ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 4 (479)

УДК 517.956.6

Р.С. ХАЙРУЛЛИН

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + yu_{yy} + (-n + 1/2)u_y = 0, \quad n \in N, \tag{1}$$

в смешанной области D, эллиптическая часть которой D_1 совпадает со всей верхней полуплоскостью, а гиперболическая часть состоит из двух бесконечных треугольников: D_2, ограниченного характеристиками $y = 0$ и $x - 2\sqrt{-y} = 0$, и D_3, ограниченного характеристиками $y = 0$ и $x + 2\sqrt{-y} = 0$.

В [1]–[4] исследовались задачи типа Трикоми и Бицадзе–Самарского для уравнения (1) в случае неограниченных областей. В данной статье рассматривается некоторый аналог задачи Франкля.

Задача F. *В области D найти функцию $u(x,y)$ со свойствами*

1) *$u(x,y)$ принадлежит $C(D_1 \cup \{y=0\}) \cap C(D_2 \cup \{y=0\} \cup \{x - 2\sqrt{-y} = 0\}) \cap C(D_3 \cup \{y = 0\} \cup \{x + 2\sqrt{-y} = 0\})$;*
2) *имеют место соотношения*

$$u = o(R^{2n+1}), \quad u_x = o(R^{2n}), \quad u_y = o(R^{2n-1}) \tag{2}$$

при $R \to +\infty$, где $R^2 = x^2 + 4y$, $(x,y) \in D_1$;

3) *$u(x,y)$ принадлежит $C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ и удовлетворяет уравнению* (1) *в $D_1 \cup D_2 \cup D_3$;*
4) *существуют пределы ($x \neq 0$)*

$$\nu_i(x) = \lim_{y\to 0,\ (x,y)\in D_i} |y|^{-n+1/2}[u(x,y) - A(x,y,\tau_i)]_y, \quad i = 1,2,3, \tag{3}$$

и выполняются равенства

$$\nu_1(x) = (-1)^n \nu_2(x), \quad x > 0, \tag{4}$$

$$\nu_1(x) = 0, \quad \nu_3(x) = 0, \quad x < 0, \tag{5}$$

где

$$\tau_i(x) = \lim_{y\to 0,\ (x,y)\in D_i} u(x,y), \tag{6}$$

$$A(x,y,\tau) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\tau^{(2s)}(x)(-1)^s}{(-n+1/2)_s s!} y^s,$$

$(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_s = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+s-1)$;

Работа выполнена при поддержке внебюджетного фонда НИОКР Академии наук Татарстана (договор № 05-5.1-79/2001(&)).

5) $u(x,y)$ *удовлетворяет краевому условию* $(y<0)$

$$u(x,y)|_{x=2\sqrt{-y}} = u(x,y)|_{x=-2\sqrt{-y}}; \tag{7}$$

6) *выполняются условия склеивания*

$$\tau_1(x) = \tau_2(x), \qquad x \geq 0, \tag{8}$$

$$\tau_1(x) = \tau_3(x) + g(x), \quad x \leq 0, \tag{9}$$

где $g(x)$ *— заданная функция;*

7) *выполняются равенства*

$$\tau_i^{(s)}(0) = 0, \quad s = \overline{0,n}. \tag{10}$$

Предполагается выполненным

Условие 1. Функция $g(x) \in C^n(-\infty,0] \cap C^{2n+1,\gamma}(-\infty,0)$, $\gamma > 0$,

$$g^{(s)}(0) = 0, \quad s = \overline{0,n},$$

производная $g^{(n+1)}(x)$ может иметь особенность при $x=0$ порядка ниже единицы и должна иметь представление $g^{(n+1)}(x) = O(|x|^{-\beta})$ при $x \to \infty$, где $\beta > 1/2$.

Будем решение искать в классе функций, для которых $\tau_i(x)$ удовлетворяют условиям, аналогичным условию 1 с учетом области определения, а для $\nu_i(x)$ выполняется

Условие 2. Функции $\nu_i(x)$ непрерывны в соответствующих областях определения, могут иметь особенность при $x=0$ порядка ниже $n+1$ и ограничены на бесконечности.

2. Основное соотношение из эллиптической подобласти

Для решения задачи методом интегральных уравнений понадобятся основные соотношения между τ и ν. В эллиптической подобласти используем решение задачи Дирихле с краевым условием (6) при $i=1$ ([5], с. 588)

$$u(x,y) = \frac{n!2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)} y^{n+1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_i(\xi)[(x-\xi)^2 + 4y]^{-n-1} d\xi. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что эта формула верна в случае, когда заданная функция обладает на бесконечности особенностью порядка ниже $2n+1$, при этом полученная функция (11) будет удовлетворять условиям (2). Подставляя представление (11) в (3), аналогично работе [3] доказываем, что справедлива

Лемма 1. *Основное соотношение из эллиптической подобласти имеет вид*

$$\Gamma(n+1/2)\nu_1(x) = \frac{n!(n+1/2)2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}(2n+1)!} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_1^{(n+1)}(\xi)}{\xi - x} d\xi. \tag{12}$$

