ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 517.983

В.Е. ФЕДОРОВ

ВЫРОЖДЕННЫЕ СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим линейное операторно-дифференциальное уравнение

$$L\dot{u}(t) = Mu(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

где пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ банаховы, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (т. е. линейный и непрерывный) не является непрерывно обратимым, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (т. е. линейный замкнутый с областью определения $\operatorname{dom} M$, плотной в $\mathcal{U}$).

Задача Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.2}$$

для уравнения (0.1) представляет собой абстрактную форму многих начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений, моделирующих различные реальные процессы [1].

Нас интересует разрешимость задачи (0.1), (0.2) на всей действительной оси. В ([2], с. 377) указаны условия на оператор S, необходимые и достаточные для существования сильно непрерывной разрешающей группы уравнения в банаховом пространстве $\mathcal{V}$

$$\dot{v}(t) = Sv(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{0.3}$$

Это следующие условия: оператор $S \in \mathcal{C}l(\mathcal{V})$,

$$\exists a \geq 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho(S)),$$

$$\exists K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow \left(\|(R_\mu(S))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \frac{K}{(|\mu| - a)^n}\right);$$

через $\rho(S)$ здесь обозначено резольвентное множество $\{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - S)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})\}$, а через $R_\mu(S)$ — резольвента $(\mu I - S)^{-1}$ оператора S. Оператор S будем называть *бирадиальным.*

В рамках уравнения (0.3) можно рассматривать уравнения

$$\dot{u}(t) = L^{-1}Mu(t), \quad \dot{f}(t) = ML^{-1}f(t),$$

эквивалентные уравнению (0.1) в случае непрерывной обратимости оператора L. В этом смысле уравнение (0.1) с вырожденным оператором L обобщает уравнение (0.3). В контексте только что сказанного в данной работе обобщен вышеизложенный результат о группах уравнения (0.3) на случай уравнения (0.1). Другими словами, получен аналог теоремы Хилле–Иосиды–Филлипса для вырожденных сильно непрерывных групп операторов, как это сделано в работах [3]–[6] для вырожденных аналитических групп, а также для вырожденных аналитических и сильно непрерывных полугрупп операторов. Таким образом, часть упомянутых результатов [3] об аналитических группах есть частный случай результатов данной статьи. А именно, та часть, которая касается ситуации с устранимой особой точкой либо полюсом у L-резольвенты оператора M в бесконечности.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 97-01-00444; грантом Минобразования Российской Федерации.

Исследование проведено по той же схеме, что и исследование вырожденных сильно непрерывных полугрупп в [4], [5], и во многом опираясь на полученные там результаты. А именно, найдены пять условий в терминах групп, необходимые и достаточные для сильной (L,p)-бирадиальности оператора M, которая обобщает условия на генератор невырожденной сильно непрерывной группы.

Разрешимости задачи (0.1), (0.2) посвящены работы [7], [8]. И если результаты, полученные в [7] с помощью техники многозначных линейных операторов, в некотором смысле аналогичны нашим при $p = 0$, то в [8] рассматривается разрешимость задачи Коши на том же множестве начальных значений $\operatorname{im}((\mu L - M)^{-1}L)^{n+1}$. Однако речь там идет не об обычной, как здесь, корректности рассматриваемой задачи, а об (n,ω)-корректности, которая устанавливается с помощью теории интегрированных полугрупп. Соответственно при этом используются совершенно другие оценки на L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M, необходимые для существования именно интегрированных полугрупп. К тому же в [7], [8] речь идет только о полугруппах.

1. Относительно p-бирадиальный оператор

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ будем называть соответственно *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* оператора M. Операторнозначные функции комплексного переменного с областью определения $\rho^L(M)$ $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ будем называть соответственно *L-резольвентой, правой* и *левой* *L-резольвентами* оператора M.

В дальнейшем понадобятся тождества

$$\begin{gathered}(\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1}L(\lambda L - M)^{-1} = (\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1},\\ L(\mu L - M)^{-1}Mu = M(\mu L - M)^{-1}Lu, \quad u \in \operatorname{dom} M.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Правой (*левой*) *(L,p)-резольвентой* оператора M называется операторнозначная функция $p+1$ комплексного переменного $\lambda_0,\dots,\lambda_p$ с областью определения $(\rho^L(M))^{p+1}$

$$R^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\lambda_k}(M) \quad \Bigl(L^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L^L_{\lambda_k}(M)\Bigr).$$

Заметим, что в обозначении (L,p)-резольвенты индекс λ означает вектор $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_p)$.

В [4], [6] показано, что ядра и образы правых и левых (L,p)-резольвент не зависят от набора чисел μ_k, $k = \overline{0,p}$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\mathcal{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M), \quad \mathcal{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M),\\ L_0 = L\big|_{\mathcal{U}^0}, \quad M_0 = M\big|_{\operatorname{dom} M_0}, \quad \operatorname{dom} M_0 = \mathcal{U}^0 \cap \operatorname{dom} M.\end{gathered}$$

Очевидно, $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$. Покажем, что $M_0 : \operatorname{dom} M_0 \to \mathcal{F}^0$. Возьмем $u \in \operatorname{dom} M \cap \ker R^L_{(\mu,p)}(M)$. Тогда, используя тождество (1.1), получим $L^L_{(\mu,p)}(M)Mu = MR^L_{(\mu,p)}(M)u = M0 = 0$.

