ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 2 (477)

УДК 517.972, 533.6

М.А. АРГУЧИНЦЕВА

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ТЕЛА С МИНИМАЛЬНЫМ РАДИАЦИОННЫМ НАГРЕВОМ ПОВЕРХНОСТИ

Введение

Оптимальное аэродинамическое проектирование космических аппаратов является одной из перспективных областей приложения методов оптимального управления и вариационного исчисления. Космические аппараты, движущиеся в атмосферах планет с большими сверхзвуковыми скоростями, подвергаются интенсивному конвективному и радиационному нагреву поверхности. При скоростях движения, близких ко второй космической и выше, перед телами возникают сильные ударные волны, при прохождении которых газ начинает излучать. В данном диапазоне скоростей определяющую роль в нагреве тел играет радиационный теплообмен. Одним из эффективных способов уменьшения тепловых потоков к поверхности является выбор оптимальных форм космических аппаратов.

В последнее время наряду с улучшением традиционных конфигураций, таких как осесимметричные тела и плоские крылья, ведется поиск новых трехмерных форм тел, обладающих оптимальными аэродинамическими и теплофизическими характеристиками. Из теоретических и экспериментальных исследований известно, что тела с некруговыми поперечными сечениями могут иметь меньшее сопротивление по сравнению с эквивалентными телами вращения (см. обзор [1], с. 47–128).

Нужно отметить, что аналогичные результаты имеют место и при оптимизации форм тел по тепловому потоку. В ([2]; [3], с. 149–178) найдены оптимальные формы трехмерных тел с минимальным суммарным (конвективным и радиационным) нагревом поверхности вдоль траектории движения, обладающие эллиптическим донным сечением.

Однако вопросы, касающиеся оптимизации неосесимметричных пространственных конфигураций по нагреву поверхности, еще недостаточно изучены. Это связано с тем, что в большинстве работ, посвященных экстремальным проблемам теплообмена, рассматривались лишь задачи нахождения оптимальных форм продольных контуров осесимметричных и плоских тел (см. обзоры литературы [3], с. 6–17; [4]). Поэтому интересным представляется исследование влияния формы поперечных контуров трехмерных тел на их теплообмен.

Целью данной работы является постановка и аналитическое решение новых оптимизационных задач нахождения форм трехмерных тел, минимизирующих радиационный нагрев поверхности. Математически данные задачи являются изопериметрическими вариационными задачами с двумя неизвестными функциями, описывающими соответственно продольный и поперечный контуры тела. В классе тонких тел, обладающих свойством гомотетии, исходную оптимизационную задачу можно разбить на две более простые: об оптимальном продольном (раздел 2) и оптимальном поперечном (разделы 3–7) контурах тела. Показано, что оптимальный поперечный контур будет состоять из n симметричных циклов.

Особенностью подхода, предложенного автором для решения данной задачи, является то, что минимум функционала радиационного нагрева ищется посредством составления уравнений дуг экстремали и отыскания числа этих дуг. Это приводит к введению дополнительного оптимизирующего условия на число циклов. Совместное интегрирование уравнения Эйлера и указанного условия позволило найти три класса аналитических решений (тело вращения, звездообразное тело, звездообразное тело с круговыми включениями). Использование оптимальных форм тел дает значительный выигрыш в снижении радиационного нагрева поверхности по сравнению с эквивалентными телами вращения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим гиперзвуковое движение трехмерного тела в цилиндрической системе координат (r, θ, z), ось z которой выбрана в направлении, противоположном движению тела, а начало координат совпадает с критической точкой тела. Пусть L — заданная длина тела вдоль оси z. Ограничимся исследованием класса поверхностей, обладающих свойством гомотетии. Тогда каждое поперечное сечение тела, перпендикулярное оси z, должно быть геометрически подобно донному сечению тела. Поверхности таких тел описываются уравнением

$$f(r, \theta, z) = r - \varphi(z)\rho(\theta) = 0,$$

где функции $\varphi(z)$, $\rho(\theta)$ — соответственно продольный и поперечный контуры тела.