3. Основное соотношение из гиперболических областей

Используем решение задачи типа Коши с начальными условиями (6), (3) при $i = 2, 3$, которые в соответствующих областях имеют вид

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n}\frac{n!(2n-s)!2^{2s}}{s!(n-s)!(2n)!}(-y)^{s/2}[\tau_i^{(s)}(x-2\sqrt{-y})+(-1)^s\tau_i^{(s)}(x+2\sqrt{-y})]-$$

$$-\frac{2(2n+1)!}{(n+1)!^2}(-y)^{n+1/2}\int\limits_0^1\nu_i(\zeta)[\xi(1-\xi)]^n d\xi, \quad (13)$$

где $\zeta = x - 2\sqrt{-y}(1-2\xi)$.

Условие (7) запишем в виде

$$u\left(x, -\frac{x^2}{4}\right) = u\left(-x, -\frac{x^2}{4}\right). \quad (14)$$

Подстановкой (13) в (14) аналогично [1] доказывается

Лемма 2. *Основное соотношение из гиперболических подобластей имеет вид*

$$\Gamma(n+1/2)\nu_2(x) - \Gamma(-n+1/2)\tau_2^{(2n+1)}(x) = \Gamma(n+1/2)\nu_3(-x) + \Gamma(-n+1/2)\tau_3^{(2n+1)}(-x). \quad (15)$$

4. Вывод интегральных уравнений и решение задачи F

Из соотношений (12), (15) с учетом условий (4), (5), (8), (9) и равенства

$$\frac{n!(n+1/2)2^{2n+1}(-1)^n}{\sqrt{\pi}(2n+1)!\Gamma(-n+1/2)} = \frac{1}{\pi}$$

получим

$$\tau_1^{(2n+1)}(x) + \tau_1^{(2n+1)}(-x) - \frac{1}{\pi}\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau_1^{(n+1)}(\xi)d\xi}{\xi - x} = g^{(2n+1)}(-x), \quad x > 0, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau_1^{(n+1)}(\xi)d\xi}{\xi + x} = 0, \quad x > 0. \quad (17)$$

В обоих соотношениях (16) и (17) разобьем интегралы на два слагаемых: от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$. В первых слагаемых изменим знак переменной интегрирования. В результате уравнения (16), (17) примут вид

$$\tau_1^{(2n+1)}(x) + \tau_1^{(2n+1)}(-x) - \frac{1}{\pi}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^{+\infty}\frac{\tau_1^{(n+1)}(\xi)d\xi}{\xi - x} + \frac{1}{\pi}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^{+\infty}\frac{\tau_1^{(n+1)}(-\xi)d\xi}{\xi + x} = g^{(2n+1)}(-x), \quad (18)$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^{+\infty}\frac{\tau_1^{(n+1)}(\xi)d\xi}{\xi + x} - \frac{1}{\pi}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^{+\infty}\frac{\tau_1^{(n+1)}(-\xi)d\xi}{\xi - x} = 0. \quad (19)$$

Равенства (18), (19) представляют собой систему уравнений относительно $\tau_1(x)$ и $\tau_1(-x)$ при $x > 0$.

Итак, доказана

Теорема 1. *Решение задачи F редуцируется к решению системы уравнений* (18), (19).

Решим эту систему. Умножим уравнение (19) на $(-1)^n$ и прибавим к уравнению (18). В результате получим

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\rho(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{(-1)^n}{\xi + x}\right)\rho(\xi)d\xi - (-1)^n g^{(n+1)}(-x)\right] = 0, \quad (20)$$

где

$$\rho(x) = \tau_1^{(n+1)}(x) + (-1)^n \tau_1^{(n+1)}(-x). \tag{21}$$

Уравнение (20) эквивалентно следующему:

$$\rho(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{(-1)^n}{\xi + x}\right)\rho(\xi)d\xi = (-1)^n g^{(n+1)}(-x) + \sum_{s=0}^{n-1} c_s x^s,$$

где c_s — произвольные постоянные.

Выполним замену $\xi^2 = \sigma$, $x^2 = \eta$. Получим при нечетном n

$$z(\eta) - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{z(\sigma)d\sigma}{\sigma - \eta} = f(\eta) + \sum_{s=0}^{n-1} c_s \eta^{s/2}, \tag{22}$$
$$z(\eta) = \rho(x), \quad f(\eta) = (-1)^n g^{(n+1)}(-x);$$

при четном n

$$z(\eta) - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{z(\sigma)d\sigma}{\sigma - \eta} = f(\eta) + \sum_{s=0}^{n-1} c_s \eta^{(s-1)/2}, \tag{23}$$
$$z(\eta) = \rho(x)/x, \quad f(\eta) = (-1)^n g^{(n+1)}(-x)/x.$$

Оценим поведение функций на концах промежутка интегрирования. Из условия 1 следует, что если n нечетное, то функция $f(\eta)$ может иметь особенность при $\eta = 0$ порядка ниже $1/2$ и при $\eta \to +\infty$ должна иметь нуль порядка выше $1/4$; если n четное, то функция $f(\eta)$ может иметь особенность при $\eta = 0$ порядка ниже 1 и при $\eta \to +\infty$ должна иметь нуль порядка выше $3/4$. Такое же поведение предполагается у функции $z(\eta)$.

