И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 8 (447)

УДК 517.983

А.В. ГЛУШАК

ИТЕРИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ КОШИ И ДИРИХЛЕ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка $2n > 2$

$$(B_k - \mathbb{A})^n u(t) = \mathbb{A}_0^n u(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

где $B_k u(t) = u''(t) + (k/t)u'(t)$, $k > 0$; $\mathbb{A}_0$ принадлежит пространству $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ линейных ограниченных операторов из $\mathbb{E}$ в $\mathbb{E}$, оператор $\mathbb{A}$ таков, что существует единственное решение $\mathbb{Y}_k(t)u_0$ задачи

$$B_k u(t) = \mathbb{A}u(t), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A}), \quad u'(0) = 0, \tag{2}$$

причем $\|\mathbb{Y}_k(t)u_0\| \le M\exp(\omega t)\|u_0\|$, $M \ge 1$, $\omega \ge 0$. В этом случае будем говорить, что задача (2) равномерно корректна и коротко записывать $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_k(\mathbb{E})$, а оператор-функцию $\mathbb{Y}_k(t)$ будем называть операторной функцией Бесселя (ОФБ) [1]. Если $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_k(\mathbb{E})$, то можно определить оператор-функцию $\mathbb{Y}_m(t)$ для любых значений параметра m, но при $m < k$ эта функция уже не будет ограниченным оператором [2]. Начальные условия для $0 \le j \le n-1$ будем задавать в виде

$$\lim_{t\to 0}(B_k - \mathbb{A})^j u(t) = x_{j+1}, \quad \lim_{t\to 0}((B_k - \mathbb{A})^j u(t))' = 0. \tag{3}$$

Определение 1. Решением уравнения (1) называется функция $u(t)$, для которой при $j = 0, 1, \dots, n-1$ выполняются условия

$$(B_k - \mathbb{A})^j u(t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{D}(\mathbb{A})) \cap \mathbb{C}^2(\overline{\mathbb{R}}_+,\ \mathbb{E})$$

и которая удовлетворяет этому уравнению при $t > 0$.

Как будет показано, вид уравнения (1) позволяет установить корректную разрешимость задачи (1), (3) для уравнения высокого порядка, содержащего неограниченный оператор $\mathbb{A}$, что в общем случае невозможно. Для этого введем следующие обозначения: $\mathbb{E}_n$ — банахово пространство элементов $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^\top$ (значок $\top$ означает транспонирование) с нормой $\|\,|U|\,\| = \sum\limits_{i=1}^n \|u_i\|$; $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$; $u_1(t) = u(t)$, $u_i(t) = (B_k - \mathbb{A})u_{i-1}(t)$;

$$\mathbb{A}_n = \begin{Vmatrix} \mathbb{A} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{A} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{A} \end{Vmatrix}; \qquad \mathbb{P} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \mathbb{A}_0^n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

и задачу (1), (3) запишем в виде

$$B_k U(t) = (\mathbb{A}_n + \mathbb{P})U(t), \tag{4}$$

$$U(0) = X, \quad U'(0) = 0. \tag{5}$$

Легко убедиться, что если $U(t)$ — решение задачи (4), (5), то $u(t)=u_1(t)$ — решение задачи (1), (3).

Определение 2. Задача (1), (3) называется равномерно корректной, если в $\mathbb{E}_n$ равномерно корректна задача (4), (5), т. е. если $\mathbb{A}_n+\mathbb{P}\in\mathbb{G}_k(\mathbb{E}_n)$.

