

*А.М. ЕЛИЗАРОВ, А.В. ЛАПИН***ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ В ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ****Введение**

Как известно из результатов исследования корректности постановок обратных краевых задач (ОКЗ) теории аналитических функций (см., напр., [1]), во внутренней ОКЗ за счет выбора соответствующей пары функциональных пространств всегда можно добиться корректности по Адамару, а внешние ОКЗ являются условно-корректными. Для последних необходимо обеспечить не только выполнение условий разрешимости, но и попадание решения в множество корректности.

Один из способов регуляризации решений внешних ОКЗ в постановке М.Т. Нужиной заключается в построении их квазирешений [2], позволяющих добиться выполнения условий разрешимости за счет минимальной (в определенном смысле) коррекции краевых условий. К условиям разрешимости относят прежде всего условия замкнутости искомого контура. В качестве дополнительных ограничений можно использовать ряд условий, обеспечивающих определенные свойства получаемого решения. Особенно важен учет таких дополнительных ограничений в случае, когда обратная задача моделирует какой-либо физический процесс. В таких ситуациях названные ограничения, отражая физические свойства искомого решения, становятся по существу условиями разрешимости, а их учет при задании множества корректности становится обязательным.

В выражении через управляющую 2π -периодическую функцию $p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi]$ ($L_2[0, 2\pi]$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[0, 2\pi]$) условия замкнутости искомого контура принимают вид

$$\int_0^{2\pi} p(\gamma) \cos \gamma d\gamma = A_1, \quad \int_0^{2\pi} p(\gamma) \sin \gamma d\gamma = B_1, \quad (1)$$

где A_1 и B_1 — заданные постоянные, в простейшем случае равные нулю, а функция $p(\gamma)$ определяется по краевым условиям задачи.

В обратных краевых задачах аэрогидродинамики (ОКЗА) [3], относящихся к названному выше классу внешних ОКЗ, к условиям разрешимости относят условия замкнутости контура искомого крылового профиля и условие совпадения величин скорости набегающего потока, заданных и определяемых при решении задачи. Первые имеют вид (1). Значения постоянных A_1 и B_1 зависят от выбора нормировки конформного отображения канонической области на искомую. В случае нормировки, указанной ниже в п. 1, имеем $A_1 = -\pi(\varepsilon - 1) \cos \beta$, $B_1 = \pi(\varepsilon - 1) \sin \beta$, где $\varepsilon\pi$ — заданная величина внешнего угла в задней кромке профиля, $\varepsilon \in [1, 2]$, а $\beta \in [0, \pi/2]$ — так называемый теоретический угол атаки, определяемый по начальным данным ОКЗА. Условие

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 03-01-00015, 03-01-96012).

совпадения скоростей набегающего потока записывается в виде

$$\int_0^{2\pi} p(\gamma) d\gamma = 0. \quad (2)$$

Соответствующее квазирешение однозначно определяется как минимум функционала $J(p) = \frac{1}{2} \|p - p_d\|_{L_2}^2$ на выбранном множестве функций $p(\gamma)$ (множестве корректности), удовлетворяющих наряду с другими требованиями ограничениям типа равенств (1) и (2) (функция $p_d(\gamma)$ также определяется по начальным данным краевой задачи).

Таким образом, регуляризация решений внешних ОКЗ в постановке М.Т.Нужина и ОКЗА равносильна классической вариационной задаче — минимизации заданного функционала при ограничениях, а применение вариационных методов позволяет описать соответствующие множества корректности.

С другой стороны, ОКЗ в исходной постановке не предполагают обеспечения каких-либо экстремальных свойств искомого решения. В работе [4], [5] описана схема перехода от ОКЗ к вариационным обратным задачам, когда одно из краевых условий заменяется оптимизационным. В результате получается такой класс краевых задач с неизвестными границами, в которых искомыми являются как аналитическая функция (или в общем случае решение дифференциального уравнения в частных производных), так и сама область G ее определения, причем последняя обладает некоторым экстремальным свойством, а на границе ∂G задается одно краевое условие. Экстремальное свойство G выражается в виде требования максимизации (минимизации) заданного функционала (обычно при дополнительных ограничениях). По своей постановке эти задачи, названные в [3] вариационными ОКЗ, относятся к задачам оптимального проектирования (напр., [6]), а наличие или отсутствие дополнительных ограничений может существенно изменять картину разрешимости задач. Поэтому нужно определить, какие функционалы целесообразно рассматривать и какие дополнительные ограничения нужно привлекать. Из общих соображений ответы на эти вопросы найти затруднительно. Вместе с тем, естественным источником вариационных ОКЗ являются теории, связанные с моделированием природных явлений (напр., течений жидкости или газа). Одной из них является классическая аэрогидродинамика. Постановка соответствующей вариационной ОКЗА приведена ниже.

Таким образом, применение вариационной техники является не только естественным, но и необходимым для исследований разрешимости и построения решений ОКЗ прежде всего вариационных.

Статья имеет следующую структуру.

В п. 1 даны постановки вариационной ОКЗА и соответствующей ей оптимизационной задачи. В п. 2 доказаны теоремы существования и единственности решений вариационных задач. В п. 3 построены конечномерные аппроксимации вариационных задач и исследованы вопросы однозначной разрешимости соответствующих конечномерных оптимизационных задач. П. 4 посвящен построению функций Лагранжа для вариационных задач и (или) их конечномерных аппроксимаций. Доказаны теоремы о существовании седловых точек. В ряде случаев построен явный вид двойственных задач. В п. 5 рассмотрены и исследованы некоторые итерационные методы решения изучаемых задач, основанные как на прямых, так и на двойственных постановках.

Отметим, что вне рамок статьи остались вопросы обоснования сходимости конечномерных аппроксимаций. Соответствующие результаты могут быть получены методами теории аппроксимации вариационных неравенств (см. [7] для случая вариационных неравенств с линейными операторами). Мы ограничились исследованием двух вариационных задач и нескольких классов итерационных методов, хотя предложенные общие подходы и результаты статьи позволяют расширить класс изучаемых задач и методов (см., напр., [8], где исследованы различные итерационные методы для задач условной оптимизации).

1. Вариационная ОКЗА

Приведем постановку задачи и выведем основные соотношения.

Физическая постановка задачи. В плоскости $z = x + iy$ рассмотрим установившееся безотрывное обтекание идеальной несжимаемой жидкостью (ИНЖ) непроницаемого изолированного крылового профиля с контуром, гладким за исключением заостренной задней кромки B ($z = 0$) (рис. 1), внешний угол которой равен $\varepsilon\pi$ ($1 \leq \varepsilon \leq 2$, при $\varepsilon = 1$ имеем всюду гладкий контур), периметр контура профиля $l = 2$. Поток на бесконечности является однородным, направленным горизонтально, его скорость $v_\infty = 1$, а плотность $\rho = 1$. В качестве масштаба длин выберем полу-периметр контура (для реальных профилей он мало отличается от длины их хорды). Требуется определить форму профиля, обеспечивающего максимальное значение коэффициента подъемной силы при условии, что наибольшее значение приведенной скорости на контуре (величины скорости, отнесенной к скорости потока на бесконечности) не превосходит заданной величины $v_{\max} > 1$.