В работе ([5], с. 147) было показано, что распределение локального радиационного теплового потока q_R по поверхности трехмерного тела имеет вид

$$q_R = q_{R0}(-\langle N, e_z\rangle)^m, \quad \langle N, e_z\rangle = \frac{-\dot{\varphi}(z)\rho(\theta)}{[1 + (\dot{\rho}(\theta)/\rho(\theta))^2 + (\dot{\varphi}(z)\rho(\theta))^2]^{1/2}},$$

где q_{R0} — коэффициент радиационного теплообмена в критической точке тела; m — параметр излучения, определяемый излучающими способностями среды и скоростью движения тела ($3 \le m \le 10$); N — единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности тела; (e_r, e_θ, e_z) — единичные векторы цилиндрической системы координат.

Интегрируя локальный радиационный тепловой поток q_R вдоль боковой поверхности тела S, получим формулу для коэффициента суммарного радиационного теплового потока к телу

$$C_R = \iint\limits_S \frac{q_R}{q_{R0}} ds; \quad ds = \frac{r}{\langle N, e_r\rangle} d\theta dz;$$

$$\langle N, e_r\rangle = [1 + (\dot{\rho}(\theta)/\rho(\theta))^2 + (\dot{\varphi}(z)\rho(\theta))^2]^{-1/2},$$

или

$$C_R = \int_0^{2\pi}\int_0^L \frac{\varphi(z)\dot{\varphi}^m(z)\rho^{m+1}(\theta)d\theta dz}{\{1 + (\dot{\rho}(\theta)/\rho(\theta))^2 + (\dot{\varphi}(z)\rho(\theta))^2\}^{(m-1)/2}}.$$

В классе тонких тел ($(\dot{\varphi}(z)\rho(\theta))^2 \ll 1$) выражение для C_R можно представить в виде произведения двух функционалов $J_1(\varphi)$ и $J_2(\rho)$, зависящих соответственно только от формы продольного $\varphi(z)$ или поперечного $\rho(\theta)$ контуров тела:

$$C_R = J_1(\varphi)J_2(\rho), \tag{1.1}$$

$$J_1(\varphi) = \int_0^L \varphi(z)\dot{\varphi}^m(z)dz, \quad J_2(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^{2m}(\theta)d\theta}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{(m-1)/2}}.$$

Таким образом, задачу о нахождении формы трехмерного тела, минимизирующей радиационный нагрев поверхности, можно разделить на две задачи: об оптимальном продольном и оптимальном поперечном контурах тела.

В качестве ограничений, накладываемых на форму тела, можно рассмотреть изопериметрические условия на площадь донного сечения тела S_B

$$\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)d\theta = 2S_B \tag{1.2}$$

и на площадь S смачиваемой поверхности тела

$$\int_0^{2\pi}\int_0^L \varphi(z)\rho(\theta)\{1+(\dot\rho(\theta)/\rho(\theta))^2+(\dot\varphi(z)\rho(\theta))^2\}^{1/2}d\theta dz = S,$$

которое в классе тонких тел примет вид

$$\int_0^{2\pi}\int_0^L \varphi(z)[\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)]^{1/2}d\theta dz = S. \tag{1.3}$$

2. Оптимальный продольный контур

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: среди гладких функций $\varphi(z)$, описывающих продольный контур тела и удовлетворяющих граничным условиям $\varphi(0)=0$, $\varphi(L)=1$, найти ту, которая минимизирует функционал радиационного теплового потока $J_1(\varphi)$ (1.1).