Очевидной является

Лемма. *Если $\mathbb{A}\in\mathbb{G}_k(\mathbb{E})$, то $\mathbb{A}_n\in\mathbb{G}_k(\mathbb{E}_n)$ и при этом ОФБ имеет вид*

$$\mathbb{Y}_k(t,\,\mathbb{A}_n)=\begin{Vmatrix}\mathbb{Y}_k(t,\,\mathbb{A}) & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mathbb{Y}_k(t,\,\mathbb{A}) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{Y}_k(t,\,\mathbb{A})\end{Vmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{A}\in\mathbb{G}_k(\mathbb{E})$, оператор $\mathbb{A}_0\in\mathbb{B}(\mathbb{E})$ такой, что $\mathbb{D}(A)$ инвариантна относительно $\mathbb{A}_0$, и на $\mathbb{D}(\mathbb{A})$ оператор $\mathbb{A}$ коммутирует с $\mathbb{A}_0$, $x_i\in\mathbb{D}(\mathbb{A})$ для $i=1,\dots,n$. Тогда задача (1), (3) равномерно корректна, и при этом ее решение имеет вид*

$$u(t)=\mathbb{Y}_k(t,\mathbb{A})x_1+\frac{(-1)^N\Gamma(k/2+1/2)}{2^{N+1}\Gamma(N+1/2)}t^2\int_0^1\left(s^{2N}\Big(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\Big)^Nf_1(s)+s^{2N}\Big(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\Big)^Nf_2(s)\right)ds,\tag{6}$$

$$f_1(s)=\frac{(1-s^2)^{k/2}(t^2(1-s^2)/4)^{n-1}}{\Gamma(k/2+n)\Gamma(n+1)}\mathbb{A}_0^nH(1;k/2+n,n+1;t^2(1-s^2)\mathbb{A}_0/4;n)\mathbb{Y}_{2N}(ts,\mathbb{A})x_1,$$

$$f_2(s)=\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(t^2(1-s^2)/4)^i}{\Gamma(k/2+1+i)\Gamma(i+2)}H(1;k/2+1+i,2+i;t^2(1-s^2)\mathbb{A}_0/4;n)\mathbb{Y}_{2N}(ts,\mathbb{A})x_{i+2},$$

где N — наименьшее натуральное число такое, что $2N\geq k$;

$$H(\alpha;\beta_1,\beta_2;z;n)=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+nj)z^{nj}}{\Gamma(\beta_1+nj)\Gamma(\beta_2+nj)(nj)!}\tag{7}$$

и для $i=0,1,\dots,n-1$ $x_{i+1}\in\mathbb{D}(\mathbb{A})$.

Доказательство. Поскольку $\mathbb{P}\in\mathbb{B}(\mathbb{E}_n)$ и $\mathbb{A}_n\times\mathbb{P}=\mathbb{P}\times\mathbb{A}_n$, то в силу леммы 3 и теоремы 3 из [3] $\mathbb{A}_n+\mathbb{P}\in\mathbb{G}_k(\mathbb{E}_n)$, поэтому задача (4), (5), а следовательно, и задача (1), (3) равномерно корректны, и нам остается установить представление (6).

Равномерная корректность задачи (4), (5) и теорема 3 из [3] позволяют записать решение $U(t)$ в виде

$$\begin{aligned}U(t)=\mathbb{Y}_k(t,\mathbb{A}_n+\mathbb{P})X=\mathbb{Y}_k(t,\mathbb{A}_n)X+\frac{(-1)^N\Gamma(k/2+1/2)}{2^{N+1}\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(N+1/2)}t^2\mathbb{P}\times\\ \times\int_0^1s^{2N}\Big(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\Big)^N((1-s^2)^{k/2}{}_1F_2(1;k/2+1,2;t^2(1-s^2)\mathbb{P}/4))\mathbb{Y}_{2N}(ts,\mathbb{A}_n)X\,ds,\end{aligned}\tag{8}$$

где N — наименьшее натуральное число такое, что $2N>k$,

$${}_1F_2(1;k/2+1,2;z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k/2+1)z^i}{\Gamma(k/2+1+i)\Gamma(i+2)}.$$