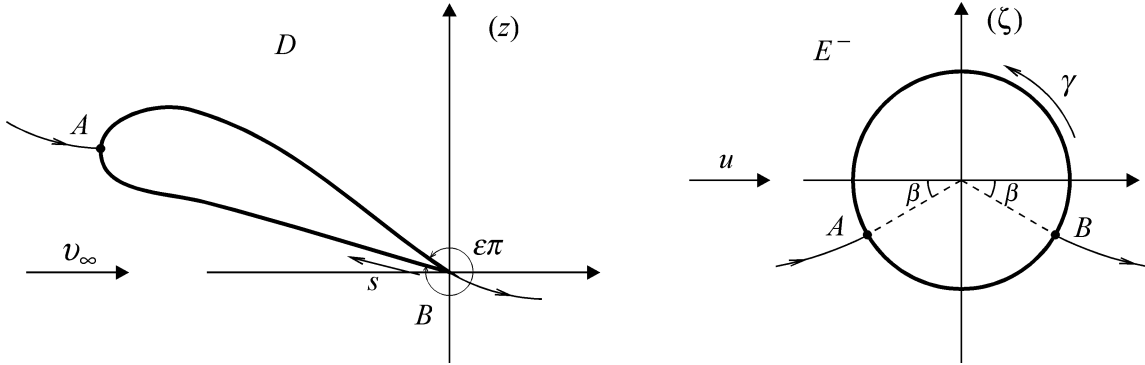


Рис. 1. Класс оптимизируемых контуров

Математическая модель. Запишем основные соотношения, определяющие математическую модель задачи, следуя [3].

В качестве канонической возьмем область $E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ во вспомогательной плоскости комплексного переменного $\zeta = re^{i\gamma}$ (рис. 1). Рассмотрим обтекание единичного круга потоком ИНЖ, вектор скорости которого на бесконечности направлен вдоль оси абсцисс, модуль равен u , а критические точки $B = e^{-i\beta}$ и $A = -e^{i\beta}$ на окружности (в которых скорость обращается в нуль) симметричны относительно вертикальной оси. Комплексная скорость такого течения, как известно, имеет вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = u(1 - e^{-i\beta}/\zeta)(1 + e^{i\beta}/\zeta).$$

Обтекание рассматриваемого профиля в физической плоскости полностью определяется заданием пары — 2π -периодической функции $p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi]$, удовлетворяющей дополнительным условиям гладкости, о которых будет сказано ниже, а также теоретического угла атаки $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Область течения является образом внешности круга E^- при конформном отображении $z_p = z_p(\zeta)$, нормированном условиями $z_p(\infty) = \infty$, $z_p(e^{-i\beta}) = 0$.

Введем аналитическую функцию

$$\chi(\zeta) = \ln \left[v_\infty^{-1} \frac{dw}{dz}(\zeta) \right] - \chi_1(\zeta), \quad \chi_1(\zeta) = \ln \left[u^{-1} \frac{dw}{d\zeta}(\zeta) \right] - (\varepsilon - 1) \ln(1 - e^{-i\beta}/\zeta),$$

которая получается из функции Мичела–Жуковского удалением особенностей с помощью функции $\chi_1(\zeta)$. При этом $\chi(\infty) = 0$ в силу выбранных условий нормировки скорости потока на бесконечности в физической и вспомогательной плоскостях.

Пусть управляющая функция $p(\gamma) = \Re \chi(e^{i\gamma})$ (здесь и далее \Re — обозначение действительной части комплекснозначной функции). Тогда по формуле Шварца

$$\chi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma.$$

Для обеспечения существования сингулярного интеграла потребуем, чтобы $p(\gamma)$ удовлетворяла условию Гёльдера с фиксированными коэффициентом и показателем; такие функции образуют в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ компактное множество U . Далее, в силу нормировки $\chi(\infty) = 0$ управляющая функция $p(\gamma)$ должна удовлетворять дополнительному ограничению (2). При этом $\chi(\zeta) = \ln u - \ln[dz_p/d\zeta] + (\varepsilon - 1) \ln(1 - e^{-i\beta}/\zeta)$, т. е.

$$z'_p(\zeta) = u \exp[-\chi(\zeta)](1 - e^{-i\beta}/\zeta)^{\varepsilon-1}. \quad (3)$$

Отсюда после интегрирования с учетом нормировки $z_p(e^{-i\beta}) = 0$ получим интегральное представление класса отображений $z_p(\zeta)$ в зависимости от управляющей функции $p(\gamma)$ и управляющего параметра β и, следовательно, полное описание класса рассматриваемых контуров, который обозначим через \mathbf{L} . Естественно, принятые ограничения на элементы \mathbf{L} приведут к дополнительным ограничениям на $p(\gamma)$, β и позволят выявить связи между управляющей функцией и управляющим параметром.

Координаты x , y и длина дуги s контура профиля определяются теперь из (3) в параметрической форме как функции параметра $\gamma \in [0, 2\pi]$. В частности,

$$s(\gamma) = \int_{-\beta}^{\gamma} |z'_p(e^{i\gamma})| d\gamma = u \int_{-\beta}^{\gamma} e^{-p(\gamma)} \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{\varepsilon-1} d\gamma. \quad (4)$$

В формуле (4) параметр u определяет масштаб длин в физической плоскости, поэтому величину u определим из условия задания периметра контура:

$$l = s(2\pi - \beta) = u \int_{-\beta}^{2\pi-\beta} e^{-p(\gamma)} \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{\varepsilon-1} d\gamma.$$

Отсюда, учитывая, что по постановке задачи $l = 2$, выведем $u = 2/J_1(p)$, где

$$J_1(p) = \int_0^{2\pi} e^{-p(\gamma)} \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{\varepsilon-1} d\gamma. \quad (5)$$

В последнем интеграле пределы интегрирования сдвинуты на $-\beta$, что не влияет на результат интегрирования, поскольку подинтегральная функция 2π -периодическая.

Поле скоростей обтекания рассматриваемого профиля в физической плоскости z определяет функция

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = e^{\chi(\zeta)} (1 + e^{i\beta}/\zeta) (1 - e^{-i\beta}/\zeta)^{2-\varepsilon}.$$

При этом скорость набегающего потока на бесконечности с учетом (2) и (3), как и предполагалось в постановке задачи, равна $v_\infty = \exp[\chi(\infty)] = 1$. Функция $p(\gamma)$ должна обеспечивать замкнутость контура соответствующего профиля. Поэтому она должна удовлетворять равенствам (1), где $A_1 = -\pi(\varepsilon - 1) \cos \beta$, $B_1 = \pi(\varepsilon - 1) \sin \beta$.