Функция $\varphi(z)$, минимизирующая функционал $J_1(\varphi)$, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$(1-m)\varphi(z)\dot\varphi^m(z) = C, \quad C = \mathrm{const},$$

которое с учетом граничных условий имеет решение

$$\varphi(z) = (z/L)^{\frac{m}{m+1}}. \tag{2.1}$$

Для полученной кривой удовлетворяется условие Лежандра. Запишем значение функционала на экстремали

$$J_1^{min}(\varphi) = L^{1-m}\left(\frac{m}{m+1}\right)^m.$$

Учитывая (2.1), для продольного контура получим изопериметрическое условие на площадь смачиваемой поверхности (1.3)

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)}d\theta = S_*, \quad S_* = \frac{S}{L}\frac{2m+1}{m+1} = \mathrm{const}\,. \tag{2.2}$$

3. Оптимальный поперечный контур

Задачу об оптимальном поперечном контуре тела можно сформулировать следующим образом. Среди кусочно-гладких функций $\rho(\theta)$, удовлетворяющих условию замкнутости контура

$$\rho(0) = \rho(2\pi)$$

и изопериметрическим условиям на площади донного сечения S_B (1.2) и смачиваемой поверхности тела S_* (2.2), найти функцию, минимизирующую функционал радиационного теплового потока $J_2(\rho)$ (1.1).

Для исследования поставленной задачи воспользуемся подходом, предложенным в ([6], с. 306–325). Выпишем функционал Лагранжа исследуемой задачи

$$J(\rho) = \int_0^{2\pi} F(\lambda_1,\lambda_2,\rho,\dot\rho)d\theta; \tag{3.1}$$

$$F(\lambda_1,\lambda_2,\rho,\dot\rho) = \frac{\rho^{2m}(\theta)}{[\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)]^{(m-1)/2}} + \lambda_1\rho^2(\theta) + \lambda_2\sqrt{\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)},$$

где λ_1, λ_2 — неопределенные постоянные множители Лагранжа.

Функция, являющаяся решением исходной вариационной задачи, должна удовлетворять

1) уравнению Эйлера для функционала Лагранжа (3.1)

$$F - \dot\rho F_{\dot\rho} = \frac{\rho^{2m}(\theta)[\rho^2(\theta)+m\dot\rho^2(\theta)]}{[\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)]^{\frac{m+1}{2}}} + \lambda_1\rho^2(\theta) + \frac{\lambda_2\rho^2(\theta)}{\sqrt{\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)}} = C = \mathrm{const}; \tag{3.2}$$

2) условию трансверсальности

$$F_{\dot\rho}|_0 = F_{\dot\rho}|_{2\pi} = 0, \tag{3.3}$$

$$F_{\dot\rho} = \dot\rho(\theta)\left\{\frac{(1-m)\rho^{2m}(\theta)}{[\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)]^{\frac{m+1}{2}}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)}}\right\};$$

3) условию Лежандра

$$F_{\dot\rho\dot\rho} = \frac{(m-1)\rho^{2m}(\theta)}{[\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)]^{\frac{m+3}{2}}}\left[m\dot\rho^2(\theta) - \rho^2(\theta) + \frac{\lambda_2[\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)]^{m/2}}{(m-1)\rho^{2m-2}(\theta)}\right] \geq 0; \tag{3.4}$$

4) условию Вейерштрасса–Эрдмана в угловых точках

$$\Delta[F - \dot\rho F_{\dot\rho}]\delta\theta + \Delta[F_{\dot\rho}]\delta\rho = 0, \tag{3.5}$$

где через $\Delta[\dots]$ обозначена разность между значениями, вычисленными справа (“+”) и слева (“−”) от угловой точки θ_C; $\delta\theta$, $\delta\rho$ — соответственно вариации независимого аргумента θ и функции $\rho(\theta)$.

Угловые точки могут быть двух типов: положение одних произвольно ($\delta\theta \neq 0$, $\delta\rho \neq 0$), а другие лежат на окружности $\rho = \rho_0$, $\rho_0 = \rho(0)$ ($\delta\theta \neq 0$, $\delta\rho = 0$). Последнее условие вытекает из компоновочных требований к телу.

В первом случае ограничение (3.5) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta[F - \dot\rho F_{\dot\rho}] = 0;\\ \Delta[F_{\dot\rho}] = 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

которые удовлетворяются при $\dot\rho_+(\theta_C) = \pm\infty$, $\dot\rho_-(\theta_C) = \mp\infty$.