Степени матрицы $\mathbb{P}$ обладают следующими свойствами: для $i = 1, \dots, n-1$

$$\begin{array}{r c c}
 & & \text{№ строки} \\
\mathbb{P}^i = & \left\| \begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & \dots\dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\
0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots\dots\dots & & & & & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dots\dots\dots & & & & & & 0 & 1 \\
\mathbb{A}_0^n & 0 & \dots\dots\dots & & & & & & & 0 \\
0 & \mathbb{A}_0^n & 0 & \dots\dots & & & & & & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \mathbb{A}_0^n & 0 & \dots\dots & & & 0
\end{array} \right\| & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ . \\ n-i-1 \\ n-i \\ n-i+1 \\ n-i+2 \\ \dots \\ n \end{array}, \\
\text{№ столбца} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots\dots & n \end{array} &
\end{array}$$

$\mathbb{P}^n = \mathbb{A}_0^n \times \mathbb{J}$, где $\mathbb{J}$ — единичная матрица. Поэтому

$$
{}_1F_2(1; k/2+1, 2; t^2(1-s^2)\mathbb{P}/4) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k/2+1) z^{nj} \mathbb{A}_0^{nj}}{\Gamma(k/2+nj+1)\Gamma(nj+2)} \mathbb{J} +
$$

$$
+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k/2+1) z^{nj+1} \mathbb{A}_0^{nj}}{\Gamma(k/2+nj+2)\Gamma(nj+3)} \mathbb{P} + \dots + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k/2+1) z^{nj+n-1} \mathbb{A}_0^{nj}}{\Gamma(k/2+nj+n)\Gamma(nj+n+1)} \mathbb{P}^{n-1} =
$$

$$
= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k/2+1) z^i}{\Gamma(k/2+1+i)\Gamma(i+2)} H(1; k/2+1+i; i+2; z\mathbb{A}_0; n) \mathbb{P}^i, \quad (9)
$$

где $z = t^2(1-s^2)/4$.

Для определения решения $u(t) = u_1(t)$ нужна только первая строка матрицы произведения $\mathbb{P} \times {}_1F_2(1; k/2+1, 2; z\mathbb{P})$, которая, как легко видеть, совпадает со второй строкой матрицы ${}_1F_2(1; k/2+1, 2; z\mathbb{P})$ и имеет вид

$$
\Big(\frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+n)\Gamma(n+1)} z^{n-1} \mathbb{A}_0^n H(1; k/2+n, n+1; z\mathbb{A}_0; n);\ H(1; k/2+1, 2; z\mathbb{A}_0; n);
$$

$$
\frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+2)\Gamma(3)} z H(1; k/2+2, 3; z\mathbb{A}_0; n); \dots ; \frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+n-1)\Gamma(n)} z^{n-2} H(1; k/2+n-1, n; z\mathbb{A}_0; n) \Big).
$$

Таким образом, из (8), (9) вытекает представление (6).

Отметим, что при $n = 1$ $H(\alpha; \beta_1, \beta_2; z; n) = {}_1F_2(\alpha; \beta_1, \beta_2; z)$, и равенство (6) совпадает с равенством, доказанным в теореме 3 из [3]. $\square$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при* $m > k$ *и* $j = 0, 1, \dots, n-1$ *задача*

$$
(B_m - \mathbb{A})^n u(t) = \mathbb{A}_0^n u(t), \quad t > 0, \quad (10)
$$

$$
\lim_{t\to 0} (B_m - \mathbb{A})^j u(t) = x_{j+1}, \quad \lim_{t\to 0} ((B_m - \mathbb{A})^j u(t))' = 0 \quad (11)
$$

равномерно корректна, и при этом ее решение имеет вид

$$
u(t) = \frac{2\Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2)} \int_0^1 s^k (1-s^2)^{m/2-k/2-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t^2(1-s^2)/4)^i}{\Gamma(m/2-k/2+i)\Gamma(i+1)} \times
$$

$$
\times H(1; m/2-k/2+i, 1+i; t^2(1-s^2)\mathbb{A}_0/4; n) \mathbb{Y}_k(ts, \mathbb{A}) x_{i+1}\, ds \quad (12)
$$

(*функция* $H(\cdot)$ *определена формулой* (7)).