Определение 1.1. Оператор M называется *p-бирадиальным относительно* оператора L (короче, *(L,p)-бирадиальным*), если

(i) $\exists a \ge 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (|\lambda| > a) \Rightarrow (\lambda \in \rho^L(M))$;

(ii) $\exists K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \mu_k \in \mathbb{R} \quad (|\mu_k| > a) \Rightarrow$

$$\left(\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})},\ \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \le \frac{K}{\prod_{k=0}^{p}(|\mu_k| - a)^n}\right).$$

Здесь $\mu = (\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_p)$.

Замечание 1.1. Пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$. Если при этом оператор $L^{-1}M \in \mathcal{C}\ell(\mathcal{U})$ бирадиален (или, что равносильно, бирадиален оператор $ML^{-1} \in \mathcal{C}\ell(\mathcal{F})$), то оператор M (L,p)-бирадиален. При $p = 0$ справедливо и обратное.

Замечание 1.2. Из (L,p)-бирадиальности оператора M следует (L,p)-радиальность [4], [5] операторов M и $-M$. Отсюда следует

Лемма 1.1. *Пусть оператор M (L,p)-бирадиален. Тогда*

(i) *длины всех цепочек M-присоединенных векторов* [6] *оператора L ограничены числом p;*
(ii) $\ker R^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$, $\ker L^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$;
(iii) *существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$;*
(iv) *операторы $M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$ и $L_0M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0)$ нильпотентны степени не больше p.*

Обозначим через $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$ замыкание линеала $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ $(\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M))$ в норме пространства $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$.

Лемма 1.2. *Пусть оператор M (L,p)-бирадиален. Тогда*

$$\text{(i)} \quad \lim_{\mu\to\pm\infty} (\mu R^L_\mu(M))^{p+1} u = u \quad \forall u \in \mathcal{U}^1;$$
$$\text{(ii)} \quad \lim_{\mu\to\pm\infty} (\mu L^L_\mu(M))^{p+1} f = f \quad \forall f \in \mathcal{F}^1.$$

Доказательство. Пусть $u = (R^L_\alpha(M))^{p+1}v$ для некоторых $\alpha \in \rho^L(M)$, $|\alpha| > a$, и $v \in \operatorname{dom} M$. При таком u, используя (1.1), имеем

$$(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u = (I + (\mu L - M)^{-1}M)^{p+1}u = \sum_{k=0}^{p+1} C^k_{p+1}((\mu L - M)^{-1}M)^k u = u + w,$$

где

$$w = \sum_{k=1}^{p+1} C^k_{p+1}(R^L_\mu(M))^k (R^L_\alpha(M))^{p+1-k}((\alpha L - M)^{-1}M)^k v.$$

Из определения 1.1 следует, что

$$\|w\|_\mathcal{U} \le \sum_{k=1}^{p+1} \frac{KC^k_{p+1}}{(|\mu| - a)^k(|\alpha| - a)^{p+1-k}} \|((\alpha L - M)^{-1}M)^k v\|_\mathcal{U}.$$

Выражение в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $\mu \to \pm\infty$. Отсюда $\lim\limits_{\mu\to\pm\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u = u$ для любого $u \in (R^L_\alpha(M))^{p+1}[\operatorname{dom} M]$. Из того, что этот линеал плотен в $\mathcal{U}^1$, а семейство операторов $\{(\mu R^L_\mu(M))^{p+1} : |\mu| > 2a\}$ равномерно ограничено константой $2^{p+1}K$, по теореме Банаха–Штейнгауза следует утверждение (i).

Утверждение (ii) леммы доказывается аналогично. $\square$

Через $\widetilde{\mathcal{U}}$ $(\widetilde{\mathcal{F}})$ обозначим замыкание линеала $\mathcal{U}^0 \dot{+} \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ $(\mathcal{F}^0 \dot{+} \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M))$, а через $\mathcal{U}^2$ $(\mathcal{F}^2)$ — замыкание линеала $\operatorname{im}(R^L_\mu(M))^{p+2}$ $(\operatorname{im}(L^L_\mu(M))^{p+2})$ в норме пространства $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$. Из замечания 1.2 вытекает

Лемма 1.3. *Пусть оператор M (L,p)-бирадиален. Тогда*

$$\text{(i)} \quad \widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1, \quad \widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1; \quad \text{(ii)} \quad \mathcal{U}^2 = \mathcal{U}^1, \quad \mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^1.$$

Проектором $\widetilde{P}$ $(\widetilde{Q})$, расщепляющим пространство $\widetilde{\mathcal{U}}$ $(\widetilde{\mathcal{F}})$ в указанную прямую сумму, является оператор $s\text{-}\lim\limits_{\mu\to\pm\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}$ $(s\text{-}\lim\limits_{\mu\to\pm\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1})$ из леммы 1.2.

2. Разрешающие группы операторов с ядрами

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$. Возьмем любое $\alpha \in \rho^L(M)$ и рассмотрим эквивалентные (0.1) уравнения

$$R^L_\alpha(M)\frac{du}{dt} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{2.1}$$

$$L^L_\alpha(M)\frac{df}{dt} = M(\alpha L - M)^{-1}f \tag{2.2}$$

как конкретные интерпретации уравнения в банаховом пространстве $\mathcal{V}$

$$A\frac{dv}{dt} = Bv, \tag{2.3}$$

где операторы $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, $B \in \mathcal{C}\ell(\mathcal{V})$.

Решением уравнения (2.3) назовем удовлетворяющую ему вектор-функцию $v \in C^1(\mathbb{R};\mathcal{V})$.