Во втором случае остается только условие (3.6), которое приводит к соотношению

$$\dot\rho_+(\theta_C) + \dot\rho_-(\theta_C) = 0.$$

Кроме того, из условия (3.6) вытекает, что значение C остается одним и тем же на всех дугах экстремали.

Следовательно, любые две соседние дуги, образующие цикл экстремали, будут симметричны относительно луча, проходящего через угловую точку. Тогда оптимальный поперечный контур может состоять из целого числа n симметричных циклов, каждый из которых занимает угол $2\pi/n$. При этом условие замкнутости поперечного контура будет выполняться. Анализ формы экстремали проведем на основе исследования дуги, образующей половину цикла. Будем предполагать, что рассматриваемая дуга экстремали не имеет внутренних угловых точек.

С учетом вышесказанного функционал задачи и ограничения на форму тела примут вид

$$J_2(\rho, n) = 2n\int_0^{\pi/n} \frac{\rho^{2m}(\theta)d\theta}{[\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)]^{(m-1)/2}} \to \min; \tag{3.7}$$

$$2n\int_0^{\pi/n} \rho^2(\theta)d\theta = 2S_B; \tag{3.8}$$

$$2n\int_0^{\pi/n} \sqrt{\rho^2(\theta)+\dot\rho^2(\theta)}d\theta = S_*. \tag{3.9}$$

Радиусы в концевых точках $\theta_0 = 0$, $\theta_f = \pi/n$ считаются свободными. В функционале Лагранжа для задачи (3.7)–(3.9)

$$J(\rho, n) = 2n\int_0^{\pi/n} F(\lambda_1, \lambda_2, \rho, \dot\rho)d\theta$$

подинтегральная функция $F(\lambda_1, \lambda_2, \rho, \dot\rho)$ определяется по формуле (3.1). Минимум функционала $J(\rho, n)$ будем искать посредством составления уравнений дуг экстремали и отыскания числа этих дуг.

На дуге экстремали должен удовлетворяться первый интеграл уравнения Эйлера (3.2), который исследуется совместно с условиями трансверсальности (3.3) в концевых точках $\theta_0 = 0$, $\theta_f = \pi/n$. Оптимизирующее условие на число дуг экстремали сводится к равенству нулю производной интеграла $J(\rho, n)$ относительно параметра n

$$\int_0^{\pi/n} F d\theta - \frac{\pi}{n}[F]_{\pi/n} = 0. \tag{3.10}$$

Заметим, что физический смысл имеют только целые решения уравнения (3.10).

Из (3.2), (3.3) следует

$$(F)_0 = (F)_{\pi/n} = C. \tag{3.11}$$

После интегрирования первого интеграла уравнения Эйлера (3.2) на отрезке $[0, \pi/n]$ с учетом (3.11) и обозначения $\Phi = \dot{\rho} F_{\dot{\rho}}$ имеем

$$\int_0^{\pi/n} F d\theta - \int_0^{\pi/n} \Phi d\theta = \int_0^{\pi/n} C d\theta \equiv \frac{\pi}{n}[F]_{\pi/n}. \tag{3.12}$$

Из выражений (3.10), (3.12) и условия трансверсальности (3.3) следует, что оптимальный поперечный контур должен удовлетворять условиям

$$\int_0^{\pi/n} \Phi d\theta = 0, \quad \Phi|_0 = \Phi|_{\pi/n} = 0. \tag{3.13}$$

Необходимо изучить следующие случаи:

а) функция Φ тождественно равна нулю во всех точках отрезка $[0, \pi/n]$;

б) функция Φ меняет свой знак на отрезке $[0, \pi/n]$ и, следовательно, равна нулю не только на концах $\theta_0 = 0$, $\theta_f = \pi/n$, но и в конечном числе промежуточных точек.