Доказательство. Задача (10), (11) сводится к задаче

$$B_m U = (\mathbb{A}_n + \mathbb{P})U, \tag{13}$$

$$U(0) = X, \quad U'(0) = 0, \tag{14}$$

которая при $m > k$ в силу следствия 2 [1] равномерно корректна вместе с задачей (4), (5), и мы переходим к установлению равенства (12).

Подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, равномерная корректность задачи (13), (14) позволяет записать решение $U(t)$ в виде

$$U(t) = \mathbb{Y}_m(t, \mathbb{A}_n + \mathbb{P})X = \frac{2\Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(m/2-k/2)} \int_0^1 s^k(1-s^2)^{m/2-k/2-1} \times \\ \times {}_0F_1(m/2-k/2-1; t^2(1-s^2)\mathbb{P}/4)\mathbb{Y}_k(ts, \mathbb{A}_n)X\, ds. \tag{15}$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, вычислим

$$ {}_0F_1(m/2-k/2-1; t^2(1-s^2)\mathbb{P}/4) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m/2-k/2)z^i\mathbb{P}^i}{\Gamma(m/2-k/2+i)\Gamma(i+1)} = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m/2-k/2)z^{nj}\mathbb{A}_0^{nj}}{\Gamma(m/2-k/2+nj)\Gamma(nj+1)}\mathbb{J} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m/2-k/2)z^{nj+1}\mathbb{A}_0^{nj}}{\Gamma(m/2-k/2+nj+1)\Gamma(nj+2)}\mathbb{P} + \dots + \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m/2-k/2)z^{nj+n-1}\mathbb{A}_0^{nj}}{\Gamma(m/2-k/2+nj+n-1)\Gamma(nj+n)}\mathbb{P}^{n-1} = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m/2-k/2)z^i}{\Gamma(m/2-k/2+i)\Gamma(i+1)} H(1; m/2-k/2+i; i+1; z\mathbb{A}_0; n)\mathbb{P}^i, \tag{16}$$

где $z = t^2(1-s^2)/4$.

Для определения решения $u(t) = u_1(t)$ нужна только первая строка матрицы ${}_1F_2(m/2-k/2-1; z\mathbb{P})$, которая имеет вид

$$\Big(H(1; \tfrac{m-k}{2}, 1; z\mathbb{A}_0; n) \frac{\Gamma(m/2-k/2)}{\Gamma(m/2-k/2+1)\Gamma(2)} zH(1; \tfrac{m-k}{2}+1, 2; z\mathbb{A}_0; n); \dots; \\ \frac{\Gamma(m/2-k/2)}{\Gamma(m/2-k/2+n-1)\Gamma(n)} z^{n-1}H(1; \tfrac{m-k}{2}+n-1, n; z\mathbb{A}_0; n)\Big).$$

Таким образом, из (15), (16) вытекает (12). $\square$

Замечание 1. Если в (11) несколько первых условий нулевые, то интеграл в формуле (12) будет сходиться и при некоторых $m \le k$, например, если $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$, то

$$u(t) = \frac{\Gamma(m/2+1/2)t^{2n-2}}{2^{2n-3}\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(m/2-k/2+n-1)\Gamma(n)} \times \\ \times \int_0^1 H(1; m/2-k/2+n-1, n; t^2(1-s^2)\mathbb{A}_0/4; n)s^k(1-s^2)^{m/2-k/2+n-2}\mathbb{Y}_k(ts)x_n ds,$$

и интеграл сходится при $m/2 - k/2 + n - 1 > 0$.

Дальнейшие исследования этого раздела направлены на то, чтобы установить явную формулу решения задачи Коши для уравнения, в некотором смысле более общего, чем (1),

$$\prod_{i=1}^{n}(B_{k_i} - \mathbb{A}_i)u(t) \equiv (B_{k_n} - \mathbb{A}_n)(B_{k_{n-1}} - \mathbb{A}_{n-1})\dots(B_{k_1} - \mathbb{A}_1)u(t) = 0, \quad t > 0, \tag{17}$$

где $k_i \geq 0$ и $\mathbb{A}_i \in \mathbb{G}_{k_i}(\mathbb{E})$ являются, вообще говоря, различными некоммутирующими операторами.