Определение 2.1. Отображение $V^\bullet : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$ называется *группой разрешающих операторов* (*разрешающей группой*) уравнения (2.3), если

(i) $\forall v \in \mathcal{V}\ \ \forall s,t \in \mathbb{R}\ \ V^sV^tv = V^{s+t}v$;

(ii) $v(t) = V^tv$ есть решение уравнения (2.3) для любого v из плотного в $\mathcal{V}$ линеала.

Группа называется *экспоненциально ограниченной*, если $\exists \omega \in \mathbb{R}\ \exists C > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$\|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq Ce^{\omega|t|}.$$

Теорема 2.1. *Пусть оператор M (L,p)-бирадиален. Тогда существует экспоненциально ограниченная сильно непрерывная разрешающая группа уравнения* (2.1) ((2.2))*, рассматриваемого на подпространстве $\widetilde{\mathcal{U}}$ $(\widetilde{\mathcal{F}})$.*

Доказательство. В силу (L,p)-бирадиальности оператора M корректно определенными являются полугруппы операторов

$$\begin{aligned} U^t_+ &= s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty} U^t_\mu = \\ &= s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty} e^{-\frac{(\mu-a)}{p+1}t+at}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\frac{(\mu-a)^{p+2}}{p+1}(R^L_\mu(M))^{p+1}\right)^n \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$F^t_+ = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty} e^{-\frac{(\mu-a)}{p+1}t+at}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\frac{(\mu-a)^{p+2}}{p+1}(L^L_\mu(M))^{p+1}\right)^n \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1), \quad t \geq 0, \tag{2.5}$$

и полугруппы операторов

$$\{U^t_- \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1), \quad t \geq 0\}, \tag{2.6}$$

$$\{F^t_- \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1), \quad t \geq 0\}. \tag{2.7}$$

Первая полугруппа и третья (вторая и четвертая) совпадают с точностью до замены M на $-M$. Продолжим полугруппы (2.4), (2.6) нулем на подпространство $\mathcal{U}^0$, а полугруппы (2.5), (2.7) — нулем на $\mathcal{F}^0$. Тогда для любых векторов $u_0 \in \mathcal{U}^0\dot{+}\operatorname{im}(R^L_\mu(M))^{p+2}$, $f_0 \in \mathcal{F}^0\dot{+}\operatorname{im}(L^L_\mu(M))^{p+2}$ функции от t $U^t_+u_0$, $F^t_+f_0$, $U^t_-u_0$, $F^t_-f_0$ являются решениями уравнений соответственно (2.1), (2.2),

$$\begin{aligned} R^L_\alpha(-M)\frac{du}{dt} &= -(\alpha L + M)^{-1}Mu, \\ L^L_\alpha(-M)\frac{df}{dt} &= -M(\alpha L + M)^{-1}f. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Единицами полугрупп будут проектор $U_+^0 = U_-^0 = \widetilde{P}$ на $\overline{\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)} = \overline{\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(-M)} = \overline{\operatorname{im}(-1)^{p+1} R^L_{(-\mu,p)}(M)} = \mathcal{U}^1$ вдоль $\ker R^L_{(\mu,p)}(M) = \mathcal{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(-M)$ для первой и третьей полугрупп и проектор $F_+^0 = F_-^0 = \widetilde{Q}$ на $\overline{\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)} = \mathcal{F}^1$ вдоль $\ker L^L_{(\mu,p)}(M) = \mathcal{F}^0$ для второй и четвертой полугрупп.

Покажем, что семейство операторов

$$\{U^t \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{U}}) : U^t = U_+^t, \;\; t \geq 0; \;\; U^t = U_-^{-t}, \;\; t < 0\} \tag{2.9}$$

является сильно непрерывной группой. Рассмотрим оператор $G^t = U_+^t U_-^t$. Возьмем $u_0 \in \operatorname{im}(R^L_\beta(M))^{p+2}$. Как уже было сказано, при таких u_0 функции $U_+^t u_0$, $U_-^t u_0$ разрешают уравнения (2.1), (2.8). Поэтому

$$\begin{aligned} R^L_\alpha(M)\frac{d}{dt}G^t u_0 = (\alpha L - M)^{-1} M U_+^t U_-^t u_0 + R^L_\alpha(M) U_+^t \frac{d}{dt} U_-^t u_0 = \\ = (\alpha L - M)^{-1} M U_+^t U_-^t u_0 - U_+^t R^L_{-\alpha}(-M)\frac{d}{dt}U_-^t u_0 = \\ = (\alpha L - M)^{-1} M U_+^t U_-^t u_0 - (\alpha L - M)^{-1} M U_+^t U_-^t u_0 = 0. \end{aligned}$$

Здесь использовано коммутирование операторов $R^L_\alpha(M)$ и $(\alpha L - M)^{-1}M$ с U_+^t и U_-^t, которое следует из построения полугрупп. Итак, $G^t u_0 = \mathrm{const} = G^0 u_0 = u_0$ при всех $u_0 \in \operatorname{im}(R^L_\beta(M))^{p+2} \subset \mathcal{U}^1$. Операторы G^t непрерывны, поэтому в силу леммы 1.3 (ii) тождество $G^t u_0 = u_0$ можно распространить на все подпространство $\mathcal{U}^1$. По построению полугрупп $G^t u = 0$ при $u \in \mathcal{U}^0$. Если $u = u^0 + u^1$, $u^0 \in \mathcal{U}^0$, $u^1 \in \mathcal{U}^1$, то $G^t u = u^1 = \widetilde{P} u = U^0 u$.