Случай а) приводится к двум соотношениям:

$$\dot{\rho}(\theta) = 0, \tag{3.14}$$

$$\Psi = \dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta) - a^2\rho^4(\theta) = 0; \quad a = \left[\frac{m-1}{\lambda_2}\right]^{1/m}. \tag{3.15}$$

Кривая (3.14) удовлетворяет условию Лежандра (3.4) при $\rho \leq \rho_{kr}$ ($\rho_{kr} = 1/a$), а кривая (3.15) — при $\rho \geq \rho_{kr}$. Функция Φ положительна левее линии $\Psi = 0$ и отрицательна правее нее. Если допустить, что концевые точки экстремали ($\theta_0 = 0$, $\theta_f = \pi/n$) располагаются на линии $\Phi = 0$ произвольным образом, то необходимо исследовать три класса тел.

4. Поперечный контур тела класса I

Пусть обе концевые точки экстремали лежат на линии (3.14) ($\dot{\rho}(0) = 0$, $\dot{\rho}(\pi/n) = 0$). Так как решение дифференциального уравнения (3.14) имеет вид

$$\rho(\theta) = C_1, \tag{4.1}$$

то оптимальным телом класса I будет тело вращения. Константа C_1 определяется из заданных изопериметрических условий: 1) $C_1 = \sqrt{S_B/\pi}$ в случае заданной площади донного сечения тела (3.8); 2) $C_1 = S_*/(2\pi)$ в случае заданной площади боковой поверхности тела (3.9). Для того чтобы изопериметрические условия (3.8), (3.9) выполнялись одновременно, между входными параметрами задачи должна существовать связь $S_B = S_*^2/(4\pi)$.

Для интеграла радиационного теплового потока в случае поперечного контура (4.1) получим

$$J_2^{\min} = 2\pi C_1^{m+1}.$$

5. Поперечный контур тела класса II

Рассмотрим класс тел, для которых обе концевые точки лежат на кривой $\Psi = 0$: $\Psi|_0 = 0$, $\Psi|_{\pi/n} = 0$. В этом случае поперечный контур тела удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.15), решение которого имеет вид

$$\rho(\theta) = \frac{1}{a\cos(\theta + C_2)}, \quad C_2 = \text{const}\,. \tag{5.1}$$

Выражение (5.1) представляет собой уравнение прямой, являющейся одной из сторон звездообразного поперечного контура тела. Из изопериметрических условий (3.8), (3.9) получим

$$a = \frac{S_*}{2S_B}; \quad \frac{S_*^2}{S_B} = 4n\Big(\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{n} + C_2\Big) - \operatorname{tg} C_2\Big). \tag{5.2}$$

Рассмотрим оптимизирующее условие (3.10) на число n дуг экстремали. Оно приводит к выражению

$$\left[m\Big(\frac{\lambda_2}{m-1}\Big)^{\frac{m-1}{m}} + \lambda_1\right]\left\{\int_0^{\pi/n} \rho^2(\theta)d\theta - \frac{\pi}{n}\rho^2\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\right\} = 0. \tag{5.3}$$

Выражение в фигурных скобках не может обращаться в нуль, т. к. при этом нарушается уравнение Эйлера (3.2). Следовательно, имеем связь между множителями Лагранжа

$$\lambda_1 = -m\Big(\frac{\lambda_2}{m-1}\Big)^{\frac{m-1}{m}}, \quad \lambda_2 = (m-1)(2S_B/S_*)^m. \tag{5.4}$$

Тогда оптимизирующее условие (3.10) будет выполняться для любого числа циклов n, и интеграл для радиационного теплового потока (3.7) не зависит от числа циклов n.

Действительно, для минимального значения радиационного теплового потока на экстремали (5.1), (5.2) имеем

$$J_2^{\min} = {S_*}^{1-m}(2S_B)^m. \tag{5.5}$$

Простой подстановкой можно показать, что полученные решения (5.1), (5.2), (5.4) удовлетворяют исходному уравнению Эйлера (3.2), условиям трансверсальности (3.3) и Лежандра (3.4).

Из условия Лежандра (3.4) также следует, что тела класса II существуют, если $\frac{S_*^2}{S_B} \geq 4n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. В случае строгого равенства уравнение формы тела сводится к соотношению

$$\rho(\theta) = \frac{1}{a\cos\theta} \quad (C_2 = 0) \tag{5.6}$$

для стороны правильного многоугольника, в который вписана окружность.

