ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 517.956

В.Ф. ВОЛКОДАВОВ, Ю.А. ИЛЮШИНА

ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ T С СОПРЯЖЕНИЕМ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НОРМАЛИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В данной статье рассмотрим уравнение

$$U_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot U_{yy} - \lambda U = 0, \quad \lambda > 0, \tag{1}$$

в области G, ограниченной гладкой кривой Γ, которая лежит в полуплоскости $y > 0$, с концами $A(0;0)$ и $B(1;0)$ (начало кривой в точке B) и отрезками характеристик $AC : y = -x$, $BC : y = x - 1$, $C(1/2;-1/2)$.

Обозначим $G_+ = G \cap \{(x,y) \mid y > 0\}$, $G_- = G \cap \{(x,y) \mid y < 0\}$.

Задача T. *Найти функцию $U(x,y)$ со следующими свойствами*:
1) $U(x,y) \in C(\overline{G})$; $U_{xx}, U_{yy} \in C(G)$;
2) $U(x,y)$ — *решение уравнения (1) в G_- и G_+*;
3) $U(x,y)$ *удовлетворяет условиям*

$$U(x,y)|_\Gamma = f(s), \quad s \in [0;l], \quad l \text{ — длина кривой } \Gamma,$$
$$U(x,y)|_{y=-x} = \vartheta(x), \quad x \in [0;1/2],$$

и условию сопряжения

$$v_+(x) = Dv_-(x), \quad x \in (0;1), \tag{2}$$

где $v_+(x) = \lim\limits_{y\to+0} \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$, $Dv_-(x)$ *в характеристических координатах* $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ *имеет вид* $Dv_-(\xi) = \lim\limits_{\eta\to\xi+0} \frac{\partial}{\partial \xi} \int\limits_0^\xi (\xi - t)^{-r} U(t,\eta)dt$, $0 < r < 1$.

При $y > 0$ уравнение (1) примет вид

$$L(U) \equiv U_{xx} + U_{yy} - \lambda U = 0, \quad \lambda > 0. \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть непрерывная в $\overline{G}_+$ функция $U(x,y)$ удовлетворяет уравнению* (3) *в области G_+ и принимает в $\overline{G}_+$ наибольшее положительное* (*наименьшее отрицательное*) *значение в точке $(x_0;0)$, $0 < x_0 < 1$. Если значения $U(x,y)$ на кривой Γ меньше* (*больше*), *чем $U(x_0;0)$, то $v_+(x_0) = \lim\limits_{y\to+0} \frac{\partial U(x_0;y)}{\partial y} < 0$ (> 0) при условии, что этот предел существует.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены для функции $U(x,y)$.

Неравенство $\lim\limits_{y\to+0} \frac{\partial U(x_0;y)}{\partial y} > 0$ невозможно по принципу максимального значения ([1], с. 492). Допустим, что $\lim\limits_{y\to+0} \frac{\partial U(x_0;y)}{\partial y} = 0$. Без ограничения общности рассуждений будем считать $U(x_0;0) = 1$. Из условия леммы следует $\max U(x,y)|_\Gamma < U(x_0;0)$. Значит, существует такое $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$, что $\max U(x,y)|_\Gamma \le 1 - \varepsilon$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$V(x,y)=\frac{U(x,y)}{A(y)}, \tag{4}$$

где $A(y)=e^d-\varepsilon e^y>0$, d – диаметр области G_+, $0<\varepsilon<1$. Получим $L(U)=A(y)L_1(V)$, где

$$L_1(V)\equiv V_{xx}+V_{yy}+\frac{2A'(y)}{A(y)}V_y+\Big(\frac{A''(y)}{A(y)}-\lambda\Big)V.$$

По условию леммы $L(U)=0$, тогда $L_1(V)=0$. Непосредственные вычисления показывают, что $\frac{A''(y)}{A(y)}-\lambda<0$ и $V(x,y)|_\Gamma\le\frac{U(x,y)|_\Gamma}{e^d(1-\varepsilon)}\le\frac{1}{e^d}<V(x_0;0)$. Значит, $V(x,y)$ удовлетворяет всем условиям данной леммы, и, следовательно, невозможно неравенство $\lim\limits_{y\to+0}\frac{\partial V(x_0;y)}{\partial y}>0$. С другой стороны, из (4) следует $\lim\limits_{y\to+0}\frac{\partial V(x_0;y)}{\partial y}=\frac{\varepsilon e^y}{A^2(y)}>0$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение леммы. Второе утверждение доказывается аналогично. $\square$

При $y<0$ уравнение (1) в характеристических координатах $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ примет вид

$$U_{\xi\eta}-\frac{\lambda}{4}U=0. \tag{5}$$

Область G_- преобразуется в область $D=\{(\xi;\eta):0<\xi<\eta<1\}$.

