ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 4 (539)

УДК 514.763:517.93

В.А. ИГОШИН, Е.К. КИТАЕВА

АФФИННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

В работах [1]–[3] осуществлено пульверизационное (геодезическое, геометрическое) моделирование квазигеодезического потока — обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. С помощью этого моделирования и классификации С. Ли [4] алгебр векторных полей на плоскости в данной работе получены результаты о размерностях алгебр Ли движений одномерных квадратичных квазигеодезических потоков. Под движениями понимаются точечные аффинные инфинитезимальные движения.

1. Пусть M — одномерное многообразие (вещественная прямая R^1 или окружность S^1), а $f = (M, f)$ — квазигеодезический поток (КП) на M, представленный в произвольной карте (u, x) координатным выражением
$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, t, \frac{dx}{dt}\right),$$
где $x \in u \subset M$, $t \in R$. Все объекты, встречающиеся в работе, предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми. С помощью метода геодезического моделирования [1]–[3] и результатов С. Ли [4] по классификации алгебр векторных полей на плоскости исследуется подвижность таких КП.

Ниже изучаются квадратичные одномерные КП f, т.е. такие, правые части координатных выражений которых имеют вид
$$f = -\Gamma(x,t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2B(x,t)\left(\frac{dx}{dt}\right) - A(x,t), \tag{1}$$
где $\Gamma(x,t)$ — коэффициенты некоторой (зависящей от t) аффинной связности на M, B — компонента аффинорного поля, а A — компонента векторного поля на M, также зависящие от t.

Всякий квадратичный КП f определяет в его пространстве событий $\overline{M} = M \times R$ стандартную связность $\overline{\Gamma}(\overline{x}^\delta, \dot{\overline{x}}^\delta)$, которая является аффинной [5]. В этом случае ее коэффициенты $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ не зависят от направления, т. е. $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(\overline{x}^\delta)$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 = \dim \overline{M}$. При этом она определяется формулами [2]
$$\overline{\Gamma}^1_{11} = \Gamma, \quad \overline{\Gamma}^1_{12} = B, \quad \overline{\Gamma}^1_{22} = A, \quad \overline{\Gamma}^2_{11} = \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{22} = 0.$$

В результате вычисления определяем компоненты тензора кривизны КП
$$K^1_{11,1} = K^1_{11,2} = K^1_{22,1} = K^1_{22,2} = K^2_{\alpha\beta,\gamma} = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2),$$
$$K^1_{12,1} = K_1, \quad K^1_{21,1} = -K_1, \quad K^1_{12,2} = K_2, \quad K^1_{21,2} = -K_2,$$
где $K_1 = \partial_2\Gamma - B_1$, $K_2 = \partial_2 B + B^2 - A_{,1}$, а запятая означает ковариантное дифференцирование в связности Γ на M.

Определение 1 ([4]). Векторное поле X в пространстве событий $\overline{M} = M \times R$ КП (M, f) называется *инфинитезимальной точечной симметрией* (или точечным преобразованием) КП (M, f), если определяемая полем X локальная однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов состоит из локальных точечных отображений соответствующих сужений потока (M, f), т.е. из локальных отображений, сохраняющих интегральные кривые этих сужений.

В теории геодезического моделирования это понятие точечной симметрии эквивалентно понятию проективной квазисимметрии потока.

Определение 2 ([2]). *Квазисимметрия* (или проективная квазисимметрия) X КП (M, f) — это векторное поле X на $\overline{M} = M \times R$, являющееся инфинитезимальным проективным преобразованием стандартной связности $\overline{\Gamma}$ КП (M, f).

Определение 3 ([2]). Если инфинитезимальная проективная квазисимметрия X сохраняет аффинный параметр на интегральных кривых этого КП, то X называют *аффинной квазисимметрией.*

Везде далее под симметриями (движениями) будут подразумеваться инфинитезимальные аффинные квазисимметрии.

2. Необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют составляющие X^α бесконечно малого аффинного движения $X = X^\alpha \partial_\alpha$ пространства событий $\overline{M}$ КП (M, f), записываются следующим образом:

$$\underset{X}{L}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = X^\alpha_{,\beta\gamma} - K^\alpha_{\beta\gamma\sigma} X^\sigma = 0, \tag{2}$$

где $\underset{X}{L}$ — знак дифференцирования Ли в направлении поля X, запятая обозначает ковариантное дифференцирование на $\overline{M}$ в стандартной связности $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ КП f, а $K^\alpha_{\beta\gamma\sigma}$ — составляющие тензора кривизны того же КП f.