Аналогично показываем $U_-^t U_+^t u = U^0 u$ для $u \in \widetilde{\mathcal{U}}$. Групповое свойство семейства (2.9) проверяется непосредственно, а экспоненциальная ограниченность $\|U^t\| \leq K e^{a|t|}$ следует из построения. Осталось проверить, что группа разрешает уравнение (2.1) при $t < 0$. Действительно, для $u \in \operatorname{im}(R^L_\beta(M))^{p+2}$ $R^L_\alpha(M)\frac{d}{dt}U^t u = -R^L_{-\alpha}(-M)\frac{d}{dt}U_-^{-t} u = (-\alpha L + M)^{-1}(-M)U_-^{-t} u = (\alpha L - M)^{-1} M U^t u$.

Группа $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ строится аналогично. □

Замечание 2.1. Нетрудно увидеть, что первая из групп разрешает уравнение (0.1).

3. Расщепление пространств

Построенные полугруппы определены не на всем пространстве. В этом параграфе устраним этот недостаток.

Теорема 3.1. *Пусть пространство $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$) рефлексивно, оператор M (L,p)-бирадиален. Тогда $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$).*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $u \in \mathcal{U}$. Из (L,p)-бирадиальности оператора M следует ограниченность последовательности $\{(kR^L_k(M))^{p+1}u, \; k > 2a\}$. Рефлексивность пространства $\mathcal{U}$ дает возможность выбрать слабо сходящуюся к некоторому вектору v подпоследовательность $\{(k_n R^L_{k_n}(M))^{p+1}u\} \subset \mathcal{U}^1$. Из выпуклости и замкнутости множества $\mathcal{U}^1$ следует его слабая замкнутость, поэтому $v \in \mathcal{U}^1$.

Заметим, что непрерывность оператора $(R^L_\mu(M))^{p+1}$, $|\mu| > a$, влечет его непрерывность в слабой топологии. Отсюда

$$(R^L_\mu(M))^{p+1} w\text{-}\lim_{n\to\infty}(I - (k_n R^L_{k_n}(M))^{p+1})u = w\text{-}\lim_{n\to\infty}(I - (k_n R^L_{k_n}(M))^{p+1})(R^L_\mu(M))^{p+1}u = 0$$

в силу леммы 1.2. Поэтому вектор $z = w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(I - (k_n R^L_{k_n}(M))^{p+1})u \in \mathcal{U}^0$.

Представим u в виде $u = (k_n R^L_{k_n}(M))^{p+1}u + (I - (k_n R^L_{k_n}(M))^{p+1})u$. Перейдем к слабому пределу при $n \to \infty$ и получим $u = z + v$, где $z \in \mathcal{U}^0$, $v \in \mathcal{U}^1$. □

Замечание 3.1. Для справедливости утверждений лемм 1.1, 1.2, 1.3 и теоремы 3.1 достаточно выполнения условия (ii) из определения 1.1 лишь при $n = 1$.

Для расщепления пространств, не являющихся рефлексивными, приходится накладывать дополнительные условия на операторы L, M. Введем в рассмотрение (L,p)-бирадиальный оператор M, для которого выполняется одно из дополнительных условий

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{c_1(u)}{(|\lambda| - a)\prod\limits_{k=0}^{p}(|\mu_k| - a)} \quad \forall u \in \operatorname{dom} M; \tag{3.1}$$

существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{c_2(f)}{(|\lambda| - a)\prod\limits_{k=0}^{p}(|\mu_k| - a)} \quad \forall f \in \mathcal{F}^{\circ} \tag{3.2}$$

при любых $|\lambda| > a, |\mu_0| > a, |\mu_1| > a, \ldots, |\mu_p| > a$.

Замечание 3.2. Из (L,p)-бирадиальности оператора M и выполнения условия (3.1) ((3.2)) следует сильная (L,p)-радиальность справа (слева) [4], [5] операторов M и $-M$.

Теорема 3.2. *Пусть оператор M (L,p)-бирадиален и выполняется условие* (3.1) ((3.2)). *Тогда* $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1)$.

Доказательство. Пусть $u \in \operatorname{dom} M$. Тогда имеем

$$(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u - (\lambda R^L_\lambda(M))^{p+1}u = (\lambda - \mu)\sum_{k=0}^{p}\mu^{p-k}\lambda^k(R^L_\mu(M))^{p+1-k}(R^L_\lambda(M))^k(\lambda L - M)^{-1}Mu.$$

Отсюда

$$\|(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u - (\lambda R^L_\lambda(M))^{p+1}u\|_{\mathcal{U}} \leq 2^{p+1}c_3(u)|(|\mu| - a)^{-1} - (|\lambda| - a)^{-1}|$$

при $|\mu| > 2a$, $|\lambda| > 2a$ в силу условия (3.1). Поэтому существует предел $\lim\limits_{\mu\to\pm\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u$ $\forall u \in \operatorname{dom} M$. Так как $\overline{\operatorname{dom} M} = \mathcal{U}$, а семейство операторов $\{(\mu R^L_\mu(M))^{p+1} : |\mu| > 2a\}$ равномерно ограничено, то $P = s\text{-}\lim\limits_{\mu\to\pm\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$. Согласно лемме 1.3 P и есть проектор вдоль $\mathcal{U}^0$ на $\mathcal{U}^1$.

Расщепление пространства $\mathcal{F}$ вдоль $\mathcal{F}^0$ на $\mathcal{F}^1$ показывается с помощью проектора

$$Q = s\text{-}\lim_{\mu\to\pm\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}). \quad \square$$

Замечание 3.3. Ясно, что в случае (L,p)-бирадиальности оператора M и при выполнении условия (3.1) ((3.2)) разрешающая группа уравнения (2.1) ((2.2)) задана на всем пространстве $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$, а ее единицей является проектор P (Q).