Распределение модуля скорости на контуре профиля в параметрическом виде может быть представлено в виде

$$v(\gamma) = 2 \left| \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \right| \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{2-\varepsilon} e^{p(\gamma)}. \quad (6)$$

Теперь требование ограниченности максимальной приведенной скорости на контуре (скорости, отнесенной к величине скорости на ∞), заданной величиной v_{\max} также может быть выражено через функцию $p(\gamma)$ и параметр β в виде

$$p(\gamma) \leq H(\gamma), \quad (7)$$

$$H(\gamma) = \ln \left[v_{\max} \left| 2(\sin \gamma + \sin \beta) \right|^{-1} \right] + (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|.$$

Величина Y подъемной силы профиля определяется формулой Жуковского $Y = \rho v_{\infty} \Gamma$, где Γ — циркуляция скорости по контуру профиля. Для построения безразмерного коэффициента подъемной силы отнесем Y к величине скоростного напора на бесконечности и длине полупериметра контура:

$$C_y = \frac{\rho v_{\infty} \Gamma}{0,5 \rho v_{\infty}^2 l/2} = 2\Gamma.$$

Здесь учтено, что по постановке задачи $\rho = 1$, $v_{\infty} = 1$, $l = 2$. Выразим Γ через функцию $p(\gamma)$ и параметр β , используя (4) и (6): $\Gamma = 4\pi i \sin \beta$. Окончательно для коэффициента подъемной силы с учетом (5) получим $C_y = 16\pi \sin \beta / J_1(p)$.

Задача P_0 . Требуется найти контур из класса \mathbf{L} , максимизирующий величину C_y при условии, что на контуре максимальное значение скорости потока не превосходит заданной величины $v_{\max} > 1$.

Доказано следующее утверждение о разрешимости задачи P_0 .

Теорема 1 ([9]). Задача P_0 безусловно разрешима, причем имеют место неравенства $\sin \beta^* < \ln v_{\max}$ и $C_y^* < 2 \ln v_{\max}$. Кроме того:

1° при $1 < v_{\max} < 4$ экстремаль отлична от окружности;

2° при $v_{\max} \geq 4$ единственной экстремалью является окружность, $C_y^* \geq v_{\max} - 2$ и $\beta^* \geq \arcsin(v_{\max}/2 - 1)$ при $2 < v_{\max} \leq 4$, $C_y^* = 8$, $\beta^* = \pi/2$ при $v_{\max} \geq 4$, где C_y^* и β^* — соответственно абсолютный максимум C_y и экстремальное значение β .

Зафиксируем теперь величину $\beta = \beta^* > 0$ и рассмотрим соответствующую задачу максимизации коэффициента подъемной силы крылового профиля, используя в качестве управляющей функцию $p(\gamma)$. Это будет частный случай задачи P_0 , когда величина β заранее зафиксирована (назовем его задачей P'_0): при фиксированных $\beta = \beta^* > 0$ и v_{\max} требуется определить 2π -периодическую функцию $p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi]$, удовлетворяющую условиям (1), (2), (7) и доставляющую минимум функционалу (5). В силу теоремы 1 необходимым условием разрешимости последней задачи является неравенство $\sin \beta^* < \ln v_{\max}$. При этом если $v_{\max} > 2$ и $\sin \beta^* \leq v_{\max}/2 - 1$, то единственной экстремалью является окружность. При $v_{\max} > 1$ и $\max\{0, v_{\max}/2 - 1\} < \sin \beta^* < \ln v_{\max}$ экстремаль отлична от окружности.

Исследуем далее задачи минимизации определенных выше функционалов $J(p)$ и $J_1(p)$ при ограничениях (1), (2) и (7).

2. Исследование разрешимости вариационных задач

Определим в $L_2[0, 2\pi]$ аффинное множество

$$K_0 = \left\{ p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : \int_0^{2\pi} p(\gamma) d\gamma = 0, \int_0^{2\pi} p(\gamma) \cos \gamma d\gamma = A_1, \int_0^{2\pi} p(\gamma) \sin \gamma d\gamma = B_1 \right\}$$

и выпуклое замкнутое множество

$$K_1 = \{ p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : p(\gamma) \leq H(\gamma) \text{ для почти всех } \gamma \in [0, 2\pi] \}.$$

Если определить квазирешение ОКЗА как решение задачи на минимум функционала $J(p)$ на множестве K_0 , то, очевидно, свойства выпуклости, замкнутости и непустоты множества K_0 ,

строгой выпуклости и непрерывности функционала $J(p)$ обеспечат существование единственного решения этой задачи. Вместе с тем набор ограничений (1), (2) минимально возможный. Учтем дополнительно ограничение (7), имеющее физический смысл, указанный в п. 1. Построение квазирешения в этом случае сводится к следующей задаче: *найти функцию $p \in K_0 \cap K_1$, доставляющую минимум функционалу*

$$J(p) = \frac{1}{2} \|p - p_d\|_{L_2}^2. \quad (P)$$

Ясно, что $K = K_0 \cap K_1$ — выпуклое замкнутое множество, однако оно не пусто не при всех входных параметрах v_{\max} , A_1 , B_1 и β .

Лемма 1. *Существует такое $v^* \geq 1$, что $K \neq \emptyset$ при $v_{\max} > v^*$; $K = \emptyset$ при $v_{\max} < v^*$; если $v_{\max} > v^* + \delta$, $\delta > 0$, то найдутся постоянная $\eta = \eta(\delta) > 0$ и функция $p_\delta \in K_0$: $p_\delta(\gamma) \leq H(\gamma) - \eta$ при почти всех $\gamma \in [0, 2\pi]$.*

Доказательство. Представим функцию $H(\gamma)$ в виде

$$H(\gamma) = H(\gamma, v_{\max}) = \ln v_{\max} + \tilde{H}(\gamma),$$

$$\tilde{H}(\gamma) = -\ln |2(\sin \gamma + \sin \beta)| + (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|.$$

Непосредственными вычислениями можно установить, что

$$\int_0^{2\pi} \tilde{H}(\gamma) d\gamma = 0, \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{H}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = -\pi(\varepsilon - 1) \cos \beta, \quad \int_0^{2\pi} \tilde{H}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \pi(\varepsilon - 3) \sin \beta.$$

Кроме того, $\tilde{H}(\gamma) \geq c = \text{const}$ при всех $\gamma \in [0, 2\pi]$ (напомним, что $\varepsilon \leq 2$). Функция $\tilde{p}(\gamma) = \pi^{-1} A_1 \cos \gamma + \pi^{-1} B_1 \sin \gamma$ принадлежит K_0 и ограничена. Отсюда следует, что при достаточно больших v_{\max} будет выполнено неравенство $\tilde{p}(\gamma) \leq H(\gamma)$, так что $\tilde{p} \in K_0 \cap K_1$. Из построений также очевидно, что если множество $K_0 \cap K_1 \neq \emptyset$ при некотором v_{\max} , то оно не пусто и при большем значении v_{\max} . С другой стороны, условия $\int_0^{2\pi} p(\gamma) d\gamma = 0$, $p \in K_1$ приводят к необходимому условию непустоты $K_0 \cap K_1$:

$$\int_0^{2\pi} H(\gamma) d\gamma \geq 0. \quad (9)$$

В силу (8) имеем $\int_0^{2\pi} H(\gamma) d\gamma = 2\pi \ln v_{\max}$, и при $0 < v_{\max} < 1$ получим $\int_0^{2\pi} H(\gamma) d\gamma < 0$, что противоречит (9). Таким образом, найдется такое $v^* \geq 1$, что $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ при $v_{\max} < v^*$ и $K_0 \cap K_1 \neq \emptyset$ при $v_{\max} > v^*$.

