Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №6, с. 82–89 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0059*

М.Г. ЮМАГУЛОВ, О.Н. БЕЛИКОВА

БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТЯХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Аннотация. Рассматривается задача о бифуркации периодических решений в окрестностях треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел. Указаны значения параметра масс такие, что при малых значениях эксцентриситета задача имеет близкие к точке либрации нестационарные периодические решения. Определены типы бифуркаций и изучены асимптотические формулы для этих решений.

Ключевые слова: задача трех тел, точки либрации, бифуркация, периодические решения, асимптотические формулы.

УДК: 521.135

Abstract. We consider the problem on bifurcations of periodic solutions near triangular libration points in the plane elliptic bounded three-body problem. We determine values of the mass parameter such that at small values of the eccentricity the problem has non-stationary periodic solutions close to a libration point. We determine bifurcation types and study the asymptotic for the mentioned solutions.

Keywords: three-body problem, libration points, bifurcation, periodic solutions, asymptotic formulas.

1. Постановка задачи

Одной из наиболее интересных и важных (как в теоретическом, так и в прикладном аспекте) задач небесной механики является задача о периодических решениях в окрестностях точек либрации плоской ограниченной эллиптический задачи трех тел. Эта задача содержит два параметра — эксцентриситет $\varepsilon \geqslant 0$ и параметр масс μ. В случае круговой задачи ($\varepsilon = 0$) при определенных значениях параметра μ_k линеаризованная задача допускает периодические решения, что может приводить к возникновению у эллиптический задачи нетривиальных семейств периодических орбит. В статье дается обоснование возникновения семейства периодических орбит в окрестностях треугольных точек либрации периода $2\pi k$, $k \geqslant 2$.

Поступила 25.04.2008

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований 06-01-72552-НЦНИЛ_а.

Рассматривается плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел, уравнения движения которой в координатах Нехвила имеют вид (например, [1], [2]):

$$\begin{aligned} x'' - 2y' &= \rho\biggl(x - \mu + \frac{\mu - 1}{(x^2+y^2)^{3/2}}x - \frac{\mu}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}}(x-1)\biggr), \\ y'' + 2x' &= \rho\biggl(y + \frac{\mu - 1}{(x^2+y^2)^{3/2}}y - \frac{\mu}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}}y\biggr), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\rho = \frac{1}{1+\varepsilon\cos t}$, $\mu = \frac{m_1}{m_0+m_1}$, $0 < m_1 \leqslant m_0$, $0 < \mu \leqslant 1/2$, ε — эксцентриситет кеплеровской орбиты, t — истинная аномалия, m_0, m_1 — массы активно гравитирующих тел.

Система уравнений (1) может быть записана одним уравнением в комплексной форме

$$z'' + 2iz' = \rho[z - \mu + f(z)], \tag{2}$$

где $f(z) = \frac{\mu-1}{|z|^3}z - \frac{\mu}{|z-1|^3}(z-1)$, $z = x + iy$.

Система (1) и соответствующее ей уравнение (2) имеет пять постоянных решений – точек либрации: три из них лежат на одной прямой (прямолинейные точки либрации), а две остальные образуют с телами равносторонние треугольники (треугольные точки либрации). В данной статье уравнение (2) изучается в окрестности треугольной точки либрации $z_0 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$.

Динамические свойства точек либрации важны как в теоретическом, так и в практическом плане [2], [3]. Особо интересен вопрос существования в окрестностях точек либрации ограниченных и периодических решений. Этому вопросу в различных постановках посвящены исследования многих авторов (например, [3]–[5] и имеющаяся там библиография).

Уравнение (2) зависит от двух параметров ε и μ. Если $\varepsilon = 0$ и выполнено условие

$$0 < 27\mu(1-\mu) < 1, \tag{3}$$

то собственные значения линеаризованной в окрестности z_0 задачи (2) будут чисто мнимыми (этот вопрос более детально обсуждается ниже). Такие значения параметров ε и μ в соответствии с общей теорией бифуркаций [6] являются критическими (точками бифуркации): при изменении параметров у уравнения (2) в окрестности точки либрации z_0 могут возникать нестационарные периодические решения. Вопросы изучения бифуркационных явлений в задаче трех тел в различных постановках рассматривались многими авторами (например, [4], [5], [7], [8]). В этих работах исследование периодических решений осуществляется обычно на основе идей метода малого параметра или метода аналитического продолжения. В настоящей статье предлагается новый метод исследования задачи о бифуркации периодических решений в окрестностях треугольных точек либрации, основанный на топологических идеях [9] и приводящий к итерационному способу построения бифурцирующих решений.

