ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 517.982

Л.И. СУХОЧЕВА

НОВЫЙ КРИТЕРИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ОПЕРАТОРА КЛАССУ $K(H)$

Одной из центральных проблем теории операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой, является проблема существования максимальных семидефинитных подпространств, инвариантных относительно операторов, действующих в этих пространствах.

Т.Я. Азизовым [1] введен и описан класс $K(H)$, состоящий из операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой и обладающих свойствами: $\Phi \in K(H)$, если у него есть хотя бы одна пара N_+ (максимального неотрицательного), N_- (максимального неположительного) инвариантных подпространств таких, что $N_+[\perp]N_-$ и $N_\pm$ допускают разложения

$$N_+ = N^0[+]N^{++}, \quad N_- = N^0[+]N^{--}, \tag{1}$$

где $\dim N^0 < \infty$, N^0 — изотропное подпространство, N^{++} — равномерно положительное, N^{--} — равномерно отрицательное подпространства. Здесь и далее используется общепринятая "индефинитная" терминология и обозначения (см., напр., [1]).

Пусть H — пространство Крейна с индефинитной метрикой $[x,y]=(Jx,y)$, где J — каноническая симметрия пространства H. Замкнутую линейную оболочку (л. о.) корневых векторов оператора Φ обозначим $E(\Phi)$, а замкнутую л. о. его собственных векторов — $E_0(\Phi)$.

Теорема. *Пусть Φ есть J-самосопряженный оператор в пространстве Крейна H, в котором существует базис Рисса $\{f_i\}$, составленный из корневых векторов оператора Φ. Кроме того, $\dim(E(\Phi)/E_0(\Phi)) < \infty$ и невещественный спектр оператора Φ состоит не более, чем из конечного числа собственных значений с учетом кратности. Тогда Φ будет оператором из класса $K(H)$.*

Доказательство. Покажем, что, обладая всеми перечисленными выше свойствами, оператор Φ будет оператором класса $K(H)$. Для этого укажем нужную пару подпространств N_+, N_-.

Пусть $\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_m, \bar{\mu}_m$ — все различные невещественные собственные значения оператора Φ. Рассмотрим подпространства: $N^1 = \text{Л.О.}\{N(\mu_i)\}_{i=1,2,\dots,m}$, $N^2 = \text{Л.О.}\{N(\bar{\mu}_i)\}_{i=1,2,\dots,m}$, где $N(\mu_i)$ и $N(\bar{\mu}_i)$ — корневые подпространства оператора Φ, отвечающие μ_i и $\bar{\mu}_i$ соответственно, $i=1,2,\dots,m$. В силу ([1], гл. II, § 3, с. 132) подпространства N^1 и N^2 нейтральны.

Из нормальности собственных значений μ_i и $\bar{\mu}_i$ оператора Φ $(i=1,2,\dots,m)$ (см. [1], гл. II, § 2, с. 124; гл. I, § 7, с. 63) следует, что подпространство $H_1 = \text{Л.О.}\{N^1, N^2\}$, инвариантное относительно оператора Φ, является невырожденным и проекционно полным. Значит, $H = H_1[+]H_2$, где $H_2 = H_1^{[\perp]}$ — пространство Крейна, инвариантное относительно оператора Φ (см. [1], гл. I, § 7, сс. 62, 64).

Заметим, что оператор $\Phi \mid H_2$ наследует указанные выше свойства оператора Φ, т. е. невещественный спектр оператора $\Phi \mid H_2$ состоит из конечного (пустого) набора невещественных собственных значений. Кроме того,

$$\dim(E(\Phi \mid H_2)/E_0(\Phi \mid H_2)) \le \dim(E(\Phi)/E_0(\Phi)) < \infty \tag{2}$$

Данная работа выполнена при частичной поддержке Международного Научного Фонда, грант NZP000.

и в H_2 существует базис Рисса $\{f_i\}$, составленный из корневых векторов оператора $\Phi \mid H_2$. Таким образом, не ограничивая общности, указанную пару инвариантных подпространств N_+, N_- будем искать для оператора $\Phi \mid H_2$, имеющего только вещественные собственные значения в пространстве Крейна H_2.