Лемма 2. *Если функция $U(\xi;\eta)\in C(\overline{D})$ удовлетворяет уравнению (5) в области D, то $U(0;0)=U(1;1)=0$ либо $U(0;0)=U(0;1)=0$.*

Доказательство. Предположим, что для функции $U(\xi;\eta)$ не выполняется равенство $U(0;0)=U(1;1)=0$. Построим вспомогательную функцию

$$V(\xi;\eta)=U(\xi;\eta)-U(0;0)\frac{g(1;1)w(\xi;\eta)-w(1;1)g(\xi;\eta)}{g(1;1)-w(1;1)}-U(1;1)\frac{g(\xi;\eta)-w(\xi;\eta)}{g(1;1)-w(1;1)},$$

где $w(\xi;\eta)=\exp\big(\frac{\sqrt{\lambda}(\xi+\eta)}{2}\big)$, $g(\xi;\eta)={}_0F_1(1;\frac{\lambda}{4}\xi\eta)$. Функции $w(\xi;\eta)$ и $g(\xi;\eta)$ являются решениями уравнения (5), следовательно, функция $V(\xi;\eta)$ также является решением уравнения (5) в области D. Вычисления показывают $V(0;0)=V(1;1)=0$, что доказывает первое утверждение леммы. Второе утверждение леммы доказывается аналогично с использованием вспомогательной функции

$$V(\xi;\eta)=U(\xi;\eta)-U(0;0)\frac{q(0;1)w(\xi;\eta)-w(0;1)q(\xi;\eta)}{q(0;1)-w(0;1)}-U(0;1)\frac{q(\xi;\eta)-w(\xi;\eta)}{q(0;1)-w(0;1)},$$

где $q(\xi;\eta)={}_0F_1(1;\frac{\lambda}{4}(\xi+1)\eta)$. Методом Римана–Адамара находим функцию $U(\xi;\eta)\in C(\overline{D})$ — решение уравнения (5) в области D, удовлетворяющее условиям

$$U(\xi;\xi)=\tau(\xi),\quad \xi\in[0;1], \tag{6}$$

$$U(0;\eta)=\vartheta(\tfrac{\eta}{2})=\varphi(\eta),\quad \eta\in[0;1]. \quad\square \tag{7}$$

Теорема 1. *Если $\varphi(\eta)\in C^1_{[0;1]}$, $\tau(\xi)\in C_{[0;1]}\cap C^1_{(0;1)}$, то существует единственное решение задачи Дарбу для уравнения (5) в области D с условиями (6) и (7), непрерывное в $\overline{D}$, определяемое формулой*

$$U(\xi;\eta)=\tau(\xi)+\int_0^\eta\varphi'(t)V(0,t;\xi,\eta)dt+\frac{\lambda}{4}(\eta-\xi)\int_0^\xi\tau(t)\,{}_0F_1\Big(2;\frac{\lambda}{4}(t-\xi)(t-\eta)\Big)dt. \tag{8}$$

Функция Римана–Адамара для уравнения (5) имеет вид

$$V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\begin{cases}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta>\xi_0;\\ R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)-R(\eta,\xi;\xi_0,\eta_0), & \eta<\xi_0,\end{cases}$$

где $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)={}_0F_1(1;\frac{\lambda}{4}(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0))$ — функция Римана для уравнения (5) ([2], с. 4). Используя равенство (8) и аппарат специальных функций гипергеометрического типа [3], находим

$$\begin{aligned}Dv_-(\xi)=&\int_0^\xi\tau'(s)(\xi-s)^{-r}ds-\frac{r\lambda}{4(1-r)}\int_0^\xi\tau(s)(\xi-s)^{1-r}{}_0F_2\Big(2-r,2;\frac{\lambda}{4}(\xi-s)^2\Big)ds+\\&+\int_0^\xi\varphi'(s)(\xi-s)^{-r}\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(1)_n n!}\Big[\frac{\lambda}{4}\xi(\xi-s)\Big]^n F\Big(-r,-n;1-r;\frac{\xi-s}{\xi}\Big)ds-\\&-\int_0^\xi\varphi'(s)(\xi-s)^{-r}{}_0F_1\Big(1-r;\frac{\lambda}{4}\xi(\xi-s)\Big)ds-\\&-r\xi^{-1-r}\int_0^\xi\varphi'(s)s\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2)_n n!}\Big[\frac{\lambda}{4}(\xi-s)s\Big]^n F\Big(1+n,r;2+n;\frac{s}{\xi}\Big)ds.\end{aligned}\tag{9}$$

Лемма 3. *Если функция $U(\xi;\eta)\in C(\overline{D})$ такова, что $U(\xi;\xi)=\tau(\xi)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке $\xi_0:0<\xi_0<1$, при этом $U(0;\eta)\equiv 0$, $0<r\le(1+\frac{\lambda}{4}\exp(\frac{\lambda}{4}))^{-1}$, то $Dv_-(\xi_0)>0$ (<0).*