Уравнения вида (17), в которых операторы $\mathbb{A}_i$ являются операторами Лапласа в пространствах дифференцируемых функций, рассматривались в работах [4]–[6]. В частности, в [5] все $B_{k_i} = B_\mu$, $\mu > 0$, $\mathbb{A}_i = \Delta/a_i^2$, а в [6] $\mathbb{A}_i = \Delta$, $B_{k_i} = B_\mu$, $\mu < 0$. В случае, когда все $k_i = 0$, в [4] изучалась задача Коши, решение которой представлено с помощью формул, обобщающих формулы Герглотца–Петровского ([7], с. 28–32). В указанных выше работах получены формулы, выражающие решения задачи Коши через сферические средние начальных функций (аналог формулы Кирхгофа для волнового уравнения). Установим формулы для решения задачи Коши в терминах ОФБ, что является абстрактным аналогом цитируемых результатов.

Введем обозначения $u_1(t) = u(t)$, $u_i(t) = (B_{k_{i-1}} - \mathbb{A}_{i-1})u_{i-1}(t)$ $(i = 2, \ldots, n)$ и для $1 \leq i \leq n$ будем искать решение уравнения (17), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_i(0) = x_i, \quad u_i'(0) = 0. \tag{18}$$

Теорема 3. *Пусть для* $i = 1, \ldots, n$ $k_i \geq 0$ *и* $\mathbb{A}_i \in \mathbb{G}_{k_i}(\mathbb{E})$. *Тогда существует единственное решение задачи* (17), (18), *и это решение представимо в виде*

$$\begin{aligned} u(t) = \mathbb{Y}_{k_1}(t, \mathbb{A}_1)x_1 + \int_0^t \mathbb{Q}_{k_1}(t, t_1, \mathbb{A}_1)\mathbb{Y}_{k_2}(t_1, \mathbb{A}_2)x_2 dt_1 + \\ + \int_0^t \int_0^{t_1} \mathbb{Q}_{k_1}(t, t_1, \mathbb{A}_1)\mathbb{Q}_{k_2}(t_1, t_2, \mathbb{A}_2)\mathbb{Y}_{k_3}(t_2, \mathbb{A}_3)x_3 dt_2 dt_1 + \cdots + \\ + \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-2}} \mathbb{Q}_{k_1}(t, t_1, \mathbb{A}_1)\mathbb{Q}_{k_2}(t_1, t_2, \mathbb{A}_2) \ldots \mathbb{Q}_{k_{n-1}}(t_{n-2}, t_{n-1}, \mathbb{A}_{n-1}) \times \\ \times \mathbb{Y}_{k_n}(t_{n-1}, \mathbb{A}_n)x_n dt_{n-1} dt_{n-2} \ldots dt_1, \end{aligned} \tag{19}$$

где для $k_i \neq 1$

$$\begin{gathered} \mathbb{Q}_{k_i}(t, \tau, \mathbb{A}_i) = (t^{1-k_i}\tau^{k_i}\mathbb{Y}_{2-k_i}(t, \mathbb{A}_i)\mathbb{Y}_{k_i}(\tau, \mathbb{A}_i) - \tau\mathbb{Y}_{k_i}(t, \mathbb{A}_i)\mathbb{Y}_{2-k_i}(\tau, \mathbb{A}_i))/(1 - k_i), \\ \mathbb{Q}_1(t, \tau, \mathbb{A}_i) = \tau\mathbb{Z}_1(t, \mathbb{A}_i)\mathbb{Y}_1(\tau, \mathbb{A}_i) - \mathbb{Y}_1(t, \mathbb{A}_i)\mathbb{Z}_1(\tau, \mathbb{A}_i), \\ \mathbb{Z}_1(t, \mathbb{A}_i) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1 - s^2)^{-1/2} \ln t(1 - s^2)\mathbb{Y}_0(ts, \mathbb{A}_i) ds \end{gathered}$$

— *неограниченное при* $t \to 0$ *решение уравнения* (1), *если* $k = 1$. *Предполагается также, что* x_i *таковы, что определены все операторы, входящие в* (19).

