-1}$ на x, $\varepsilon\delta$ на ε, $b\delta^{-1}$ на b, $\beta\delta^{-1}$ на μ, $a\delta^{-1}$ на ν получаем, что уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon[u^{(n+1)(2\mu+1)\mu^{-1}}\psi(u\sigma^{-\mu(2\mu+1)^{-1}}) - bt^{(1-\nu)\nu^{-1}}\sigma u^{-1}], \quad \sigma = uu_x, \quad (5.8)$$

инвариантно относительно группы с оператором

$$X_\lambda = (1+\varepsilon\nu t)\partial_t + (-\lambda + \varepsilon(x + bt^{(1-\nu)\nu^{-1}}))\partial_x - \varepsilon(\mu u\partial_u + (1+2\mu)\sigma\partial_\sigma. \quad (5.9)$$

4) Положим $\varphi = bt^{1/2}$, b — произвольная постоянная. Из (5.3) следует $\delta = -l^{-1}\beta$, $\theta_1 = \delta + ct^{-1/2}$,

$$\theta_2 = dt^{-1/2}\exp(2\delta t^{1/2}/b) - (2\lambda c^2 - \gamma\delta)\delta^{-1} + (\gamma c\delta^{-1} - \lambda bc^2\delta^{-2})t^{-1/2} - 2\lambda ct^{1/2},$$

c, d — произвольные постоянные. Функция f_0 оказывается равной $\mu\sigma^{n+1}$, μ — произвольная константа. После замены $x+\gamma\delta^{-1}$ на x, $\varepsilon\delta$ на ε, $b\delta^{-1}$ на b, $c\delta^{-1}$ на c, $d\delta^{-1}$ на d, $\mu\delta^{-1}$ на μ в уравнении и операторе найдем, что уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon[(lc - 2^{-1}sb)t^{-1/2}u - \\ - (t^{-1/2}(cx - \lambda bc^2 + d\exp(2t^{1/2}/b)) - 2\lambda c^2)\sigma u^{-1} + \mu\sigma^{n+1}], \quad \sigma = uu_x, \quad (5.10)$$

допускает группу с оператором

$$X_\lambda = (1+\varepsilon bt^{1/2})\partial_t + [-\lambda + \varepsilon(x - 2\lambda c(c+t^{1/2}) + t^{-1/2}(cx + d\exp(2t^{1/2}/b) - \lambda bc^2))]\partial_x + \\ + \varepsilon t^{-1/2}(l(c+t^{1/2}) - 2sb)u\partial_u + \varepsilon st^{-1/2}(c - b + t^{1/2})\sigma\partial_\sigma. \quad (5.11)$$

Инвариантные решения инвариантные уравнений, полученных в п. 3–5, будем рассматривать во второй части данной работы.

Литература

1. Тонконог С.Л. *Приближенный групповой анализ уравнений динамики субизотермических ледников* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 4. – С. 33–47.
2. Чугунов В.А. *О групповых свойствах уравнения, описывающего течение ледников* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 10. – С. 84–87.
3. Саламатин А.Н., Чугунов В.А., Мазо А.Б. *Численное исследование и инвариантные решения задачи о динамике субизотермического ледника в одномерном приближении* // Задачи механики природных процессов. – М., 1983. – С. 82–95.

4. Иванов А.В., Мкртчян П.З. *О существовании непрерывных по Гёльдеру неотрицательных обобщенных решений начально-краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений с двойным вырождением* // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1990. – Т. 182. – С. 5–28.
5. Иванов А.В. *Квазилинейные параболические уравнения, допускающие двойное вырождение* // Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 44. – Вып. 6. – С. 114–130.
6. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Приближенные симметрии уравнений с малым параметром* // Препринт № 150. ИПМ АН СССР. – 1987. – 28 с.
7. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Приближенные симметрии* // Матем. сб. – 1988. – Т. 36. – № 4. – С. 435–450.
8. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Методы возмущений в групповом анализе* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1989. – Т. 34. – С. 85–147.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 16.05.1995
окончательный вариант 08.04.1997