Доказательство. Из равенства (9) по условию леммы следует

$$Dv_-(\xi)=\int_0^\xi\tau'(s)(\xi-s)^{-r}ds-\frac{r\lambda}{4(1-r)}\int_0^\xi\tau(s)(\xi-s)^{1-r}{}_0F_2\Big(2-r,2;\frac{\lambda}{4}(\xi-s)^2\Big)ds.\tag{10}$$

В равенстве (10) применим формулу интегрирования по частям к первому слагаемому, учитывая, что $\tau'(s)=(\tau(s)-\tau(\xi))'$. Получим

$$\int_0^\xi\tau'(s)(\xi-s)^{-r}ds=\tau(\xi)\xi^{-r}-r\int_0^\xi(\tau(s)-\tau(\xi))(\xi-s)^{-r-1}ds.$$

Во втором слагаемом равенства (10) положим $\tau(s)=\tau(s)-\tau(\xi)+\tau(\xi)$. Тогда

$$\begin{aligned}Dv_-(\xi)=&\,\tau(\xi)\xi^{-r}\Big[1-\frac{r\lambda}{4(1-r)}\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2)_n(2-r)_n(2-r+2n)}\Big(\frac{\lambda}{4}\xi^2\Big)^n\Big]-\\&-\frac{r\lambda}{4(1-r)}\int_0^\xi(\tau(s)-\tau(\xi))(\xi-s)^{1-r}{}_0F_2\Big(2-r,2;\frac{\lambda}{4}(\xi-s)^2\Big)ds-r\int_0^\xi(\tau(s)-\tau(\xi))(\xi-s)^{-r-1}ds.\end{aligned}$$

Функция $\tau(\xi)$, как непрерывная на отрезке $[0;1]$, принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения. Пусть $\tau(\xi)$ принимает наибольшее положительное значение в точке $0<\xi_0<1$. Положим в последнем равенстве $\xi=\xi_0$. В силу того что $0<\frac{1}{(2)_n}<\frac{1}{n!}$, $0<\frac{1}{(2-r)_n}<1$ и $0<\frac{1}{2-r+2n}<1$, получаем

$$\tau(\xi_0)\xi_0^{-r}\Big[1-\frac{r\lambda}{4(1-r)}\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2)_n(2-r)_n(2-r+2n)}\Big(\frac{\lambda}{4}\xi^2\Big)^n\Big]>\tau(\xi_0)\xi_0^{-r}\Big[1-\frac{r\lambda}{4(1-r)}\exp\Big(\frac{\lambda}{4}\Big)\Big].$$

Из условия леммы следует $1-\frac{r\lambda}{4(1-r)}\exp(\frac{\lambda}{4})\ge 0$. Тогда $Dv_-(\xi_0)>0$. Аналогично доказывается вторая часть утверждения леммы. □

Теорема 2. *Если $f(s)\in C_{[0;s]}$, $\vartheta(x)\in C^1_{[0;1]}$, $0<r\le(1+\frac{\lambda}{4}\exp(\frac{\lambda}{4}))^{-1}$ и существует решение задачи T, то оно единственно.*

Доказательство. Предположим, что существуют два различных решения задачи T: $U_1(x;y)$ и $U_2(x;y)$. Тогда функция $U = U_1 - U_2$ будет решением уравнения (1) с однородными краевыми условиями. Непрерывная функция $U(x;y)$ достигает в $\overline{G}_+$ наибольшего и наименьшего значений. Так как $U|_\Gamma = 0$ и по принципу максимального значения ([1], с. 492) $U(x;y)$ не может достигать наибольшего (наименьшего) значения внутри области G_+, то она достигает их на $y = 0$. Пусть $U(x;0) = \tau(x)$ достигает наибольшего (наименьшего) значения в точке $x_0 \in (0;1)$. Тогда по лемме 1 $v_+(x_0) < 0$ (> 0), по лемме 3 $Dv_-(x_0) > 0$ (< 0). Это противоречит условию сопряжения (2). Значит, функция $U(x;0) = \tau(x)$ не может достигать наибольшего (наименьшего) значений внутри $(0;1)$, т. е. $\tau(x) \equiv \mathrm{const}$. Так как $\tau(0) = \tau(1) = 0$, то $\tau(x) \equiv 0$ на $[0;1]$. Из формулы (8) получаем $U(x;y) \equiv 0$ в $\overline{G}_-$, тогда $Dv_-(x) \equiv 0$ и в силу условия сопряжения (2) $v_+(x) \equiv 0$. Следовательно, $U(x;y) \equiv 0$ в $\overline{G}_+$, а значит, $U_1(x;y) \equiv U_2(x;y)$ в области G. Полученное противоречие завершает доказательство.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. Волкодавов В.Ф., Захаров В.Н. *Таблицы функций Римана и Римана–Адамара для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерных евклидовых пространствах.* – Самара: Самарск. пед. ун-т, 1994. – 31 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.* – М.: Наука, 1965. – 294 с.

Самарский государственный
педагогический университет

Поступила
05.02.2002