Пусть теперь $v_{\max} > v^* + \delta$, $\delta > 0$, тогда существует такой элемент $p_\delta \in K_0$, что $p_\delta(\gamma) \leq H(\gamma, v_{\max} - \delta) = H(\gamma, v_{\max}) - (\ln v_{\max} - \ln |v_{\max} - \delta|)$, и последнее утверждение леммы справедливо при $\eta = \ln v_{\max} - \ln |v_{\max} - \delta|$. \square

Замечание 1. Пусть $L_2[0, 2\pi] = V_0 + V_1$ — ортогональное разложение пространства такое, что для $u \in L_2[0, 2\pi]$ справедливо представление $u = u_0 + u_1$, $(u_0, u_1) = \int_0^{2\pi} u_0(\gamma) u_1(\gamma) d\gamma = 0$ и $u_0(\gamma) = (u^0 + u^1 \cos \gamma + u^2 \sin \gamma) \in V_0$ с коэффициентами Фурье u^0 , u^1 , u^2 .

Любую функцию $p \in K_0$ можно представить в виде $p(\gamma) = \tilde{p}(\gamma) + p_1(\gamma)$, где

$$\tilde{p}(\gamma) = (\pi^{-1} A_1 \cos \gamma + \pi^{-1} B_1 \sin \gamma) \in V_0, \quad p_1(\gamma) \in V_1.$$

Ясно, что $K = K_0 \cap K_1 = V_0 \cap K_{11}$, где

$$K_{11} = \{p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : p(\gamma) \leq H(\gamma) - \tilde{p}(\gamma) \text{ для почти всех } \gamma \in [0, 2\pi]\}.$$

Использував новое представление множества K и лемму 1, нетрудно провести анализ чувствительности K к изменению параметров A_1, B_1 и v_{\max} . Например, если $\pi^{-1}|A_1 - \tilde{A}_1| + \pi^{-1}|B_1 - \tilde{B}_1| \leq \delta$, то для множества

$$\tilde{K}_{11} = \{p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : p(\gamma) \leq H(\gamma) - \pi^{-1}\tilde{A}_1 \cos \gamma - \pi^{-1}\tilde{B}_1 \sin \gamma \quad \forall \gamma \in [0, 2\pi]\}.$$

справедливы включения $K_{11}^\delta \subset \tilde{K}_{11} \subset K_{11}^{-\delta}$, где

$$K_{11}^{\pm\delta} = \{p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : p(\gamma) \leq H(\gamma) - \tilde{p}(\gamma) \pm \delta, \quad \gamma \in [0, 2\pi]\}.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $v_{\max} > v^* \exp \delta$, то $V_0 \cap \tilde{K}_{11} \neq \emptyset$.

Следствием леммы 1 и свойств функционала $J(p)$ является

Теорема 2. *При $v_{\max} > v^*$ задача (P) имеет единственное решение, а при $v_{\max} < v^*$ она неразрешима.*

Доказательство. Поскольку функционал $J(p)$ строго выпуклый, непрерывный и коэрцитивный, а множество K выпуклое и замкнутое, однозначная разрешимость задачи (P) определяется непустотой множества K . Теперь доказываемое утверждение непосредственно следует из леммы 1.

Полученный в теореме 2 результат распространяется на задачи минимизации других выпуклых функционалов на множестве $K = K_0 \cap K_1$. Одним из них является функционал вида (5).

При исследовании задачи минимизации функционала $J_1(p)$ на множестве K удобно преобразовать ее к эквивалентной задаче относительно функции $p_0(\gamma) = H(\gamma) - p(\gamma)$. Ограничения на $p_0(\gamma)$ примут вид $p_0(\gamma) \in \tilde{K}_0 \cap \tilde{K}_1$, где

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= \{p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : p(\gamma) \geq 0 \text{ для почти всех } \gamma \in [0, 2\pi]\}, \\ \tilde{K}_0 &= \left\{ p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : \int_0^{2\pi} p(\gamma) d\gamma = \tilde{A}_0, \quad \int_0^{2\pi} p(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \tilde{A}_1, \quad \int_0^{2\pi} p(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \tilde{B}_1 \right\}, \\ \tilde{A}_0 &= \int_0^{2\pi} H(\gamma) d\gamma = 2\pi \ln v_{\max}; \\ \tilde{A}_1 &= \int_0^{2\pi} H(\gamma) \cos \gamma d\gamma - A_1 = 0; \quad \tilde{B}_1 = \int_0^{2\pi} H(\gamma) \sin \gamma d\gamma - B_1 = -2\pi \sin \beta. \end{aligned}$$

Для множества $\tilde{K}_0 \cap \tilde{K}_1$ справедливы утверждения леммы 1, в частности, $\tilde{K}_0 \cap \tilde{K}_1 \neq \emptyset$ при $v_{\max} > v^*$ и $\tilde{K}_0 \cap \tilde{K}_1 = \emptyset$ при $v_{\max} < v^*$. В свою очередь, функционал $J_1(p)$ преобразуется к виду

$$J_1(p_0) = \int_0^{2\pi} e^{p_0(\gamma)} \theta(\gamma) d\gamma, \quad \theta(\gamma) = \left| \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|.$$

Далее опускаем индекс 0 у функции p . Определим на $L_2[0, 2\pi]$ функционал

$$I(p) = \left\{ \int_0^{2\pi} e^{p(\gamma)} \theta(\gamma) d\gamma, \text{ если } e^{p(\gamma)} \theta(\gamma) \in L_1[0, 2\pi]; \quad +\infty \text{ иначе} \right\}. \quad (10)$$

Из результатов [10] следует

Теорема 3. *Функционал $I(p)$, определенный равенством (10), является собственным, выпуклым и полунепрерывным снизу.*

Ясно, что на своей эффективной области $D(I) = \{p \in L_2[0, 2\pi] : I(p) < \infty\}$ функционал $I(p)$ строго выпуклый. Теперь для доказательства однозначной разрешимости задачи

$$p^* = \operatorname{argmin}_{p \in \tilde{K}_0 \cap \tilde{K}_1} I(p) \quad (P_1)$$

остается доказать коэрцитивность функционала $I(p)$.

Заметим, что весовая функция $\theta(\gamma)$ неотрицательна и имеет на $[0, 2\pi]$ нули первого порядка (при $\gamma + \beta = 2k\pi$ и $\gamma - \beta = (2k + 1)\pi$). Отсюда следует сходимость интеграла $\int_0^{2\pi} [\theta(\gamma)]^{-q} d\gamma$ при $q < 1$.

Пусть $p(\gamma) \in L_2[0, 2\pi]$ и $[p(\gamma)]^{2r}\theta(\gamma) \in L_1[0, 2\pi]$ для некоторого $r > 2$. Применив неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [p(\gamma)]^2 d\gamma &\leq \left(\int_0^{2\pi} [p(\gamma)]^{2r} \theta(\gamma) d\gamma \right)^{1/r} \left(\int_0^{2\pi} [\theta(\gamma)]^{-1/(r-1)} d\gamma \right)^{r/(r-1)} \leq \\ &\leq c_1 \left(\int_0^{2\pi} [p(\gamma)]^{2r} \theta(\gamma) d\gamma \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

С другой стороны, если $p \in D(I) \cap \tilde{K}_1$, то

$$\int_0^{2\pi} e^{p(\gamma)} \theta(\gamma) d\gamma \geq c_2 \int_0^{2\pi} [p(\gamma)]^{2r} \theta(\gamma) d\gamma, \quad c_2 = \operatorname{const} > 0,$$

поэтому существует такая постоянная c_0 , что

$$\int_0^{2\pi} e^{p(\gamma)} \theta(\gamma) d\gamma \geq c_0 \|p\|_{L_2}^{2r}, \quad r > 2. \quad (11)$$

Неравенство (11) очевидным образом влечет за собой коэрцитивность $I(p)$: если $\{p_n\} \in D(I) \cap \tilde{K}_1$ и $\|p_n\|_{L_2} \rightarrow \infty$, то $I(p_n) \rightarrow +\infty$.