Условия первой серии интегрируемости уравнения (2) имеют вид $\underset{X}{L} K^\alpha_{\beta\gamma\sigma} = 0$, или подробнее

$$X^\sigma K^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon,\sigma} + X^\tau_{,\sigma} \left[\delta^\sigma_\beta K^\alpha_{\tau\gamma\varepsilon} + \delta^\sigma_\gamma K^\alpha_{\beta\tau\varepsilon} + \delta^\sigma_\varepsilon K^\alpha_{\beta\gamma\tau} - \delta^\alpha_\tau K^\sigma_{\beta\gamma\varepsilon} \right] = 0, \tag{3}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \sigma, \tau = 1, 2$.

Рассмотрим матрицу

$$\left(T^1_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\gamma\varepsilon \end{pmatrix} T^1_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\gamma\varepsilon \end{pmatrix} T^2_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\gamma\varepsilon \end{pmatrix} T^2_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\gamma\varepsilon \end{pmatrix} \right), \tag{4}$$

элементы которой определяются формулами

$$T^\sigma_\tau \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\gamma\varepsilon \end{pmatrix} = \delta^\sigma_\beta K^\alpha_{\tau\gamma\varepsilon} + \delta^\sigma_\gamma K^\alpha_{\beta\tau\varepsilon} + \delta^\sigma_\varepsilon K^\alpha_{\beta\gamma\tau} - \delta^\alpha_\tau K^\sigma_{\beta\gamma\varepsilon}.$$

Матрица (4) является укороченной матрицей системы первой серии условий интегрируемости (3) уравнения (2) относительно четырех неизвестных функций $X^\alpha_{,\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$.

В результате вычислений получаем

$$T^1_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T^1_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = T^1_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = T^1_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= T^1_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = T^1_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = T^1_1 \begin{pmatrix} & 2 & \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = 0$$
$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2),$$

$$T^1_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -K_1, \quad T^1_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = K_1, \quad T^1_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T^1_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$
= T^1_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = T^1_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = T^1_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = T^1_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= T^1_2 \begin{pmatrix} & 2 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T^1_2 \begin{pmatrix} & 2 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = T^1_2 \begin{pmatrix} & 2 & \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = T^1_2 \begin{pmatrix} & 2 & \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0,
$$

$$
T^1_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -K_2, \ \ T^1_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = K_2, \ \ T^1_2 \begin{pmatrix} & 2 & \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = K_1, \ \ T^1_2 \begin{pmatrix} & 2 & \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -K_1,
$$

$$
T^1_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -K_2, \ \ T^1_2 \begin{pmatrix} & 2 & \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = K_2, \ \ T^2_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = K_1, \ \ T^2_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -K_1,
$$

$$
T^2_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T^2_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = T^2_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T^2_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
= T^2_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = T^2_1 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = T^2_1 \begin{pmatrix} & 2 & \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = T^2_2 \begin{pmatrix} & 2 & \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = 0
$$

$$
(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2),
$$

$$
T^2_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -K_1, \ \ T^2_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = K_1, \ \ T^2_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2K_2, \ \ T^2_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2K_2,
$$

$$
T^2_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T^2_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = T^2_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = T^2_2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0.
$$

Таким образом, матрица (4) после транспонирования имеет вид

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & -K_1 & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -K_2 & K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_1 & -K_1 & -K_2 & 0 & K_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_1 & 0 & -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -K_1 & K_1 & 2K_2 & -2K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{5}
$$

Матрицу размеров $a \times b$, состоящую из нулей, обозначим через $O(a \times b)$, где a и b — натуральные числа.

Предположим, что КП (1) имеет ненулевую кривизну. Тогда возможны варианты 1)–3).

1) $K_1 = 0$, $K_2 \neq 0$. Матрица (5) принимает вид

$$
\begin{pmatrix}
\begin{matrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2K_2
\end{matrix} & O(11 \times 4)
\end{pmatrix}.
$$

Ее ранг $\rho = 2$, а размерность r полной алгебры Ли движений потока f равна четырем: $r = n^2 + n - \rho = 2^2 + 2 - 2 = 4$.

2) $K_1 \neq 0$, $K_2 = 0$. Матрица (5) принимает вид

$$
\begin{pmatrix}
\begin{matrix}
K_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_1 \\
0 & K_1 & 0 \\
K_1 & 0 & 0
\end{matrix} & O(13 \times 4)
\end{pmatrix},
$$

$\rho = 3$, $r = 3$.