Так как в уравнение (2) входит функция $\cos t$, то естественным является вопрос о существовании у него периодических решений периода $2\pi k$ при некоторых натуральных k.

Пару $(0, \mu_0)$ назовем точкой бифуркации $2\pi k$-периодических решений уравнения (2) в окрестности точки либрации z_0, если каждому $\delta > 0$ отвечают значения $\varepsilon \in [0, \delta)$ и $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$, при которых уравнение (2) имеет нестационарное $2\pi k$-периодическое решение $z_\delta(t)$, при этом $\max\limits_t |z_\delta(t) - z_0| < \delta$.

Приведенное определение носит общий характер. В нем не конкретизируется, при каких именно значениях параметров ε и μ возникают бифурцирующие решения $z_\delta(t)$. Здесь возможны различные ситуации: решения $z_\delta(t)$ появляются только при $\varepsilon > 0$ и $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$) либо только при $\varepsilon = 0$ и $\mu = \mu_0$ и т. п.

Бифуркацию назовем правильной, если бифурцирующие решения $z_\delta(t)$ возникают при $\varepsilon > 0$ и $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$), при этом каждому такому ε и μ отвечает только одно решение $z_\delta(t)$. Правильность бифуркации, по существу, означает наличие непрерывной по ε и μ ветви бифурцирующих решений $z(\varepsilon, \mu, t)$.

Бифуркацию назовем ε-параметрической (μ-параметрической), если бифурцирующие решения уравнения (2) возникают при фиксированном значении $\mu = \mu_0$ и $\varepsilon > 0$ (при $\varepsilon = 0$ и $\mu > \mu_0$ или $\mu < \mu_0$), т. е. уравнение (2) имеет однопараметрические семейства нестационарных периодических решений $z_\varepsilon(t)$ ($z_\mu(t)$) таких, что $z_\varepsilon(t) \to z_0$ ($z_\mu(t) \to z_0$).

2. Основные утверждения

Рассмотрим уравнение

$$z'' + 2iz' - b_{10}z - b_{01}\overline{z} = 0, \tag{4}$$

полученное из уравнения (2) линеаризацией при $\varepsilon = 0$ в окрестности точки z_0; здесь $b_{10} = \frac{3}{2}$, $b_{01} = \frac{3}{2}[\mu(\overline{z} - z_0) - \overline{z}_0]$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0$. При выполнении условия (3) последнее уравнение имеет чисто мнимые решения $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ и $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$, где

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}.$$

Из общей теории бифуркаций [6] следует, что необходимым условием бифуркации $2\pi k$-периодических решений уравнения (2) является требование, чтобы уравнение (4) имело нестационарное $2\pi k$-периодическое решение. Другими словами, необходимо, чтобы либо ω_1, либо ω_2 было числом вида $1/k$. Эти числа при ограничении (3) не могут быть равны 1 и в то же время могут быть любыми из чисел вида $1/k$ при $k \geqslant 2$. Поэтому задача о бифуркации $2\pi k$-периодических решений уравнения (2) может иметь решение лишь при $k \geqslant 2$. В этом случае бифуркационными значениями параметра являются числа $\mu_k = 1/2 - \sqrt{27k^4 - 16k^2 + 16}/(6\sqrt{3}k^2)$; в частности, при $k = 2$ получим $\mu_2 = 1/2 - \sqrt{2}/3$.

Основными утверждениями данной работы являются две теоремы.