Установленные свойства функционала $I(p)$ и лемма 1 позволяют доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. *При $v_{\max} > v^*$ задача (P_1) имеет единственное решение p^* , а при $v_{\max} < v^*$ она неразрешима.*

3. Конечномерные аппроксимации

Пусть V_h — конечномерная аппроксимация пространства $L_2[0, 2\pi]$, $h > 0$ — параметр. В качестве такой аппроксимации далее выберем пространство кусочно-постоянных функций на равномерной сетке шага $h = 2\pi/N$ ($n > 3$) на отрезке $[0, 2\pi]$. Определим множество $K_{0,h} = K_0 \cap V_h$ и множество $K_{1,h} = \{p_h \in V_h : p_h(\gamma) \leq H_h(\gamma) \forall \gamma \in [0, 2\pi]\}$. Здесь H_h — кусочно-постоянная функция, равная $H_i = (1/h) \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} H(\gamma) d\gamma$ на промежутке (γ_{i-1}, γ_i) . Ясно, что при таком определении H_h множество $K_{1,h} = \{p_h \in V_h : p_i \leq H_i \text{ для всех } i = 1, \dots, N\}$, где p_i — значение p_h на промежутке (γ_{i-1}, γ_i) . В то же время, в терминах ограничений на вектор $p = (p_1, \dots, p_N)^T$ множество $K_{0,h} = \{p : Bp = b\}$ с вектором $b = (0, A_1, B_1)^T$ и $3 \times n$ -матрицей B ранга 3, элементы которой определены равенствами: $b_{1j} = h$, $b_{2j} = \int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} \cos \gamma d\gamma$, $b_{3j} = \int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} \sin \gamma d\gamma$. Далее для векторов узловых параметров функций p_h , q_h обозначим через $\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^N p_i q_i$ скалярное произведение в R^N и через $|p| = \langle p, p \rangle^{1/2}$ — норму.

Для множества $K_h = K_{0,h} \cap K_{1,h}$ справедлива

Лемма 2. Существует такое $v_h^* \geq 1$, что при $v_{\max} > v_h^*$ множество K_h не пусто; при $v_{\max} < v_h^*$ множество K_h пусто; если $v_{\max} > v_h^* + \delta$, $\delta > 0$, то найдутся постоянная $\eta = \eta(\delta) > 0$ и функция $p_\delta \in K_{0,h}$, для которых $p_\delta(\gamma) \leq H_h(\gamma) - \eta$ при $\gamma \in [0, 2\pi]$.

Доказательство. Представим функцию $H_h(\gamma)$ в виде $H_h(\gamma) = \ln v_{\max} + \widetilde{H}_h(\gamma)$. Ясно, что $\widetilde{H}_h(\gamma) \geq c = \text{const}$ при всех $\gamma \in [0, 2\pi]$. Из построения функции H_h следует также, что $\int_0^{2\pi} \widetilde{H}_h(\gamma) d\gamma = \int_0^{2\pi} \widetilde{H}(\gamma) d\gamma = 0$. Выберем произвольную функцию $p_h \in K_{0,h}$, тогда при достаточно больших v_{\max} будет выполнено неравенство $p_h(\gamma) \leq H_h(\gamma)$, так что $p_h \in K_{0,h} \cap K_{1,h}$. С другой стороны, необходимое условие непустоты K_h

$$\int_0^{2\pi} H_h(\gamma) d\gamma \geq \int_0^{2\pi} p_h(\gamma) d\gamma = 0$$

приводит к ограничению $v_h^* \geq 1$. Дальнейшее доказательство почти дословно совпадает с доказательством леммы 1.

Замечание 2. Последнее утверждение леммы 2 означает, что при $v_{\max} > v_h^*$ выполняется условие Слейтера.

Рассмотрим конечномерную аппроксимацию задачи (P) :

$$p_h = \underset{q_h \in K_h}{\operatorname{argmin}} \{ J_h(q) = \frac{1}{2} \|q_h - p_{d,h}\|^2 \}, \quad (P_h)$$

где $p_{d,h}$ — V_h -аппроксимация p_d . Задача (P_h) — задача квадратичного программирования, отсюда и из леммы 2 следует

Теорема 5. При $v_{\max} > v_h^*$ задача (P_h) имеет единственное решение, а при $v_{\max} < v_h^*$ она неразрешима.

Перейдем к построению конечномерной аппроксимации задачи (P_1) . Пусть пространство V_h определено, как и ранее, $\widetilde{K}_{1,h} = \widetilde{K}_1 \cap V_h$, а множество

$$\widetilde{K}_{0,h} = \left\{ p_h \in V_h : \int_0^{2\pi} p_h(\gamma) d\gamma = \widetilde{A}_{0,h}, \int_0^{2\pi} p_h(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \widetilde{A}_{1,h}, \int_0^{2\pi} p_h(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \widetilde{B}_{1,h} \right\},$$

где

$$\widetilde{A}_{0,h} = \int_0^{2\pi} H_h(\gamma) d\gamma, \quad \widetilde{A}_{1,h} = \int_0^{2\pi} H_h(\gamma) \cos \gamma d\gamma - A_1, \quad \widetilde{B}_{1,h} = \int_0^{2\pi} H_h(\gamma) \sin \gamma d\gamma - B_1.$$

В данном случае $\widetilde{K}_{1,h} = \{p \in V_h : p_i \geq 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, N\}$, а множество $\widetilde{K}_{0,h}$ снова имеет вид $\widetilde{K}_{0,h} = \{p : Bp = \widetilde{b}\}$ с вектором $\widetilde{b} = (\widetilde{A}_{0,h}, \widetilde{A}_{1,h}, \widetilde{B}_{1,h})^T$ и матрицей B , определенной выше.

Для множества $\widetilde{K}_h = \widetilde{K}_{0,h} \cap \widetilde{K}_{1,h}$ справедлив аналог леммы 2, так как по построению $p_h \in \widetilde{K}_{0,h} \Leftrightarrow H_h - p_h \in K_{0,h}$, $p_h \in \widetilde{K}_{1,h} \Leftrightarrow H_h - p_h \in K_{1,h}$ с множествами $K_{0,h}$ и $K_{1,h}$, определенными в задаче (P_h) .

Рассмотрим конечномерную аппроксимацию задачи (P_1) :

$$p_h = \underset{q_h \in \widetilde{K}_h}{\operatorname{argmin}} \left\{ J_{1,h}(q_h) = \int_0^{2\pi} e^{q_h(\gamma)} \theta_h(\gamma) d\gamma \right\}, \quad (P_{1,h})$$

где θ_h — V_h -аппроксимация θ , построенная аналогично тому, как это было сделано для функции H . Функционал $J_{1,h}(p)$ выпуклый, непрерывный и коэрцитивный на \widetilde{K}_h . Вместе с леммой 2 это дает следующий результат.