3) $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$. Матрица (5) принимает вид

$$
\begin{pmatrix}
\begin{matrix}
K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_1 & K_2 \\
0 & K_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_2 & 0 & 0
\end{matrix} & O(11 \times 4)
\end{pmatrix},
$$

$\rho = 4$, $r = 2$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Одномерные квадратичные квазигеодезические потоки ненулевой кривизны не допускают полных алгебр Ли движений размерностей r, отличных от $r = 2, 3, 4$.*

Используем далее известную классификацию С. Ли [4] алгебр векторных полей на плоскости для получения размерностей алгебр инфинитезимальных движений одномерных квадратичных квазигеодезических потоков. В результате решения определяющих уравнений С. Ли $\underset{X}{L}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, или в подробной записи

$$\begin{cases} X^1\partial_1\Gamma + X^2\partial_2\Gamma + \partial_{11}X^1 + 2B\partial_1X^2 + \partial_1X^1\Gamma = 0, \\ X^1\partial_1B + X^2\partial_2B + \partial_{12}X^1 + \partial_1X^2A + \partial_2X^1\Gamma + \partial_2X^2B = 0, \\ X^1\partial_1A + X^2\partial_2A + \partial_{22}X^1 + 2\partial_2X^1B + 2\partial_2X^2A - \partial_1X^1A = 0, \\ \partial_{11}X^2 - \partial_1X^2\Gamma = 0, \\ \partial_{12}X^2 - \partial_1X^2B = 0, \\ \partial_{22}X^2 - \partial_1X^2A = 0, \end{cases}$$

находим коэффициенты Γ, B, A КП (1), а также коэффициенты $K^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ тензора кривизны K этого КП. Ниже приводятся соответствующие решения (для двумерных, трехмерных и четырехмерных алгебр Ли движений КП f).

1) Двумерные алгебры (в круглых скобках записывается базис)

а) $(\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^2})$, $\Gamma = c_1$, $B = c_2$, $A = c_3$, $K^1_{122} = -K^1_{212} = c_2^2 - c_1c_3$, остальные $K^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$=0;

б) $(\partial_2,\ x^2\partial_2)$, $\Gamma = \Gamma(x^1)$, $A = B = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \equiv 0$;

в) $(\partial_2,\ x^1\partial_1 + x^1\partial_2)$, $\Gamma = c_1/x^1$, $B = c_2/x^1$, $K^1_{211} = -K^1_{211} = c_2/(x^1)^2$, $K^1_{122} = -K^1_{212} = c_1 + c_2^2 - c_1c_2/(x^1)^2$.

2) Трехмерные алгебры

а) $(\partial_1,\ 2x^1\partial_1 + x^2\partial_2,\ x^2\partial_1 + x^1x^2\partial_2)$, $\Gamma = 0$, $B = \frac{1}{x^2}$, $A = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

б) $(\partial_1,\ 2x^1\partial_2,\ x^2\partial_2)$, $\Gamma = 0$, $B = 0$, $A = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$=0;

в) $(\partial_1,\ \partial_2,\ x^1\partial_1 + (x^1 + x^2)\partial_2)$, $\Gamma = B = A = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$=0;

г) $(\partial_2,\ x^1\partial_2,\ F(x^1)\partial_2)$, $\Gamma = B = A = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$=0;

д) $(\partial_2,\ x^2\partial_2,\ (x^2)^2\partial_2)$, $B = A = 0$, $\Gamma = \Gamma(x^1)$, $K^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$=0;

е) $(\partial_1,\ \partial_2,\ x^1\partial_1 + cx^2\partial_2,\ c \neq 0, 1)$, $\Gamma = B = A = 0$ (при $c \neq \frac{1}{2}$), $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

ж) $(\partial_1,\ \partial_2,\ x^2\partial_2)$, $B = A = 0$, $\Gamma = c$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

з) $(\partial_1,\ \partial_2,\ x^1\partial_1 + x^2\partial_2)$, $B = A = 0$, $\Gamma = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

и) $(\partial_1,\ \partial_2,\ x^1\partial_2 - x^2\partial_1 + c(x^1\partial_1 + x^2\partial_2))$, $\Gamma = B = A = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

к) $(\partial_1 + ((x^1)^2 - (x^2)^2)\partial_1 + 2x^1x^2\partial_2,\ \partial_2 + 2x^1x^2\partial_1 + ((x^2)^2 - (x^1)^2)\partial_2,\ x^2\partial_1 - x^1\partial_2)$, $\Gamma = B = A = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

л) $(\partial_1 - ((x^1)^2 - (x^2)^2)\partial_1 - 2x^1x^2\partial_2,\ \partial_2 - 2x^1x^2\partial_1 - ((x^2)^2 - (x^1)^2)\partial_2,\ x^2\partial_1 - x^1\partial_2)$, $\Gamma = B = A = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0.