Следствие 3.1. Пусть для (L,p)-бирадиального оператора M выполняются условия (3.1) и (3.2). Тогда

(i) $LPu = QLu \quad \forall u \in \mathcal{U}$;

(ii) $\forall u \in \operatorname{dom} M \quad Pu \in \operatorname{dom} M$ и $MPu = QMu$.

Доказательство. Соотношение

$$M(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}u = (\mu L^L_\mu(M))^{p+1}Mu \quad \forall u \in \operatorname{dom} M \tag{3.3}$$

следует из (1.1). Устремим в (3.3) $\mu \to \pm\infty$. Используя предыдущую теорему и замкнутость оператора M, получим утверждение (ii).

Утверждение (i) доказывается аналогично с использованием непрерывности оператора L. $\square$

Обозначим через L_1 (M_1) сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^1$ ($\operatorname{dom} M_1 = \mathcal{U}^1 \cap \operatorname{dom} M$). Очевидно, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$.

Лемма 3.1. *Пусть оператор M (L, p)-бирадиален и выполняются условия* (3.1), (3.2). *Тогда $M_0 \in \mathcal{C}\ell(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{C}\ell(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$.*

Доказательство. Возьмем $u \in \operatorname{dom} M_1$. Согласно следствию 3.1 $Mu \in \mathcal{F}^1$. Осталось показать, что $\overline{\operatorname{dom} M_1} = \mathcal{U}^1$. В силу следствия 3.1 для любого $u_k \in \operatorname{dom} M$ $Pu_k \in \operatorname{dom} M_1$. Так как линеал $\operatorname{dom} M$ плотен в пространстве $\mathcal{U}$ для $u = Pu \in \mathcal{U}^1$, то существует последовательность $\{u_k\} \subset \operatorname{dom} M$ такая, что $u_k \to u$ при $k \to \infty$. Поэтому $Pu_k \to Pu = u$.

Утверждение об операторе M_0 доказывается аналогично с использованием проектора $(I - P)$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть для (L, p)-бирадиального оператора M выполняются условия* (3.1) *и* (3.2). *Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$.*

Доказательство. Инъективность оператора L_1 следует из того, что $\ker L \subset \mathcal{U}^0$. Обозначим $J = L_0 M_0^{-1}$, тогда

$$(L_\mu^L(M))^{p+1} = (J(\mu J - I)^{-1})^{p+1}(I - P) + (L_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}P = (L_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}P,$$

т. к. J нильпотентен степени не больше p в силу леммы 1.1 (iv). Поэтому $\operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M) = \operatorname{im} L_{(\mu,p)}^{L_1}(M_1)$ и $\mathcal{F}^1 \subset \overline{\operatorname{im} L_1}$. Но $\operatorname{im} L_1 \subset \mathcal{F}^1$, следовательно, $\operatorname{im} L_1$ плотен в $\mathcal{F}^1$, а значит, L_1^{-1} плотно определен. $\square$

4. Обратный оператор

В этом параграфе будут приведены условия, при которых $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(F^1; \mathcal{U}^1)$.

Определение 4.1. Оператор M называется *сильно (L, p)-бирадиальным*, если он (L, p)-бирадиален и выполняются оценки (3.2) и

$$\|R_{(\mu,p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \le \frac{K}{(|\lambda| - a) \prod\limits_{k=0}^{p} (|\mu_k| - a)} \tag{4.1}$$

при всех $|\lambda| > a, |\mu_0| > a, \ldots, |\mu_p| > a$.

Замечание 4.1. Для сильно (L, p)-бирадиального оператора M выполняется оценка (3.1).

Замечание 4.2. В случае $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$ оператор M сильно (L, p)-бирадиален, если бирадиален оператор $L^{-1}M$ (или ML^{-1}). Покажем, например, выполнение условия (3.2). Возьмем $\mathring{\mathcal{F}} = L[\operatorname{dom} M]$. Этот линеал плотен в $\mathcal{F}$, т. к. L — гомеоморфизм пространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$, а $\overline{\operatorname{dom} M} = \mathcal{U}$. Далее, $L^{-1}f \in \operatorname{dom} M$ для всех $f \in \mathring{\mathcal{F}}$,

$$M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu,p)}^L(M) f = M(\lambda I - S)^{-1} \prod_{k=0}^{p} (\mu_k I - S)^{-1} L^{-1} f =$$
$$= LS(\lambda I - S)^{-1} \prod_{k=0}^{p} (\mu_k I - S)^{-1} L^{-1} f = L(\lambda I - S)^{-1} \prod_{k=0}^{p} (\mu_k I - S)^{-1} S L^{-1} f.$$

Поэтому из бирадиальности оператора $S = L^{-1}M$ получаем

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu,p)}^L(M) f\|_{\mathcal{F}} \le \frac{K \|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})} \|SL^{-1}f\|_{\mathcal{U}}}{(|\lambda| - a) \prod\limits_{k=0}^{p} (|\mu_k| - a)}.$$

Выполнение оценки (4.1) показывается аналогично.

Замечание 4.3. Если оператор M сильно (L,p)-бирадиален, то сильно (L,p)-радиальны [4], [5] операторы M и $-M$.