Теорема 6. При $v_{\max} > v_h^*$ задача $(P_{1,h})$ имеет единственное решение, а при $v_{\max} < v_h^*$ она неразрешима.

4. Функции Лагранжа и двойственные задачи

Функция Лагранжа и двойственная задача для (P). Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(p, \lambda) = J(p) + \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma)[p(\gamma) - H(\gamma)]d\gamma \quad (12)$$

и будем искать ее седловую точку $(p, \lambda) \in K_0 \times L_2^+[0, 2\pi]$:

$$L(p, \eta) \leq L(p, \lambda) \leq L(q, \lambda) \quad \forall q \in K_0, \quad \forall \eta \in L_2^+[0, 2\pi]. \quad (13)$$

Здесь $L_2^+[0, 2\pi]$ — конус неотрицательных функций из $L_2[0, 2\pi]$.

Теорема 7. Пусть выполнено условие $v_{\max} > v^*$, где v^* определено в лемме 1. Тогда $p \in K_0$ является решением задачи (P) в том и только том случае, когда существует функция $\lambda \in L_2^+[0, 2\pi]$ такая, что (p, λ) есть седловая точка L, т. е. выполнено (13).

Доказательство. Используем общую теорию существования седловой точки функции Лагранжа (см. [11], глава 3). Нетрудно видеть, что функция (12) выпукла и непрерывна по p и аффинна по λ . Кроме того, $L(p, 0) = J(p) \rightarrow +\infty$ при $\|p\| = \|p\|_{L_2} \rightarrow \infty$. Остается установить, что

$$\liminf_{p \in K_0} L(p, \lambda) = -\infty \quad \text{при} \quad \|\lambda\| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in L_2^+[0, 2\pi].$$

Для любой функции $p \in K_0$ справедливо представление $p = \tilde{p} + p_1$, $p_1 \in V_1$, где $\tilde{p}(\gamma) = \pi^{-1}A_1 \cos \gamma + \pi^{-1}B_1 \sin \gamma$ и $L_2[0, 2\pi] = V_0 + V_1$ — ортогональное разложение $L_2[0, 2\pi]$ (см. замечание 1). Отсюда следует

$$\begin{aligned} \inf_{p \in K_0} L(p, \lambda) &= \inf_{p_1 \in V_1} L(\tilde{p} + p_1, \lambda) = (1/2)\|\tilde{p} - p_{d,0}\|^2 + (1/2)\|p_1 - p_{d,1}\|^2 + \\ &\quad + (\lambda_0, \tilde{p} - H_0) + (\lambda_1, p_1 - H_1). \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями найдем $p_1 = -\lambda_1 + p_{d,1}$, где $p_{d,1}$ — ортогональная проекция p_d на подпространство V_1 . Таким образом, функция

$$p(\lambda) = \arg \min_{p \in K_0} L(p, \lambda) \quad (14)$$

определена равенством $p(\lambda) = \tilde{p} - \lambda_1 + p_{d,1}$ и

$$L(p(\lambda), \lambda) = -(1/2)\|\lambda_1\|^2 + (\lambda_1, p_{d,1} - H_1) + (\lambda_0, \tilde{p} - H_0) + (1/2)\|\tilde{p} - p_{d,0}\|^2.$$

Пусть функция $p_\delta(\gamma) \in K_0$ такова, что (см. лемму 1) $p_\delta(\gamma) < H(\gamma) - \eta$, $\eta > 0$, при почти всех $\gamma \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\begin{aligned} L(p(\lambda), \lambda) &= -(1/2)\|\lambda_1\|^2 + (\lambda_1, p_{d,1} - H_1) + (\lambda_0, p_\delta - H) + (1/2)\|\tilde{p} - p_{d,0}\|^2 = \\ &= -(1/2)\|\lambda_1\|^2 + (\lambda_1, p_d - p_\delta) + (\lambda, p_\delta - H) + (1/2)\|\tilde{p} - p_{d,0}\|_{L_2}^2 \leq \\ &\leq -\alpha\|\lambda_1\|^2 + c\|p_d - p_\delta\|_{L_2}^2 + (1/2)\|\tilde{p} - p_{d,0}\|^2 - \eta \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma)d\gamma = \\ &= -\alpha\|\lambda_1\|^2 - \eta \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma)d\gamma + c \leq -\min\{\alpha, \eta\} \left(\|\lambda_1\|^2 + \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma)d\gamma \right) + c \end{aligned} \quad (15)$$

с положительными постоянными α, η, c , не зависящими от λ .

Предположим теперь, что $\{\lambda^{(n)}\} \in L_2^+[0, 2\pi]$ и $\|\lambda^{(n)}\| \rightarrow \infty$. Докажем, что

$$\|\lambda_1^{(n)}\|^2 + \int_0^{2\pi} \lambda^{(n)}(\gamma)d\gamma \rightarrow +\infty.$$

Допустим противное, т. е. существование подпоследовательности (сохраним за ней обозначение $\{\lambda^{(n)}\}$) такой, что

$$\|\lambda_1^{(n)}\|^2 + \int_0^{2\pi} \lambda^{(n)}(\gamma) d\gamma \leq c \quad \forall n. \quad (16)$$

Это, в частности, означает равномерную по n ограниченность первых коэффициентов Фурье функций $\lambda^{(n)}$. Но

$$\left| \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) \cos \gamma d\gamma \right| \leq \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) d\gamma, \quad \left| \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) \sin \gamma d\gamma \right| \leq \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) d\gamma$$

для $\lambda(\gamma) \geq 0$, поэтому второй и третий коэффициенты Фурье функций $\lambda^{(n)}$ также ограничены. Отсюда следует $\|\lambda_0^{(n)}\| \leq c \quad \forall n$, что вместе с (16) приводит к неравенству $\|\lambda^{(n)}\| \leq c$, противоречащему условию. Итак, при $\|\lambda^{(n)}\| \rightarrow \infty$ имеем $\|\lambda_1^{(n)}\|^2 + \int_0^{2\pi} \lambda^{(n)}(\gamma) d\gamma \rightarrow +\infty$, и в силу (15) $L(p(\lambda^{(n)}), \lambda^{(n)}) \rightarrow -\infty$. \square

Двойственной к (P) является задача

$$\lambda = \operatorname{argmax}_{\lambda \in L_2^+} \psi(\lambda), \quad (17)$$

где $\psi(\lambda) = L(p(\lambda), \lambda)$ и $p(\lambda)$ — решение задачи (14). Как установлено при доказательстве теоремы 6,

$$L(p(\lambda), \lambda) = -(1/2)\|\lambda_1\|^2 + (\lambda_1, p_{d,1} - H_1) + (\lambda_0, \tilde{p} - H_0) + (1/2)\|\tilde{p} - p_{d,0}\|^2.$$

Проведя несложные преобразования, получим следующий вид двойственной функции:

$$\psi(\lambda) = -(1/2)\|\lambda_1\|^2 + (\lambda, p_{d,1} + \tilde{p} - H) + (1/2)\|\tilde{p} - p_{d,0}\|^2. \quad (18)$$

Функция Лагранжа и двойственная задача для (P_h) . Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L_h(p_h, \lambda_h) = J_h(p_h) + \int_0^{2\pi} \lambda_h(\gamma)[p_h(\gamma) - H_h(\gamma)] d\gamma$$

и будем искать ее седловую точку $(p_h, \lambda_h) \in K_{0,h} \times V_h^+$, где V_h^+ — конус неотрицательных функций из V_h .