Теорема 1. *Значение $(0, \mu_2)$ является точкой правильной бифуркации 4π-периодических решений уравнения (2) в окрестности точки либрации z_0.*

Теорема 2. *Значения $(0, \mu_k)$ при $k \geqslant 3$ являются точками ε-параметрической бифуркации.*

Из теоремы 1 следует, что уравнение (2) имеет семейство нестационарных 4π-периодических решений $z = z(\varepsilon, \mu, t)$, определенных при μ, близких к $\mu_2 = 1/2 - \sqrt{2}/3$, малых $\varepsilon > 0$ и стягивающихся к точке либрации z_0 при $\mu \to \mu_2$ и $\varepsilon \to 0$. В этой теореме не говорится о том, при каких именно значениях параметров ε и μ уравнение (2) имеет решения $z(\varepsilon, \mu, t)$ и каковы асимптотические (по параметрам ε и μ) свойства этих решений. Для изучения этих вопросов предлагается ввести вспомогательный малый параметр $\delta > 0$ так, что бифурцирующие решения $z(\varepsilon, \mu, t)$ и соответствующие значения μ и ε представимы в параметрической форме:

$$z(t) = z_0 + z_1(t)\delta + z_2(t)\delta^2 + \cdots, \quad \mu = \mu_0 + \nu_1\delta + \nu_2\delta^2 + \cdots, \quad \varepsilon = \varepsilon_1\delta + \varepsilon_2\delta^2 + \cdots$$

Для определения коэффициентов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots$ разработана программа в соответствии с алгоритмом, предложенным в работе [10]. Приведем некоторые полученные по этой программе численные результаты: $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 3{,}9241$, $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 0{,}0626$, при этом значения $\varepsilon_1 = 0$ и $\nu_1 = 0$ являются точными. Эти результаты показывают, что бифурцирующие 4π-периодические решения уравнения (2) возникают при $\varepsilon > 0$ и $\mu > \mu_2$. Применительно к исходной системе (1) вычисления показывают, что для всех малых $\delta > 0$ при $\varepsilon = 3,9241\delta^2 + o(\delta^2)$ и $\mu = \mu_0 + 0{,}0626\delta^2 + o(\delta^2)$ система (1) имеет нестационарные 4π-периодические решения $x = x_\delta(t)$ и $y = y_\delta(t)$ такие, что

$$x_\delta(0) = 1/2 - 0{,}8754\delta + o(\delta), \quad y_\delta(0) = \sqrt{3}/2 + 0{,}1834\delta + o(\delta),$$
$$x'_\delta(0) = -0{,}3068\delta + o(\delta), \qquad y'_\delta(0) = 0{,}3254\delta + o(\delta).$$

Из теоремы 2 следует, что уравнение (2) при фиксированных значениях $\mu = \mu_k$, $k \geqslant 3$, имеет в окрестности треугольной точки либрации однопараметрические (по параметру ε) периодические решения.

Замечание. Справедливость теоремы 1 устанавливается на основе специального достаточного признака бифуркации малых решений операторных уравнений (см. ниже). Условия этого признака не выполняются в задаче о бифуркации $2\pi k$-периодических решений при $k \geqslant 3$. Однако, это не означает, что в соответствии с теоремой 2 значение $(0, \mu_k)$ является только точкой ε-параметрической бифуркации. Тип бифуркации в задаче о $2\pi k$-периодических решениях при $k \geqslant 3$ требует более детального анализа.

3. Вспомогательные утверждения

Приведем вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве теоремы 1. Рассмотрим операторное уравнение

$$x = B(\alpha,\beta)x + b(x,\alpha,\beta), \quad x \in R^N \quad (N \geqslant 2), \tag{5}$$

с гладко зависящими от скалярных параметров α и β линейным оператором $B(\alpha,\beta) : \mathrm{R}^N \to \mathrm{R}^N$ и нелинейным оператором $b(x,\alpha,\beta)$, удовлетворяющим равномерно по α и β соотношениям

$$\|b(x,\alpha,\beta)\| = o(\|x\|), \quad \|x\| \to 0; \quad \|b(x,\alpha,\beta) - b(y,\alpha,\beta)\| \leqslant \zeta(r)\|x-y\|,$$

$\|x\|, \|y\| \leqslant r$, где $\zeta(r)$ — неотрицательная функция такая, что $\zeta(r) \to 0$ при $r \to 0$, $\|x\|$ обозначает евклидову норму вектора x.