Уравнения вида (22), (23) разрешимы, когда правая часть обращается в нуль на бесконечности [6]. Отсюда следуют равенства $c_s = 0$, $s = \overline{0, n-1}$, в случае уравнения (22) и $c_s = 0$, $s = \overline{1, n-1}$, в случае уравнения (23). Теперь в этих уравнениях выполним подстановку [6]

$$\eta = \zeta/(1-\zeta), \quad \sigma = t/(1-t),$$
$$z(\eta) = v(\zeta)(1-\zeta), \quad f(\eta) = b(\zeta)(1-\zeta).$$

Уравнения примут вид

$$v(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v(t)dt}{t - \zeta} = b(\zeta) + \frac{c_0}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}, \tag{24}$$

причем $c_0 = 0$ при нечетном n.

Отметим, что решения уравнения вида (24), неограниченные при $\zeta = 0$, имеют особенность порядка $1/4$, а неограниченные при $\zeta = 1$ имеют особенность порядка $3/4$ в указанной точке.

Пусть n нечетное. У функции $b(\zeta)$ могут быть особенности при $\zeta = 0$ порядка ниже $1/2$, при $\zeta = 1$ — ниже $3/4$. Такие же особенности допускаются у решения $v(\zeta)$. Поэтому необходимо использовать формулу решения, ограниченного при $\zeta = 1$.

Пусть n четное. У функции $b(\zeta)$ могут быть особенности при $\zeta = 0$ порядка ниже 1, при $\zeta = 1$ — ниже $1/4$. Следовательно, опять необходимо использовать формулу решения, ограниченного при $\zeta = 1$. Причем должно быть $c_0 = 0$. В противном случае функция $v(\zeta)$ будет иметь при $\zeta = 1$ особенность порядка $1/2$, что выше допустимой.

Указанное решение единственно. Отсюда найдем $v(\zeta)$, а следовательно, и функцию $\rho(x)$. Теперь, когда функция $\rho(x)$ найдена, из формулы (21) выразим

$$\tau_1^{(n+1)}(-x) = (-1)^n \rho(x) - (-1)^n \tau_1^{(n+1)}(x) \tag{25}$$

и подставим в уравнение (19). В результате получим

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\xi-x}+\frac{(-1)^n}{\xi+x}\right)\tau_1^{(n+1)}(\xi)d\xi-\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\rho(\xi)}{\xi-x}d\xi\right]=0.$$

Это уравнение имеет такую же структуру, как и уравнение (20). Поэтому после последовательных замен получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{p(t)dt}{t-\zeta}=q(\zeta)+\frac{d_0}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}},$$

причем $d_0=0$ при четном n.

У функций $p(\zeta)$ и $q(\zeta)$ допускаются следующие особенности: если n четное, то при $\zeta=0$ особенность порядка ниже 1/2, при $\zeta=1$ — ниже 3/4; если n нечетное, то при $\zeta=0$ — ниже 1, при $\zeta=1$ — ниже 1/4.

Решение, неограниченное при $\zeta=0$ или $\zeta=1$, имеет в этой точке особенность порядка 1/2. Поэтому необходимо использовать формулу решения, ограниченного при $\zeta=0$, если n четное, и ограниченного при $\zeta=1$, если n нечетное. Кроме того, отсюда же следует, что во втором случае $d_0=0$. Указанные решения единственны.

Найдем $p(\zeta)$, а следовательно, и $\tau_1^{(n+1)}(x)$, $x>0$. Используя формулу (25), вычислим $\tau_1^{(n+1)}(x)$, $x<0$. Затем с учетом равенств (10) восстановим функцию $\tau_1(x)$. После этого из соотношений (8), (9), (15) последовательно найдем функции $\tau_2(x)$, $\tau_3(x)$ и $\nu_2(x)$. Если запишем решение в каждой из подобластей, используя формулы (11) и (13), то это решение единственно в силу однозначности определения вспомогательных функций и единственности решений задач Дирихле и типа Коши.

Итак, доказана

Теорема 2. *Задача F имеет единственное решение.*

Литература

1. Крикунов Ю.М. *Видоизмененная задача Трикоми для уравнения* $u_{xx}+yu_{yy}+(-n+1/2)u_y=0$ // Изв. вузов. Математика. – 1979. – № 9. – С. 21–28.
2. Салтыкова Н.М., Смирнов М.М. *Об одной краевой задаче типа Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченной области* // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астр. – 1985. – № 1. – С. 43–49.
3. Хайруллин Р.С. *Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае неограниченной области* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 11. – С. 2010–2017.
4. Хайруллин Р.С. *К задаче Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода* // Сиб. матем. журн. – 1994. – Т.35. – № 4. – С. 927–936.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
6. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

Поступила 04.05.2001