Теорема 8. Пусть выполнено условие $v_{\max} > v_h^*$, где v_h^* определено в лемме 2. Тогда $p_h \in K_{0,h}$ является решением задачи (P_h) в том и только том случае, когда существует функция $\lambda_h \in V_h^+$ такая, что (p_h, λ_h) есть седловая точка L_h .

Доказательство. Ясно, что функция Лагранжа $L_h(p, \lambda)$ выпукла и непрерывна по p_h и аффинна по λ_h , а также $L_h(p_h, 0) = J_h(p_h) \rightarrow +\infty$ при $\|p_h\| \rightarrow \infty$. Кроме того, выполнено условие Слейтера (см. замечание 2). Из ([11], гл. III, предложение 5.1) следует доказываемый результат.

Пусть

$$p_h(\lambda_h) = \operatorname{argmin}_{p_h \in K_{0,h}} L_h(p_h, \lambda_h)$$

для произвольной функции $\lambda_h \in V_h$. Тогда вектор узловых параметров $p(\lambda)$ функции $p_h(\lambda_h)$ является решением задачи

$$p(\lambda) = \operatorname{argmin}_{B_{p=b}} [\|p - p_d\|^2/2 + \langle \lambda, p - H \rangle]. \quad (19)$$

Решение задачи (19) можно выписать в явном виде. Именно, пусть $S = E - B^T(BB^T)^{-1}B$, где E — единичная $N \times N$ матрица, $b' = B^T(BB^T)^{-1}b \in R^N$. Тогда

$$p(\lambda) = b' + Sp_d - S\lambda. \quad (20)$$

Матрица $S = S^T$ является проектором на $\text{Ker } B$. Определим двойственную функцию

$$\Psi(\lambda) = |p(\lambda) - p_d|^2/2 + \langle \lambda, p(\lambda) - H \rangle. \quad (21)$$

Подставив выражение для $p(\lambda)$ из (20) в равенство (21) и проведя несложные выкладки, получим

$$\Psi(\lambda) = -|S\lambda|^2/2 + \langle \lambda, (E - S)b' + Sp_d - H \rangle + |b' + (S - E)p_d|^2/2. \quad (22)$$

Функция Лагранжа для задачи $(P_{1,h})$. Возьмем ее в виде

$$L_{1,h}(p_h, \lambda_h) = J_{1,h}(p_h) - \int_0^{2\pi} \lambda_h p_h d\gamma,$$

т. е. снова снимем с помощью множителей Лагранжа ограничения-неравенства.

Теорема 9. Пусть выполнено условие $v_{\max} > v_h^*$. Тогда $p_h \in \widetilde{K}_{0,h}$ является решением задачи $(P_{1,h})$ в том и только том случае, когда существует функция λ_h такая, что $(p_h, \lambda_h) \in \widetilde{K}_{0,h} \times V_h^+$ есть седловая точка $L_{1,h}$.

Доказательство. Ясно, что функция Лагранжа $L_{1,h}(p_h, \lambda_h)$ выпукла и непрерывна по p_h и аффинна по λ_h . Кроме того, выполнено условие Слейтера. Осталось доказать, что $L_{1,h}(p_h^n, 0) \rightarrow +\infty$ при $p_h^n \in \widetilde{K}_{0,h}$, $\|p_h^n\| \rightarrow \infty$.

Зафиксируем элемент $p_{0,h} \in \widetilde{K}_{0,h}$, тогда $q_h^n = p_h^n - p_{0,h}$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} q_h^n d\gamma = 0 \quad (23)$$

и $\|q_h^n\| \rightarrow \infty$. В силу конечномерности пространства V_h имеем $\int_0^{2\pi} |q_h^n| d\gamma \rightarrow +\infty$, а условие (23)

обеспечивает выполнение соотношения $\int_0^{2\pi} (q_h^n)^+ d\gamma \rightarrow +\infty$. Отметим, что по построению $\theta_h(\gamma) \geq \theta_0 > 0$ при всех $\gamma \in [0, 2\pi]$, откуда следует $e^{p_{0,h}} \theta_h(\gamma) \geq \alpha > 0$ для всех $\gamma \in [0, 2\pi]$,

Теперь нетрудно провести следующие оценки:

$$L_{1,h}(p_h^n, 0) = J_{1,h}(p_h^n) \geq \alpha \int_0^{2\pi} e^{q_h^n} d\gamma \geq \alpha \left(\int_0^{2\pi} e^{(q_h^n)^+} d\gamma - 2\pi \right) \geq \alpha \left(\int_0^{2\pi} (q_h^n)^+ d\gamma - 2\pi \right),$$

поэтому $L_{1,h}(p_h^n, 0) \rightarrow +\infty$. \square

Замечание 3. Наряду с рассмотренными функциями Лагранжа, в которых с помощью множителей Лагранжа снимаются ограничения-неравенства, можно строить функции Лагранжа, снимая, например, все ограничения. Соответствующие функции Лагранжа, записанные для векторов узловых параметров функций из V_h , имеют вид

$$\mathcal{L}(p, \lambda, \mu) = |p - p_d|^2/2 + \langle \lambda, p - H \rangle - \sum_{i=1}^3 \mu_i (Bp - b)_i \quad (24)$$

для задачи (P_h) и

$$\mathcal{L}_1(p, \lambda, \mu) = \langle \theta e^p, 1 \rangle - \langle \lambda, p \rangle - \sum_{i=1}^3 \mu_i (Bp - b)_i \quad (25)$$

для задачи $(P_{1,h})$. В (25) под θ понимается диагональная матрица $\theta = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_N)$, а под $e^p = \text{diag}(e_1^p, \dots, e^{p_N})$ — диагональный оператор в R^N .

Поскольку функции $|p - p_d|^2/2$ и $\langle \theta e^p, 1 \rangle$ выпуклы и непрерывно дифференцируемы по p , а все ограничения линейны, из известных результатов [8] следуют приведенные ниже утверждения.

Утверждение 1. Пусть p — решение задачи (P_h) , тогда существует вектор $(\lambda, \mu) \in R_+^N \times R^3$ такой, что

$$\begin{aligned} p - p_d + \lambda - B^T \mu &= 0, \\ Bp - b &= 0, \\ p - H &\ll 0, \quad \langle p - H, \lambda \rangle = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Обратно, если вектор $(p, \lambda, \mu) \in R^N \times R_+^N \times R^3$ удовлетворяет соотношениям (26), то p — решение задачи (P_h) .

Утверждение 2. Пусть p — решение задачи $(P_{1,h})$, тогда существует вектор $(\lambda, \mu) \in R_+^N \times R^3$ такой, что

$$\begin{aligned} \theta e^p - \lambda - B^T \mu &= 0, \\ Bp - \tilde{b} &= 0, \\ p &\gg 0, \quad \langle p, \lambda \rangle = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Обратно, если вектор $(p, \lambda, \mu) \in R^N \times R_+^N \times R^3$ удовлетворяет соотношениям (27), то p — решение задачи $(P_{1,h})$.