Доказательство теоремы проводится индукцией по n с использованием результатов из [8] о разрешимости неоднородного уравнения. Начальные условия (3), (11), (18) являются условиями не только на искомую функцию $u(t) = u_1(t)$, но и на функции $u_i(t)$ при $i \geq 2$. В некоторых случаях возможна и классическая постановка начальных условий, например, можно задавать начальные условия в виде

$$u^{(2i)}(0) = g_{2i}, \quad u^{(2i+1)}(0) = 0, \quad i = 0, \ldots, n - 1, \tag{20}$$

при этом условия (18) выражаются через (20).

Действительно, используя разложение функции $u(t)$ по формуле Тейлора и равенство

$$d^m/dt^m B_k u(t)|_{t=0} = (1 + k/(1 + m))u^{(m+2)}(0),$$

доказанное в [5], получим

$$\begin{gathered} x_2 = u_2(0) = (1 + k_1)u_1''(0) - \mathbb{A}_1 u_1(0) = (1 + k_1)g_2 - \mathbb{A}_1 g_0, \\ u_2'(0) = 0, \quad u_2''(0) = (1 + k_1/3)g_4 - \mathbb{A}_1 g_2. \end{gathered}$$

Аналогично, для $i = 2, \dots, n-1$

$$x_{i+1} = u_{i+1}(0) = (1 + k_i)u_i''(0) - \mathbb{A}_i x_i, \quad u_{i+1}'(0) = 0,$$

где $u_i''(0)$ определяются рекуррентной формулой

$$\begin{aligned} u_i''(0) &= d^2/dt^2(B_{k_{i-1}} - \mathbb{A}_{i-1})u_{i-1}(t)|_{t=0} = (1 + k_{i-1}/3)u_{i-1}^{(4)}(0) - \mathbb{A}_{i-1}u_{i-1}''(0) = \\ &= (1 + k_{i-1}/3)d^4/dt^4(B_{k_{i-2}} - \mathbb{A}_{i-2})u_{i-2}(t)|_{t=0} - \mathbb{A}_{i-1}d^2/dt^2(B_{k_{i-2}} - \mathbb{A}_{i-2})u_{i-2}(t)|_{t=0} = \\ &= (1 + k_{i-1}/3)((1 + k_{i-2}/5)u_{i-2}^{(6)}(0) - \mathbb{A}_{i-2}u_{i-2}^{(4)}(0)) - \mathbb{A}_{i-1}((1 + k_{i-2}/3)u_{i-2}^{(4)}(0) - \mathbb{A}_{i-2}u_{i-2}''(0)) = \\ &= \prod_{m=1}^{i-1}(1 + k_{i-m}(2m+1))g_{2i} + \sum_{N=1}^{i-2}(-1)^N \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_N \le i-2} \prod_{\substack{m=1 \\ m \ne j_1, \dots, m \ne j_N}}^{i-1} (1 + k_{i-m}/(2m+1)) \times \\ &\times \mathbb{A}_{j_N} \mathbb{A}_{j_1} g_{2i-2N} - \mathbb{A}_{i-1}u_{i-1}''(0). \end{aligned} \tag{21}$$

Естественно, следует предполагать, что g_{2i} в (20) принадлежат нужным в (21) областям определения операторов.