6. Поперечный контур тела класса III

Рассмотрим класс тел, для которого начальная точка контура лежит на линии (3.14) $\dot\rho|_0 = 0$, а концевая — на линии (3.15) $\Psi|_{\pi/n} = 0$. Таким образом, контур класса III содержит две дуги: дугу окружности и прямую, касающуюся окружности. В силу непрерывности контура точка перехода дуги окружности в прямую соответствует $\rho_0 = \rho_{kr} \equiv 1/a$. Тогда аналитически экстремаль можно представить в виде

$$\rho = \begin{cases} 1/a, & 0 \leq \theta \leq \varepsilon; \\ 1/[a\cos(\theta - \varepsilon)], & \varepsilon \leq \theta \leq \pi/n, \end{cases} \tag{6.1}$$

где ε — угол сопряжения дуг экстремали.

В случае заданных S_B и S_* из изопериметрических условий (3.8), (3.9) следует, что $a = S_*/(2S_B)$, и угол ε определяется из соотношения

$$\frac{S_*^2}{S_B} = 4n\left[\varepsilon + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n} - \varepsilon\right)\right].$$

Как и в случае тел класса II, функционал радиационного теплового потока для экстремали (6.1) определяется по формуле (5.5) и не зависит от числа циклов n.

Рассмотрим предельные случаи для оптимального поперечного контура класса III. При $\varepsilon = 0$ оптимальный поперечный контур соответствует правильному многоугольнику (5.6). В другом предельном случае (при $\varepsilon = \pi/n$) оптимальным телом является тело вращения с радиусом донного сечения $\rho_0 = \frac{2S_B}{S_*}$. Из этого следует, что тела класса III имеют место при следующих ограничениях на входные параметры задачи: $\frac{S_*{}^2}{S_B} \in [4\pi, 4n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}]$.

Нужно отметить, что из оптимизирующего условия на число циклов n следует, что решения (6.1) справедливы только при выполнении ограничения (5.4), наложенного на множители Лагранжа.

7. Обсуждение результатов

Полученные в предыдущих параграфах решения соответствуют случаю а), когда функция Φ тождественно равна нулю на отрезке $[0; \pi/n]$. Исследуем случай б), когда функция Φ может менять знак на отрезке $[0; \pi/n]$. Рассмотрим перечисленные выше классы тел.

1) Для тел класса I ($\dot\rho|_0 = \dot\rho|_{\pi/n} = 0$) либо $\Phi \equiv 0$, либо $\Phi > 0$, что противоречит интегральному условию (3.13).

2) Для тел класса II ($\Psi|_0 = \Psi|_{\pi/n} = 0$) и класса III ($\dot\rho|_0 = \Psi|_{\pi/n} = 0$) функция Φ не может менять свой знак на отрезке $[0; \pi/n]$, т. к. это противоречит тому, что экстремаль пересекает линию $\Psi = 0$ бесконечное число раз.

Действительно, первый интеграл уравнения Эйлера (3.2) и уравнение (3.15) должны удовлетворяться одновременно во всех точках пересечения. Тогда справедливо соотношение

$$\left[m\left(\frac{\lambda_2}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}} + \lambda_1\right]\rho^2(\theta) = C. \tag{7.1}$$

Поскольку для тел классов II и III выполняются ограничения на множители Лагранжа (5.4), то сомножитель, стоящий в квадратных скобках выражения (7.1), и константа C (3.11) обращаются в нуль. Следовательно, уравнение (7.1) удовлетворяется для любого значения ρ, и экстремаль имеет бесконечное число точек пересечений с кривой $\Psi = 0$. Доказанное утверждение обосновывает справедливость полученных решений.