Из этого замечания и соответствующей теоремы [4], [5] следует

Теорема 4.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-бирадиален. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.*

Этот оператор строится следующим образом:

$$L_1^{-1} = s\text{-}\lim_{\mu\to\pm\infty} \mu^{p+2}(R_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}(\mu L_1 - M_1)^{-1}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству леммы 1.2.

5. Инфинитезимальные генераторы

Группу $\{V^t \in \mathcal{L}(\mathcal{V}) : t \in \mathbb{R}\}$ назовем *невырожденной*, если $V^0 = I$. *Инфинитезимальным генератором* невырожденной группы называется оператор A с областью определения

$$\operatorname{dom} A = \{v \in \mathcal{V} : \exists \lim_{t\to 0} t^{-1}(V^t - I)v\},$$

такой, что

$$Av = \lim_{t\to 0} t^{-1}(V^t - I)v \quad \forall v \in \operatorname{dom} A.$$

Сужение $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ ($\{F_1^t : t \in \mathbb{R}\}$) группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ ($\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$) на подпространство $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$) является невырожденной сильно непрерывной группой.

Введем следующие обозначения:

$$S_1 = L_1^{-1}M_1 : \operatorname{dom} S_1 \to \mathcal{U}^1, \quad \operatorname{dom} S_1 = \operatorname{dom} M_1,$$
$$T_1 = M_1 L_1^{-1} : \operatorname{dom} T_1 \to \mathcal{F}^1, \quad \operatorname{dom} T_1 = L_1[\operatorname{dom} M_1]$$

при условии сильной (L,p)–бирадиальности оператора M.

Лемма 5.1. *Справедливы включения $S_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1)$, $T_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{F}^1)$.*

Доказывается лемма непосредственно, с использованием того факта, что L_1 — гомеоморфизм пространств $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$.

Теорема 5.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)–бирадиален. Тогда инфинитезимальным генератором группы $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ ($\{F_1^t : t \in \mathbb{R}\}$) является оператор S_1 (T_1).*

Доказательство. Невырожденная группа $\{U_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ составлена из двух невырожденных полугрупп в соответствии с (2.9). Найдем инфинитезимальные генераторы этих полугрупп. Возьмем $u = (R_\beta^L(M))^{p+2}v$ при некоторых $\beta > a$ и $v \in \mathcal{U}$. По теореме 3.2 $v = v^0 + v^1$, где $v^0 \in \mathcal{U}^0$, $v^1 \in \mathcal{U}^1$. Поэтому $u = (R_\beta^L(M))^{p+2}v^1$. Заметим, что

$$\frac{d}{dt}U_\mu^t u = U_\mu^t\left(\frac{\mu - a}{p+1}(((\mu - a)R_\mu^L(M))^{p+1} - I) + aI\right)u = U_\mu^t G(\mu)u = G(\mu)U_\mu^t u \;\; \forall \mu > a, \;\; \forall t > 0,$$

где

$$G(\mu)u = \frac{\mu - a}{p+1}(((\mu - a)R_\mu^L(M))^{p+1} - I)u + au.$$

(Обозначение U_μ^t взято из (2.4).) Воспользуемся соотношением

$$U_\lambda^t u - u = \int_0^t \frac{d}{dt}(U_\lambda^s u)ds = \int_0^t U_\lambda^s G(\lambda)u\,ds. \tag{5.1}$$

Из равномерной по $s \in [0,t]$ сходимости $U_\lambda^s w$ к $U^s w$ следует равномерная сходимость $U_\lambda^s G(\lambda)u$ к $U^s(\beta L - M)^{-1}M(R_\beta^L(M))^{p+1}v^1$.

Из теоремы 4.1 следует, что $R^{L_1}_\beta(M_1) = R_\beta(S_1) = (\beta I - S_1)^{-1}$. Поэтому $u = (R_\beta(S_1))^{p+2}v^1$, и т. к. $\operatorname{im}(R_\mu(S_1))^{p+2} \subset \operatorname{dom} S_1$, то

$$(\beta L - M)^{-1} M (R^L_\beta(M))^{p+1} v^1 = S_1 (R_\beta(S_1))^{p+2} v^1 = S_1 u.$$

Из (5.1) при $\lambda \to +\infty$ получим

$$U^t_+ u - u = \int_0^t U^s_+ S_1 u\, ds \quad \forall u \in \operatorname{im}(R_\mu(S_1))^{p+2}. \tag{5.2}$$

Из (5.2) видно, что $Au = S_1 u$ для любого $u \in \operatorname{im}(R_\mu(S_1))^{p+2}$. Введем на линеале $\operatorname{dom} S_1$ граф-норму $\|u\|_{graph} = \|u\|_{\mathcal{U}} + \|S_1 u\|_{\mathcal{U}}$. Линеал $\operatorname{dom} S_1$, оснащенный такой нормой, превращается в банахово пространство, на котором оператор S_1 будет непрерывным. Докажем, что линеал $\operatorname{im}(R_\mu(S_1))^{p+2}$ плотен в $\operatorname{dom} S_1$ относительно граф-нормы. Рассмотрим произвольный вектор $u \in \operatorname{dom} S_1$. Возьмем последовательность $\{v_k = (kR_k(S_1))^{p+2} u\} \subset \operatorname{im}(R_\mu(S_1))^{p+2}$. Заметим сначала, что согласно теореме 4.1 $(kR_k(S_1))^{p+2} w = L_k^{-1} L_1 w \to w$ при $k \to \infty$ для любого $w \in \mathcal{U}^1$. Здесь используется обозначение $L_k^{-1} = k^{p+2}(R^{L_1}_k(M_1))^{p+1}(kL_1 - M_1)^{-1}$. Отсюда

$$\|(kR_k(S_1))^{p+2}u - u\|_{\mathcal{U}} + \|S_1((kR_k(S_1))^{p+2}u - u)\|_{\mathcal{U}} =$$
$$= \|(kR_k(S_1))^{p+2}u - u\|_{\mathcal{U}} + \|(kR_k(S_1))^{p+2}S_1 u - S_1 u\|_{\mathcal{U}} \to 0$$

при $k \to \infty$, что и требовалось.