Уравнение (5) при всех значениях α и β имеет нулевое решение. Пару (α_0, β_0) называют [6] точкой бифуркации малых ненулевых решений уравнения (5), если каждому $\delta > 0$ отвечает пара $(\alpha_\delta, \beta_\delta)$, $|\alpha_\delta - \alpha_0| < \delta$, $|\beta_\delta - \beta_0| < \delta$, такая, что при $\alpha = \alpha_\delta$ и $\beta = \beta_\delta$ уравнение (5) имеет ненулевое решение x_δ, для которого $\|x_\delta\| < \delta$. Необходимым условием бифуркации является требование, чтобы оператор $B(\alpha_0, \beta_0)$ имел собственное значение 1.

Пусть оператор $B_0 = B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2, т. е. корневое подпространство E_0 оператора B_0, отвечающее собственному значению 1, имеет размерность 2 и состоит только из собственных векторов. Сопряженный к B_0 оператор B_0^* также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Линейно независимые собственные векторы операторов B_0 и B_0^*, отвечающие собственному значению 1, обозначим через e, g и e^*, g^* соответственно; их можно выбрать из условий

$$\|e\| = \|g\| = 1, \quad (e, e^*) = (g, g^*) = 1, \quad (e, g^*) = (g, e^*) = 0, \tag{6}$$

где (x, y) обозначает скалярное произведение векторов $x, y \in \mathrm{R}^N$.

Лемма. *Пусть*

$$\det \begin{bmatrix} (B'_\alpha(\alpha_0,\beta_0)e, e^*) & (B'_\beta(\alpha_0,\beta_0)e, e^*) \\ (B'_\alpha(\alpha_0,\beta_0)e, g^*) & (B'_\beta(\alpha_0,\beta_0)e, g^*) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

Тогда пара (α_0, β_0) является точкой бифуркации малых ненулевых решений уравнения (5). При этом существуют непрерывные функции $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\beta = \beta(\delta)$ такие, что $\alpha(\delta) \to \alpha_0$, $\beta(\delta) \to \beta_0$ при $\delta \to 0$, и уравнение (5) при $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\beta = \beta(\delta)$ имеет ненулевое решение $x = x(\delta)$ такое, что $x(\delta) = \delta e + o(\delta)$.

Эта лемма является развитием одного утверждения из [10].

4. Схемы доказательств теорем 1 и 2

1) Для обоснования теоремы 1 полагаем $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = x'$, $x_4 = y'$, вводим вектор $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ и перепишем систему (1) в виде

$$u' = F(u), \quad u \in \mathrm{R}^4, \tag{8}$$

где $F(u) = (x_3, x_4, f_1, f_2)^\top$; f_1 и f_2 — правые части системы (1), в которых следует взять $x_1 = x$ и $x_2 = y$. Точка либрации z_0 соответствует стационарному решению $u_0 = (1/2, \sqrt{3}/2, 0, 0)^\top$ системы (8).

Положив $h = u - u_0$, перепишем систему (8) в виде

$$h' = Ah + a(h), \quad h \in \mathrm{R}^4, \tag{9}$$

где

$$A = F'(u_0) = A(\varepsilon, \mu, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4}\rho & \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho(1-2\mu) & \frac{9}{4}\rho & -2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$a(h) = F(u_0 + h) - Ah = o(\|h\|)$ при $\|h\| \to 0$.

Функция $h(t)$ будет T-периодическим решением уравнения (9) тогда и только тогда, когда вектор $h = h(0)$ является решением уравнения

$$h = Uh, \tag{11}$$

где U — оператор сдвига за время T по траекториям системы (9). Представим U в виде

$$Uh = V(\varepsilon, \mu)h + \upsilon(\varepsilon, \mu, h),$$

где $V(\varepsilon, \mu) = X(\varepsilon, \mu, T)$, матрица $X(\varepsilon, \mu, t)$ — решение задачи

$$\frac{dX}{dt} = A(\varepsilon, \mu, t)X, \quad X(\varepsilon, \mu, 0) = E,$$

а нелинейность $\upsilon(\varepsilon, \mu, h)$ удовлетворяет соотношению $\|\upsilon(\varepsilon, \mu, h)\| = o(\|h\|)$ при $\|h\| \to 0$.

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что для уравнения $h = V(\varepsilon, \mu)h + \upsilon(\varepsilon, \mu, h)$ при $T = 4\pi$ выполнены все условия леммы. Проверка условий леммы для нелинейности $\upsilon(\varepsilon, \mu, h)$ проводится непосредственным подсчетом.