3) Четырехмерные алгебры

а) $(\partial_2,\ x^1\partial_2,\ \partial_1,\ x^1\partial_1 + cx^2\partial_1,\ c \neq 1)$, $A = B = \Gamma = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

б) $(\partial_2,\ x^1\partial_2,\ \partial_1, x^1\partial_1 + (2x^2 + (x^1)^2)\partial_2)$, $\Gamma = A = B = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

в) $(\partial_2,\ x^1\partial_2,\ x^2\partial_2, \partial_1)$, $A = B = \Gamma = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

г) $(\partial_2,\ e^{\alpha x^1}\partial_2,\ x^2\partial_2,\ \partial_1)$, $A = B = \Gamma = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

д) $(\partial_2,\ x^1\partial_2,\ F(x^1)\partial_2,\ x^2\partial_2)$, $A = B = \Gamma = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

е) $(\partial_2,\ x^1\partial_2,\ \partial_1, x^1\partial_1 + x^2\partial_2)$, $A = B = \Gamma = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

ж) $(\partial_2,\ x^1\partial_2,\ F_1(x^1)\partial_2,\ F_2(x^1)\partial_2)$, $A = B = \Gamma = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

з) $(\partial_2,\ x^2\partial_2,\ \partial_1,\ (x^2)^2\partial_2)$, $A = B = 0$, $\Gamma = c$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

и) $(\partial_2,\ x^2\partial_2,\ \partial_1,\ x^1\partial_1)$, $A = B = \Gamma = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0;

к) $(\partial_1,\ \partial_2, x^1\partial_2 - x^2\partial_1,\ x^1\partial_1 + x^2\partial_2)$, $A = B = \Gamma = 0$, $K^{\alpha}_{\beta\lambda\delta}$=0.

Приведенные результаты доказывают следующие две теоремы.

Теорема 2. *Если одномерный квадратичный КП допускает алгебру Ли движений размерности* $r > 2$, *то он является потоком нулевой кривизны и, следовательно, обладает полной 6-мерной алгеброй Ли аффинных движений.*

Теорема 3. *Максимальная размерность алгебры Ли движений одномерных квадратичных КП ненулевой кривизны равна двум. Множество таких потоков разбивается на два аффинно-неэквивалентных класса. Потоки первого класса допускают алгебру Ли движений с базисными операторами* ∂_1 *и* ∂_2, *а потоки второго класса — с базисными операторами* ∂_2 *и* $x^1\partial_1 + x^2\partial_2$. *При этом первый класс представляется (в тех же координатах, что и базисные операторы) потоком с коэффициентами* $\Gamma = c_1$, $B = c_2$, $A = c_3$; *второй класс — потоком с коэффициентами* $\Gamma = c_1/x^1$, $B = c_2/x^1$, $A = c_3/x^1$ (c_1, c_2, c_3 — *произвольные постоянные).*

Замечание 1. Результаты работы могут быть получены на базе работ [6] и [7].

Замечание 2. Аффинная подвижность КП (M, f) большей размерности ($\dim M \geq 3$) исследовалась в предыдущих работах авторов (напр., [5]).

Литература

1. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* I // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 6. – С. 63–71.
2. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* II // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С. 26–32.
3. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* III // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 5. – С. 39–50.
4. Lie S., Engel F. *Theorie der Transformationgruppen.* – New York e. a., 1893. – Bd. 3. – 830 S.
5. Игошин В.А., Китаева Е.К., Коткова Н.В. *Об аффинных симметриях квазигеодезических потоков* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 11. – С. 24–35.
6. Егоров И.П. *Движения в пространствах аффинной связности* // Движения в пространствах аффинной связности – Казань: Изд-во Казанск. ун-та. – 1965. – С. 5–179.
7. Levine J. *Classification of collineations in projectively and affinely connected space of two dimensions* // Annals of math. – 1950. – V. 52. – № 2. – P. 465–477.

Нижегородский государственный университет

Поступила 03.10.2005