Таким образом, оператор A совпадает с непрерывным оператором S_1 на плотном в банаховом пространстве $\operatorname{dom} S_1$ линеале $\operatorname{im}(R_\mu(S_1))^{p+2}$. Он может быть единственным образом продолжен на все пространство по непрерывности. Поэтому $Au = S_1 u \ \forall u \in \operatorname{dom} S_1$. В силу (L,p)-бирадиальности при любом $\mu > a$ существует резольвента $(\mu I - S_1)^{-1} = R^{L_1}_\mu(M_1) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$. Резольвента инфинитезимального генератора C_0-полугруппы $\{U^t_{+_1} : t \geq 0\}$ при $\mu > a$ существует и равна

$$(\mu I - A)^{-1} u = \int_0^\infty e^{-\mu t} U^t_{+_1} u\, dt \quad \forall u \in \mathcal{U}^1.$$

Здесь $U^t_{+_1} = U^t_+|_{\mathcal{U}^1}$. Итак, оператор $\mu I - A$ отображает и $\operatorname{dom} S_1$, и $\operatorname{dom} A$ на пространство $\mathcal{U}^1$ биективно. Отсюда следует, что $\operatorname{dom} S_1 = \operatorname{dom} A$.

Для полугрупп (2.5)–(2.7) аналогично показывается, что их инфинитезимальными генераторами являются операторы $M_1 L_1^{-1}$, $-L_1^{-1} M_1$, $-M_1 L_1^{-1}$ соответственно.

По построению группы $\{U^t_1 : t \in \mathbb{R}\}$ получаем, что ее генератором является оператор S_1.

Аналогично находим генератор группы $\{F^t_1 : t \in \mathbb{R}\}$. $\square$

Следствие 5.1. В условиях теоремы 5.1 операторы S_1, T_1 бирадиальны.

6. Генераторы сильно непрерывных групп операторов с ядрами

В этом параграфе выделим необходимые и достаточные условия сильной (L,p)–бирадиальности оператора M в терминах групп.

(**A**1) *Существуют две сильно непрерывные и экспоненциально ограниченные группы* $\{U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : t \in \mathbb{R}\}$ *и* $\{F^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) : t \in \mathbb{R}\}$ *операторов с ядрами.*

Положим $P = U^0$, $Q = F^0$. Очевидно, P и Q — проекторы. Введем обозначения $\mathcal{U}^0 = \ker P$, $\mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathcal{F}^0 = \ker Q$, $\mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q$; имеем $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$. Через $\{U^t_1 : t \in \mathbb{R}\}$ и $\{F^t_1 : t \in \mathbb{R}\}$ обозначим сужения соответствующих групп на подпространства $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$. Сужения суть невырожденные группы и имеют инфинитезимальные генераторы S_1 и T_1 соответственно, являющиеся бирадиальными операторами в соответствии с ([2], с. 377).

(**A**2) *Существует линейный гомеоморфизм* $L_1 : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1$ *такой, что* $L_1 S_1 = T_1 L_1$.

(**A**3) *Существует биективный оператор* $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$.

Отсюда следует существование оператора $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$.

(**A**4) *Существует оператор* $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$ *такой, что оператор* $H = M_0^{-1} L_0$ *нильпотентен степени не больше* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

($\mathbf{A}5$) $L = L_0(I-P) + L_1 P$, $M = M_0(I-P) + L_1 S_1 P$, $\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} M_0 \dot{+} \operatorname{dom} S_1$.

Теорема 6.1. *Оператор M сильно (L,p)-бирадиален тогда и только тогда, когда выполнены все условия* (A1)–(A5).

Доказательство. Необходимость условий (A1)–(A5) следует из результатов предыдущих параграфов. Осталось доказать достаточность.

Пусть $|\mu| > a$, $|\mu_k| > a$, $k = \overline{0,p}$, тогда

$$(\mu L - M)^{-1} = (\mu H - I)^{-1} M_0^{-1}(I-Q) + (\mu I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q =$$

$$= -\sum_{k=0}^{p} \mu^k H^k M_0^{-1}(I-Q) + (\mu I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q,$$

$$(R^L_{(\mu,p)}(M))^n = 0(I-P) + \prod_{k=0}^{p} (R_{\mu_k}(S_1))^n P,$$

$$(L^L_{(\mu,p)}(M))^n = 0(I-Q) + \prod_{k=0}^{p} (R_{\mu_k}(T_1))^n Q.$$

Здесь использовано то, что резольвенты коммутируют, а оператор $H = M_0^{-1} L_0$ нильпотентен. Далее,

$$R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} = 0(I-Q) + \prod_{k=0}^{p} (\mu_k I - S_1)^{-1} (\lambda I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q,$$

$$M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f = 0(I-Q)f + (\lambda I - T_1)^{-1} \prod_{k=0}^{p} (\mu_k I - T_1)^{-1} T_1 Q f.$$

Здесь $f \in \mathring{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \dot{+} \operatorname{dom} T_1$, линеал $\mathring{\mathcal{F}}$ плотен в $\mathcal{F}$, т. к. $\overline{\operatorname{dom} T_1} = \mathcal{F}^1$. Из указанных соотношений и бирадиальности операторов S_1 и T_1 следует утверждение теоремы. $\square$

Следствие 6.1. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, а бесконечность — устранимая особая точка либо полюс порядка не больше p [3]. Тогда оператор M сильно (L,p)-бирадиален.