Покажем, что остальные условия леммы также выполнены. С этой целью отметим, что матрица $A(0, \mu, t)$ не зависит от t, т. е. можно положить $A(\mu) = A(0, \mu, t)$ и $A_0 = A(\mu_2)$.

Матрица A_0 имеет следующие собственные значения: $\pm\frac{1}{2}i$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Поэтому оператор $V(0, \mu_2) = e^{A_0 T}$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Собственные векторы операторов $V(0, \mu_2)$ и $V^*(0, \mu_2)$, удовлетворяющие условиям (6), можно построить по следующей схеме. Векторы

$$e_1 = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad e_1^* = \begin{bmatrix} -3 \\ -\sqrt{6} \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad g_1^* = \begin{bmatrix} -4\sqrt{6} \\ -18 \\ 10 \\ -2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

являются собственными для операторов $V(0,\mu_2)$ и $V^*(0,\mu_2)$ соответственно, но они не удовлетворяют условиям (6). Этим условиям удовлетворяют векторы

$$\begin{cases} e = P_1 e_1 + P_2 g_1, \\ g = P_1 g_1 - P_2 e_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} e^* = P_3 e_1^* + P_4 g_1^*, \\ g^* = P_3 g_1^* - P_4 e_1^*, \end{cases}$$

где $P_1 = r\cos\varphi$, $P_2 = r\sin\varphi$ $\left(r^2 = \frac{2}{35},\ \operatorname{ctg} 2\varphi = -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $P_3 = \frac{7}{4}(\sqrt{3}P_1 + \sqrt{2}P_2)$, $P_4 = \frac{7}{4}(-\sqrt{2}P_1 + \sqrt{3}P_2)$.

Покажем, что оператор $V(\varepsilon,\mu)$ обладает свойством (7), а именно выполнено соотношение

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} (V'_\varepsilon(0,\mu_2)e, e^*) & (V'_\mu(0,\mu_2)e, e^*) \\ (V'_\varepsilon(0,\mu_2)e, g^*) & (V'_\mu(0,\mu_2)e, g^*) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{12}$$

По построению имеем $V'_\varepsilon(0,\mu_2) = X'_\varepsilon(0,\mu_2,T)$ и $V'_\mu(0,\mu_2) = X'_\mu(0,\mu_2,T)$, при этом подсчет показывает, что верны равенства

$$X'_\varepsilon(0,\mu_2,T) = \int_0^T e^{(T-\tau)A_0} A'_\varepsilon(0,\mu_2,\tau) e^{A_0\tau} d\tau, \quad X'_\mu(0,\mu_2,T) = \int_0^T e^{(T-\tau)A_0} A'_\mu(0,\mu_2,\tau) e^{A_0\tau} d\tau,$$

где A'_ε и A'_μ — производные матрицы (10) по параметрам ε и μ.

Таким образом, имеем необходимые данные для вычисления числа (12), для которого получим $\Delta = 18\sqrt{66}\pi^2 \neq 0$. □

2) Для доказательства теоремы 2 в операторном уравнении (11) фиксируем $\mu = \mu_k$, $k \geqslant 3$. Получим уравнение с одним параметром ε. Оператор $V(0,\mu_k)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

Пусть для простоты $k = 3$; тогда $\mu_3 = 1/2 - \sqrt{2059}/(54\sqrt{3})$. Уравнение (11) в этом случае имеет вид

$$h = V(\varepsilon)h + \upsilon_2(\varepsilon,h) + \upsilon_3(\varepsilon,h), \tag{13}$$

где $V(\varepsilon) = V(\varepsilon,\mu_3)$, $\upsilon_2(\varepsilon,h)$ — квадратичные слагаемые нелинейности $\upsilon(\varepsilon,\mu_3,h)$ (нелинейность $\upsilon_2(\varepsilon,h)$ может быть выписана явно), а нелинейность $\upsilon_3(\varepsilon,h)$ содержит ее слагаемые выше второй степени малости по h.

Уравнение (13) зависит от одного скалярного параметра $\varepsilon > 0$. Так как матрица $V(0)$ имеет собственное значение 1 кратности 2, то достаточные условия бифуркации для уравнения (13) не могут быть получены только по линейной части уравнения.