Пример 1. Если в (20) $g_0 = g_2 = \dots = g_{2n-4} = 0$, $g_{2n-2} \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$, то в (11) $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$, $x_n = (1+m)u_{n-1}''(0) = \prod\limits_{i=0}^{n-2}(1 + m/(2i+1))g_{2n-2}$, и решение задачи (10), (20) в силу замечания 1 имеет вид

$$\begin{aligned} u(t) = &\frac{\Gamma(m/2 + 1/2)t^{2n-2}}{2^{2n-3}\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(m/2 - k/2 + n - 1)\Gamma(n)} \times \\ &\times \int_0^1 s^k(1 - s^2)^{m/2 - k/2 + n - 2} H(1; m/2 - k/2 + n - 1, n; t^2(1 - s^2)\mathbb{A}_0/4; n) \times \\ &\times \prod_{i=0}^{n-2}(1 + m/(2i+1))\mathbb{Y}_k(ts)g_{2n-2}ds. \end{aligned}$$

Пример 2. Пусть в (17) для $i = 1, \dots, n$ $k_i = 0$ и $\mathbb{A}_i \in \mathbb{G}_0(\mathbb{E})$. Тогда решение задачи (17), (20) имеет вид

$$\begin{aligned} u(t) = &\mathbb{C}(t, \mathbb{A}_1)g_0 + \int_0^t \mathbb{S}(t - t_1, \mathbb{A}_1)\mathbb{C}(t_1, \mathbb{A}_2)(g_2 - \mathbb{A}_1 g_0)dt_1 + \dots + \\ &+ \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-2}} \mathbb{S}(t - t_1, \mathbb{A}_1)\mathbb{S}(t_1 - t_2, \mathbb{A}_2) \dots \mathbb{S}(t_{n-2} - t_{n-1}, \mathbb{A}_{n-1})\mathbb{C}(t_{n-1}, \mathbb{A}_n) \times \\ &\times \left(g_{2n-2} + \sum_{N=1}^{n-1}(-1)^N \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_N \le n-1} \mathbb{A}_{j_N} \cdots \mathbb{A}_{j_1} g_{2n-2N-2}\right) dt_{n-1}dt_{n-2} \dots dt_1. \end{aligned} \tag{22}$$

Представление решения по формуле (22) получено из (19). При выводе мы учли, что $\mathbb{Q}_{k_i}(t, \tau, \mathbb{A}_i)|_{k_i=0} = \mathbb{S}(t - \tau, \mathbb{A}_i)$, где $\mathbb{S}(t, \mathbb{A}_i) = \int\limits_0^t \mathbb{C}(\tau, \mathbb{A}_i)d\tau$ — операторная синус-функция, и, как следует из (21), для $i = 2, \dots, n$

$$x_i = g_{2i-2} + \sum_{N=1}^{i-1}(-1)^N \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_N \le i-1} \mathbb{A}_{j_N} \dots \mathbb{A}_{j_1} g_{2i-2N-2}.$$

При этом предполагается, что $g_{2i-2N-2} \in \mathbb{D}(\mathbb{A}_{j_N} \dots \mathbb{A}_{j_1})$.

Полученная формула (22) является новой и в теории несингулярных уравнений.

Под итерированной задачей Дирихле будем понимать задачу отыскания решения уравнения

$$(B_m + \mathbb{A})^n w(t) = \mathbb{A}_0^n w(t), \quad t > 0, \tag{23}$$

удовлетворяющего условиям

$$w_i(0) = x_i, \quad \sup_{t\ge 0} \|w_i(t)\| \le M, \tag{24}$$

где $w_1(t) = w(t)$, $w_i(t) = (B_m + \mathbb{A})w_{i-1}(t)$ для $i = 2, \dots, n$.