Действительно, если $N_+^{\cdot}$, $N_-^{\cdot}$ — инвариантные подпространства оператора $\Phi \mid H_2$ с искомыми свойствами, то, например, $N_+ = $ Л.О.$\{N^1, N_+^{\cdot}\}$, $N_- = $ Л.О.$\{N^1, N_-^{\cdot}\}$ — инвариантные подпространства оператора Φ с теми же свойствами.

Пусть $\mu = \bar{\mu} \in \sigma_p(\Phi)$ такое, что хотя бы один отвечающий ему собственный вектор имеет присоединенный (в силу (2) таких собственных значений μ не более конечного числа). Рассмотрим $N(\mu)$ — линейную оболочку всех векторов, входящих во все жордановы цепочки длины больше единицы, отвечающие данному собственному значению μ и входящие в исходный базис Рисса. Тогда $N(\mu)$ — конечномерное инвариантное подпространство оператора Φ, и оно невырождено.

Действительно, предположим, что $N(\mu)$ — вырожденное конечномерное подпространство. Тогда его изотропное подпространство $N^0(\mu)$ также является конечномерным инвариантным подпространством оператора Φ. Пусть $z_0 \in N^0(\mu)$ является собственным вектором, имеющим присоединенный. Тогда z_0 будет J-ортогонален $\mathrm{Ker}(\Phi - \mu I)$. Значит, вектор z_0 J-ортогонален всем собственным и присоединенным векторам из $N(\mu)$, входящим в базис Рисса $\{f_i\}$. Так как корневые подпространства, отвечающие различным вещественным собственным значениям J-самосопряженного оператора Φ, являются J-ортогональными друг другу, то z_0 будет J-ортогонален и всем остальным векторам из базиса Рисса. Следовательно, z_0 ортогонален H. Но пространство H является пространством Крейна, а потому оно J-невырождено. Отсюда $z_0 = \theta$. Следовательно, $N(\mu)$ невырождено, поэтому в силу конечномерности $N(\mu)$ является проекционно полным ([1], гл. I, § 7, с. 65).

Рассмотрим подпространство $H_3 = $ Л.О.$\{N(\mu),\ \mu \in \sigma_p(\Phi)\}$. Отметим, что $\dim H_3 < \infty$ и подпространство H_3 инвариантно относительно оператора Φ и проекционно полно как конечная линейная оболочка проекционно полных взаимно J-ортогональных подпространств (см. [1], гл. I, § 7, с. 67).

Рассмотрим разложение $H = H_3[+]H_4$, где $H_4 = H_3^{[\perp]}$ — инвариантное подпространство оператора Φ, также являющееся пространством Крейна. Оператор $\Phi \mid H_4$ наследует указанные выше свойства оператора Φ. Поэтому в силу конечномерности H_3 без ограничения общности будем искать пару подпространств N_+, N_-, инвариантную относительно оператора Φ, имеющего вещественные собственные значения, которым отвечают только жордановы цепочки длины единица, т. е. будем считать $H = H_4$, и в нем есть базис Рисса $\{f_i\}$ из собственных векторов оператора Φ. Следовательно, по определению существует непрерывный и непрерывно обратимый оператор W, для которого $Wf_i = e_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где $\{e_i\}$ — ортонормированный базис H.

Введем в H новое скалярное произведение

$$\langle u, v\rangle = (W^*Wu, v) \text{ для } u, v \in H.$$

Тогда $\langle f_i, f_j\rangle = (W^*Wf_i, f_j) = (e_i, e_j)$ для любых $f_i \in \{f_i\}$, т. е. базис Рисса $\{f_i\}$ будет W^*W-ортонормированным базисом H.

Покажем, что в этих условиях оператор Φ будет W^*W-самосопряженным. Как известно, непрерывный и всюду заданный в комплексном гильбертовом пространстве H оператор Φ будет W^*W-самосопряженным тогда и только тогда, когда форма $\langle \Phi z, z\rangle$ вещественна для всех $z \in H$.