Таким образом, тела, обладающие оптимальными поперечными контурами с точки зрения минимума радиационного нагрева, могут быть четырех типов:

1) тела класса I (4.1) с круговым поперечным сечением (при $\rho \le \rho_{kr}$);

2) тела класса II (5.1) со звездообразным поперечным сечением (при $\rho \ge \rho_{kr}$; $S_*^2/S_B \ge 4n\operatorname{tg}(\pi/n)$);

3) тела класса III (6.1) со звездообразным поперечным сечением, имеющим круговые включения (при $\rho \ge \rho_{kr}$; $S_*^2/S_B \in [4\pi; 4n\ \operatorname{tg}(\pi/n)]$);

4) пирамидальные тела с сечениями в виде правильных многоугольников (5.6), которые являются подмножествами тел классов II и III при $S_*^2/S_B = 4n\operatorname{tg}(\pi/n)$.

В таблице представлены отношения концевых радиусов поперечных контуров оптимальных тел $\rho(\pi/n)/\rho(0)$, углы сопряжения дуг экстремали ε и отношения коэффициентов радиационного теплообмена оптимальных тел ($J_2^{\min}$) и тел вращения ($J_2^{\text{вр}}$), имеющих те же длину $L = 1$ и площадь донного сечения $S_B = 6.24$, при различных значениях параметров (m, n, S_*^2/S_B). Из таблицы следует, что с увеличением числа циклов n и уменьшением параметра S_*^2/S_B соотношение между концевыми радиусами падает и в пределе (при $n \to \infty$) стремится к единице.

Нужно отметить, что коэффициенты радиационного нагрева тел классов II и III описываются одной и той же формулой (5.5) и явным образом не зависят от числа циклов экстремали n. Следовательно, тела классов II и III, обладающие одинаковыми заданными параметрами $(m,\ S_B,\ S_*)$, имеют одинаковый радиационный нагрев поверхности. Кроме того, использование оптимальных тел позволяет существенно снизить радиационный тепловой поток к поверхности тела по сравнению с эквивалентными телами вращения (до 60 % — для тел класса III, до 98 % — для тел класса II). Этот эффект тем больше, чем больше значения параметров m и S_*^2/S_B.

В случае сильно излучающего газа ($m = 3$) функционал задачи и найденные решения совпадают с результатами, полученными для тел минимального сопротивления ([6], с. 306–325).

Таблица

		тело класса III		пирамидальное тело		тело класса II	
S_*^2/S_B		$3.8n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$		$4n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$		$6n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$	
$\rho(\pi/n)/\rho(0)$	$n=4$	1.3415		1.4142		1.9663	
	$n=6$	1.0910		1.1547		1.4971	
ε	$n=4$	3.2°		0°		0°	
	$n=6$	6.43°		0°		0°	
m		5	10	5	10	5	10
$J_2^{\min}/J_2^{\text{вр}}$	$n=4$	0.6835	0.4248	0.6185	0.3372	0.2742	0.0544
	$n=6$	0.9113	0.8114	0.8225	0.6442	0.3655	0.1039

Литература

1. Швец А.И. *Аэродинамика сверхзвуковых форм.* – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 208 с.
2. Аргучинцева М.А., Пилюгин Н.Н. *Пространственные формы тел с минимальным нагревом поверхности при гиперзвуковом движении в атмосфере* // Космические исследования. – 1992. – Т. 30. – № 5. – С. 615–628.
3. Аргучинцева М.А., Пилюгин Н.Н. *Экстремальные задачи радиационной газовой динамики.* – М.: Изд-во МГУ, 1997. – 197 с.
4. Аргучинцева М.А., Пилюгин Н.Н. *Экстремальные задачи при теплообмене пространственных тел, движущихся с гиперзвуковыми скоростями* // ПММ. – 1992. – Т. 56. – № 4. – С. 643–657.
5. Лосев С.А., Пилюгин Н.Н., Суржиков С.Т. *Моделирование радиационных процессов в механике сплошной среды.* – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 184 с.
6. *Теория оптимальных аэродинамических форм* / Под ред. А. Миеле. – М.: Мир, 1969. – 507 с.

Иркутский государственный университет

Поступила 24.08.2001