Обозначим через E_0 двумерное подпространство в R^4, базисом которого являются векторы e и g, а через E^0 — дополнительное инвариантное для $V(0)$ подпространство. Обозначим через $P_0 : \mathrm{R}^4 \to E_0$ и $P^0 : \mathrm{R}^4 \to E^0$ операторы спектрального проектирования, соответствующие разложению $\mathrm{R}^4 = E_0 \oplus E^0$. Для завершения доказательства теоремы 2 остается перейти от уравнения (13) к эквивалентной системе

$$P_0 h = P_0 V(\varepsilon)h + P_0\upsilon_2(\varepsilon,h) + P_0\upsilon_3(\varepsilon,h);$$
$$P^0 h = P^0 V(\varepsilon)h + P^0\upsilon_2(\varepsilon,h) + P^0\upsilon_3(\varepsilon,h),$$

для анализа которой применить стандартные методы теории ветвления решений нелинейных уравнений [11]. □

5. Заключение

В статье рассмотрена задача о бифуркации периодических решений в окрестностях треугольных точек либрации плоской эллиптической задачи трех тел. Задача содержит два параметра: эксцентриситет $\varepsilon \geqslant 0$ и параметр масс μ. Линеаризованное в окрестности точки либрации при $\varepsilon = 0$ и $\mu = \mu_k$ уравнение имеет нестационарные $2\pi k$-периодические решения. Для изучения задачи о бифуркации $2\pi k$-периодических решений предлагается перейти к оператору сдвига по траекториям решения основного уравнения. Полученное уравнение в окрестности точки либрации имеет двумерное вырождение. Показано, что в задаче о бифуркации 4π-периодических решений при малых $\varepsilon > 0$, и μ, близких к μ_0, основное уравнение имеет семейство нестационарных 4π-периодических решений, близких к треугольной точке либрации. В задаче о бифуркации $2\pi k$-периодических решений при $k \geqslant 3$ показано, что при фиксированных значениях параметра масс уравнение имеет однопараметрические (по параметру ε) бифурцирующие решения в окрестностях треугольных точек либрации.

Литература

[1] Маркеев А.П. *Точки либраций в небесной механике и космодинамике.* – М.: Наука, 1978. – 312 с.

[2] Дубошин Г.Н. *Небесная механика. Аналитические и качественные методы.* – М.: Наука, 1978. – 456 с.

[3] Маршал К. *Задача трех тел.* – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 640 с.

[4] Симо К., Смейл С., Шенсине А. и др. *Современные проблемы хаоса и нелинейности.* – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 304 с.

[5] Симо К. *Периодические траектории плоской задачи N тел с равными массами и телами, движущимися по одной и той же траектории* // Сб. работ “Относительные равновесия. Периодические решения”, институт компьютерых исследований. – Москва–Ижевск, 2006. – с. 175–201.

[6] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.* – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.

[7] Икромов А. *О 6π-периодических решениях плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел* // Астрон. журн. – 1984. – Т. 61. – Вып. 4. – С. 800–805.

[8] Евтеев В.П. *Периодические решения плоской эллиптической задачи трех тел* // Космические исследования. – 1988. – Т. 26. – Вып. 5. – С. 785–787.

[9] Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975. – 511 с.

[10] Ибрагимова Л.С., Юмагулов М.Г. *Функционализация параметра и ее приложения в задаче о локальных бифуркациях динамических систем* // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №4. – С. 3–12.

[11] Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 527 с.

М.Г. Юмагулов

профессор, кафедра прикладной математики и информационных технологий,
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета,
ул. Белова, д. 21, г. Сибай, 453833, Республика Башкортостан,

e-mail: yum_mg@mail.ru

О.Н. Беликова

старший преподаватель, кафедра прикладной математики и информационных технологий,
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета,
ул. Белова, д. 21, г. Сибай, 453833, Республика Башкортостан,

e-mail: belikova-oksana@yandex.ru

M.G. Yumagulov

Professor, Chair of Applied Mathematics and Information Technologies,
Sibai Institute (branch) of Bashkir State University,
21 Belov str., Sibai, 453833 Russia,

`e-mail:` yum_mg@mail.ru

O.N. Belikova

Senior Lecturer, Chair of Applied Mathematics and Information Technologies,
Sibai Institute (branch) of Bashkir State University,
21 Belov str., Sibai, 453833 Russia,

`e-mail:` belikova-oksana@yandex.ru