Так как каждый вектор $z \in H$ можно представить в виде $\sum\limits_i d_i f_i$, и значит, $\Phi z = \sum\limits_i d_i \mu_i f_i$, где μ_i ($\in \mathbf{R}$) — собственное значение оператора Φ, которому отвечает собственный вектор f_i, то

$$\langle \Phi z, z\rangle = \Big(W^*W \sum_i d_i \mu_i f_i,\ \sum_i d_i f_i\Big) = \sum_i |d_i|^2 \mu_i$$

принимает только вещественные значения для любых $z \in H$. Таким образом, оператор Φ будет W^*W-самосопряженным.

С другой стороны, по построению оператор Φ является самосопряженным и относительно индефинитной метрики $\langle u,v\rangle_1 = \langle J_1 u, v\rangle = \langle (W^*W)^{-1}Ju, v\rangle = (Ju,v) = [u,v]$ для $u,v \in H$, где $J_1 = (W^*W)^{-1}J$ — W^*W-самосопряженный оператор. Тогда $\Phi = J_1^{-1}\Phi^{\langle * \rangle}J_1 = J_1^{-1}\Phi J_1$, а значит, $J_1\Phi = \Phi J_1$. Поэтому оператор Φ коммутирует со спектральными проекторами $\{E_\mu\}$ оператора J_1 и, в частности, $E_0\Phi = \Phi E_0$ и $(I-E_0)\Phi = \Phi(I-E_0)$. Тогда $\Phi E_0 H \subset E_0 H$ и $\Phi(I-E_0)H \subset (I-E_0)H$, т. е. E_0H и $(I-E_0)H$ — инвариантные подпространства оператора Φ. При этом подпространство E_0H является J-отрицательным, а $(I-E_0)H$ — J-положительным. Более того, из непрерывной обратимости оператора J_1 следует, что эти подпространства равномерно J-дефинитны. А так как $H = E_0H[+](I-E_0)H$, то E_0H — максимальное равномерно отрицательное, а $(I-E_0)H$ — максимальное равномерно положительное подпространства.

Пространства $N_+ = (I-E_0)H$, $N_- = E_0H$ образуют искомую пару инвариантных подпространств.

Возвращаясь к исходной задаче отыскания пары инвариантных подпространств в общих условиях, положим

$N_+ =$ Л.О.$\{N^1,\ H_3^+,\ (I-E_0)H_4\}$ — максимальное неотрицательное подпространство,
$N_- =$ Л.О.$\{N^1,\ H_3^-,\ E_0H_4\}$ — максимальное неположительное подпространство.

(H_3^+, H_3^- — максимальные (в H_3) неотрицательное и неположительное инвариантные подпространства оператора $\Phi \mid H_3$.)

Обозначим $N^+ =$ Л.О.$\{N^1,\ H_3^+\}$, $N^- =$ Л.О.$\{N^1,\ H_3^-\}$. Подпространства N^+ и N^- конечномерны, поэтому их можно разложить в J-ортогональную сумму $N^+ = N^0[+]N_+^+$, $N^- = N^0[+]N_-^-$, где N^0 — изотропное подпространство, N_+^+ — равномерно положительное, N_-^- — равномерно отрицательное подпространства.

Положим $N^{++} =$ Л.О.$\{N_+^+,\ (I-E_0)H_4\}$ — равномерно положительное подпространство; $N^{--} =$ Л.О.$\{N_-^-,\ E_0H_4\}$ — равномерно отрицательное подпространство. Тогда подпространства N_+, N_- обладают свойством (1), а именно

$$N_+ = N^0[+]N^{++}, \quad N_- = N^0[+]N^{--}.$$

Таким образом, оператор Φ принадлежит классу $K(H)$ $\square$.

Литература

1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* – М.: Наука, 1986. – 352 с.

Научно-исследовательский институт математики
Воронежского государственного университета

Поступила
30.01.1995