Теорема 4. *Пусть $m < 1$, $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_k(\mathbb{E})$ при некотором $k \ge 0$ и соответствующая ОФБ равномерно ограничена, а оператор $\mathbb{A}_0$ такой же, как в теореме 1. Тогда, если для $i = 1, \dots, n$ $x_i \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$, то существует единственное решение задачи (23), (24), которое представимо в виде*

$$\begin{aligned} w(t) = {} & \frac{2t^{1-m}}{B(1/2 - m/2, 1/2 + k/2)} \int_0^\infty y^k (t^2+y^2)^{m/2-k/2-1} \Bigg(\mathbb{Y}_k(y,\mathbb{A})x_1 + \\ & + \frac{(-1)^{N+1}\Gamma(k/2+1/2)}{2^{N+1}\Gamma(N+1/2)} y^2 \int_0^1 \Bigg(s^{2N}\Big(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\Big)^N \Bigg(\frac{(1-s^2)^{k/2}(-y^2(1-s^2)/4)^{n-1}}{\Gamma(k/2+n)\Gamma(n+1)} \times \\ & \times \mathbb{A}_0^n H(1; k/2+n, n+1; -y^2(1-s^2)\mathbb{A}_0/4; n) \Bigg) \mathbb{Y}_{2N}(ys,\mathbb{A})x_1 + \\ & + s^{2N}\Big(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\Big)^N \Bigg(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-y^2(1-s^2)/4)^i}{\Gamma(k/2+1+i)\Gamma(i+2)} \times \\ & \times H(1; k/2+1+i, 2+i; -y^2(1-s^2)\mathbb{A}_0/4; n) \Bigg) \mathbb{Y}_{2N}(ys,\mathbb{A})x_{i+2} \Bigg) ds \Bigg) dy, \end{aligned} \tag{25}$$

где N — наименьшее натуральное число такое, что $2N \ge k$.

Доказательство. Задача (23), (24) сводится к задаче в банаховом пространстве $\mathbb{E}_N$

$$B_m W(t) = -(\mathbb{A}_n - \mathbb{P})W(t), \tag{26}$$

$$W(0) = X, \quad \sup_{t\ge 0} \| \, |W(t)| \, \| \le M. \tag{27}$$

Поскольку $\mathbb{A}_n - \mathbb{P} \in \mathbb{G}_k(\mathbb{E}_n)$, то в силу следствия 1 из [9] задача (26), (27) имеет единственное решение

$$W(t) = \frac{2t^{1-m}}{B(1/2-m/2, 1/2+k/2)} \int_0^\infty y^k (t^2+y^2)^{\frac{m-k-2}{2}} \mathbb{Y}_k(y, \mathbb{A}_n - \mathbb{P}) X \, dy.$$

Определив $\mathbb{Y}_k(y, \mathbb{A}_n - \mathbb{P})$ подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, приходим к (25).

Замечание 2. Случай, когда в (23), (24) $\mathbb{A}_0 = 0$ и $\mathbb{A} = \mathbb{B}^2$, где $\mathbb{B}$ — генератор сильно непрерывной группы, рассматривался ранее в [10] без указания явных формул для решения и исследования единственности.

Литература

1. Глушак А.В. *Операторная функция Бесселя* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 352. – № 5. – С. 587–589.
2. Глушак А.В., Шмулевич С.Д. *Интегральные представления решений одного сингулярного уравнения, содержащего сумму коммутирующих операторов* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 5. – С. 831–838.
3. Глушак А.В. *О возмущении абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – № 3. – С. 363–369.
4. Гальперн С.А., Кондрашов В.Е. *Задача Коши для дифференциальных операторов, распадающихся на волновые множители* // ТММО. – 1967. – Т. 16. – С. 109–136.

5. Киприянов И.А., Иванов Л.А. *О лакунах для некоторых классов уравнений с особенностями* // Матем. сб. – 1979. – Т.110. – № 2. – С. 235–250.
6. Алдашев С.А. *О свойствах решений уравнений в частных производных, распадающихся на множители с особенностями* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 1. – С. 168–171.
7. Йон Ф. *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными.* – М.: Ин. лит., 1958. – 158 с.
8. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. *Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 6. – С. 55–56.
9. Глушак А.В. *О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 4. – С. 433–437.
10. Bragg L.R. *Vector lifting and factorable differential operators* // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – V. 12 – № 5. – P. 722–730.

Воронежский государственный технический университет

Поступила 10.02.1998