Действительно, в условиях следствия согласно [3] выполняются (A1)–(A5).

7. Пример

Применим полученные результаты к исследованию начально-краевой задачи

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{7.1}$$

$$u(x,t) = \triangle u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \tag{7.2}$$

для модифицированного уравнения

$$(\lambda - \triangle) u_t(x,t) = i\alpha \triangle u(x,t) - i\beta \triangle^2 u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

описывающего эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [9]. Здесь $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞.

Редуцируем задачу (7.1)–(7.3) к задаче (0.1), (0.2). Пусть

$$\mathcal{U} = \{u \in W_q^{k+2} : u(x) = 0, \ \ x \in \partial\Omega\}, \qquad \mathcal{F} = W_q^k$$

или

$$\mathcal{U} = \{u \in C^{k+2+\nu} : u(x) = 0, \ \ x \in \partial\Omega\}, \quad \mathcal{F} = C^{k+\nu},$$

где $W_q^l = W_q^l(\Omega)$ — пространство Соболева, $1 < q < \infty$, $C^{l+\nu} = C^{l+\nu}(\Omega)$ — пространство Гёльдера, $0 < \nu < 1$, $l = 0, 1, \ldots$

Операторы L и M зададим следующим образом: $L = \lambda - \triangle$, $M = i\alpha\triangle - i\beta\triangle^2$,

$$\operatorname{dom} M = \{u \in W_q^{k+4} : \triangle u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega\} \cap \mathcal{U}$$

или

$$\operatorname{dom} M = \{u \in C^{k+4+\nu} : \triangle u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega\} \cap \mathcal{U}.$$

Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Пусть $\lambda \in \sigma(\triangle)$. Покажем, что оператор M сильно (L,p)-бирадиален. Легко получить формулы для относительных резольвент

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\cdot,\varphi_k)\varphi_k}{\mu(\lambda - \lambda_k) - i\alpha\lambda_k + i\beta\lambda_k^2}.$$

Отсюда следует, что L-спектр оператора M лежит на мнимой оси $\sigma^L(M) = \{\mu_k \in \mathbb{C} : \mu_k = i\frac{\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k},\ \lambda_k \neq \lambda\}$. Нетрудно заметить, что относительный спектр неограничен на мнимой оси снизу. Поэтому оператор M заведомо не является (L,σ)-ограниченным [3]. Далее,

$$(R_\mu^L(M))^n = (L_\mu^L(M))^n = \sum_{k:\lambda_k \neq \lambda} \frac{(\cdot,\varphi_k)\varphi_k}{\left(\mu - i\frac{\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}\right)^n},$$

$$R_\nu^L(M)(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k:\lambda_k \neq \lambda} \left(\nu - i\frac{\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}\right)^{-1} \frac{(\cdot,\varphi_k)\varphi_k}{(\lambda - \lambda_k)\left(\mu - i\frac{\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}\right)},$$

$$M(\nu L - M)^{-1} L_\mu^L(M) = \sum_{k:\lambda_k \neq \lambda} \left(\nu - \frac{i\alpha\lambda_k - i\beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}\right)^{-1} \left(\frac{i\alpha\lambda_k - i\beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}\right) \frac{(\cdot,\varphi_k)\varphi_k}{\mu - \frac{i\alpha\lambda_k - i\beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}}.$$

В определении сильной $(L,0)$-бирадиальности достаточно взять константы $K = \max\{1, \max\limits_{k:\lambda_k \neq \lambda} |\lambda - \lambda_k|^{-1}\}$, $a = 0$, линеал $\overset{\circ}{\mathcal{F}} = \operatorname{dom} M \subset \mathcal{F}$.

Сжимающая сильно непрерывная группа уравнения имеет вид

$$U^t u_0 = \sum_{k:\lambda_k \neq \lambda} \exp\left(i\frac{\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k} t\right)(u_0,\varphi_k)\varphi_k.$$

Ядром группы является подпространство $\mathcal{U}^0 = \operatorname{span}\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda\}$.

Литература

1. Осколков А.П. *О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей* // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1975. – Т. 52. – С. 128–157.
2. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* – М.: Ин. лит., 1962. – 829 с.
3. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // УМН. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47–74.
4. В.Е.Федоров. *Сильно непрерывные полугруппы и относительно p-радиальные операторы.* – Челябинск, 1995. – 30 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.09.95, № 2665-В95.
5. Федоров В.Е. *Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами* // Докл. РАН. – 1996. – Т. 351. – № 3. – С. 316–318.

6. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. *О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 3. – С. 604–616.
7. Favini A., Yagi A. *Multivalued linear operators and degenerate evolution equations* // Ann. Math. Pura Appl. – 1993. – V. CLXIII. – P. 353–384.
8. Мельникова И.В., Альшанский М.А. *Корректность задачи Коши в банаховом пространстве: регулярный и вырожденный случаи* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. современ. матем. и ее прил. – 1995. – Т. 27. – С. 5–64.
9. Дзекцер Е.С. *Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью* // ДАН СССР. – 1972. – Т.202. – № 5. – С. 1031–1033.

Челябинский государственный университет

Поступили
первый вариант 11.11.1997
окончательный вариант 24.04.1999