Задачи с так называемыми седловыми операторами (26) и (27) могут быть использованы для построения итерационных алгоритмов. Мы, однако, ограничиваемся исследованием итерационных алгоритмов, построенных по функциям Лагранжа L , L_h и $L_{1,h}$.

5. Итерационные алгоритмы

Используя результаты пп. 3, 4, можно предложить различные итерационные методы решения задач (P) , (P_1) и их конечномерных аппроксимаций, основанные как на прямых, так и на двойственных постановках. Ниже рассмотрено несколько таких методов, обоснована их сходимость и обсуждены вопросы реализации.

Алгоритм Удзавы. Рассмотрим сначала задачу (P) . Алгоритм Удзавы отыскания седловой точки функции Лагранжа (12) имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} &\in L_2^+[0, 2\pi]; \quad \lambda^{n+1} = \text{Pr}_{L_2^+} \{ \lambda^n + \rho_n (p^n - H) \}, \\ p^n &= \underset{p \in K_0}{\text{argmin}} L(p, \lambda^n). \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь $\text{Pr}_{L_2^+}$ — проекция в $L_2[0, 2\pi]$ на $L_2^+[0, 2\pi]$, $\rho_n > 0$ — итерационный параметр.

При выполнении условия $v_{\max} > v^*$, т.е. при существовании седловой точки функции Лагранжа, итерационный алгоритм (28) сходится, начиная с любого начального приближения, если $\rho_n \in [\nu, 2 - \nu] \forall \nu > 0$: $\|p^n - p\|_{L_2} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Доказательство следует из ([7], гл. 2, теорема 4.1).

Легко видеть, что λ^{n+1} определяется прямыми вычислениями

$$\lambda^{n+1}(\gamma) = (\lambda^n + \rho_n (p^n - H))^+(\gamma) \quad \text{для почти всех } \gamma.$$

Также нетрудно получить формулы для вычисления $p^n(\gamma)$. Действительно, как следует из доказательства теоремы 3,

$$p^n = \tilde{p} + (p_d - \lambda^n)_1 = \tilde{p} + p_d - \lambda^n - (p_d - \lambda^n)_0,$$

а $(p_d - \lambda^n)_0$ — первые три члена разложения в ряд Фурье функции $p_d - \lambda^n$.

Отметим, что при фактической реализации алгоритма (28) мы должны использовать приближенные вычисления, в частности, квадратурные формулы при вычислении интегралов, и аппроксимировать функции p и λ некоторыми их конечномерными приближениями. В итоге получим алгоритм Удзавы с неточной реализацией итерационных шагов, который требует дополнительного обоснования. Этого недостатка лишен алгоритм Удзавы для конечномерной задачи (P_h) , каждый шаг которого может быть реализован точно.

Алгоритм Удзавы для задачи (P_h) имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_h^0 &\in V_h^+; \quad \lambda_h^{n+1} = \text{Pr}_{V_h^+} \{ \lambda_h^n + \rho_n (p_h^n - H_h) \}, \\ p_h^n &= \underset{p_h \in K_{0,h}}{\text{argmin}} L(p_h, \lambda_h^n). \end{aligned} \quad (29)$$

Итерационный алгоритм (29) сходится, начиная с любого начального приближения, если $\rho_n \in [\nu, 2 - \nu] \forall \nu > 0$. Реализация одного шага метода (29) состоит в вычислении вектора узловых параметров λ^{n+1} по формуле

$$\lambda_i^{n+1} = (\lambda_i^n + \rho_n (p_i^n - H_i))^+ \quad \text{для всех } i = 1, \dots, N \quad (30)$$

и в вычислении вектора p^n , для чего требуется решить задачу квадратичного программирования $(1/2) \min_{Bp=p} |p - p_d|^2 + \langle \lambda^n, p - H \rangle$. Как уже было отмечено ранее (см. (20)), решение этой задачи можно выписать в явном виде: $p^n = B^T b' + S(p_d - \lambda^n)$.

Построим и исследуем теперь метод Удзавы для задачи $(P_{1,h})$. Вместо функции Лагранжа $L_{1,h}(p_h, \lambda_h) = J_{1,h}(p_h) - \int_0^{2\pi} \lambda_h p_h d\gamma$ используем модифицированную функцию

$$\mathcal{L}_{1,h}(p_h, \lambda_h) = J_{1,h}(p_h) + r \int_0^{2\pi} (p_h^-)^2 d\gamma - \int_0^{2\pi} \lambda_h p_h d\gamma, \quad r = \text{const} > 0.$$

Функция $\mathcal{L}_{1,h}$ имеет те же седловые точки, что и $L_{1,h}$, при этом функция $J_r(p_h) = J_{1,h}(p_h) + \int_0^{2\pi} (p_h^-)^2 d\gamma$ коэрцитивна на всем пространстве V_h , и ее градиент равномерно монотонный

$$\langle J_r'(p_h) - J_r'(q_h), p_h - q_h \rangle \geq \min\{\theta_0, r\} \|p_h - q_h\|^2 \quad \forall p_h, q_h \in V_h.$$

В силу этих свойств алгоритм Удзавы

$$\begin{aligned} \lambda_h^0 &\in V_h^+; \quad \lambda_h^{n+1} = \text{Pr}_{V_h^+} \{ \lambda_h^n - \rho_n p_h^n \}, \\ p_h^n &= \underset{p_h \in \tilde{K}_{0,h}}{\text{argmin}} \mathcal{L}(p_h, \lambda_h^n) \end{aligned} \quad (31)$$

сходится при выборе итерационных параметров $\rho_n \in (\nu, \min\{\theta_0, r\} - \nu)$, $\nu > 0$.

При реализации (31) решение задачи $p_h^n = \underset{p_h \in \tilde{K}_{0,h}}{\text{argmin}} \mathcal{L}(p_h, \lambda_h^n)$ сводится к минимизации выпуклой дифференцируемой функции

$$\mathcal{J}(p) = \sum_{i=1}^N [e_i^p \theta_i + r(p_i^+)^2 - \lambda_i^n p_i] \quad (32)$$

на аффинном множестве $Bp = \tilde{b}$. Задачу (32) можно решать различными известными методами дифференцируемой оптимизации. В том числе, можно в очередной раз использовать методы двойственности, отыскивая седловую точку на $V_h \times R^3$ функции Лагранжа $\mathcal{J}(p) + \sum_{i=1}^3 \mu_i (Bp - \tilde{b})_i$.

“Прямое” решение двойственных задач. В силу дифференцируемости функции ψ задача (18) эквивалентна вариационному неравенству $(\lambda_1 + (p_{d,1} + \tilde{p} - H), \mu - \lambda) \geq 0 \forall \mu \in L_2^+[0, 2\pi]$ или уравнению

$$\lambda = \text{Pr}_{L_2^+}(\lambda_0 + p_{d,1} + \tilde{p} - H). \quad (33)$$

Уравнение (33) можно записать в поточечном виде

$$\lambda(\gamma) = (\lambda_0 + p_{d,1} + \tilde{p} - H)^+ \text{ для почти всех } \gamma \in [0, 2\pi],$$

откуда, в частности, следует, что, найдя компоненту λ_0 множителя Лагранжа λ , можно построить λ и затем решение задачи (P)

$$p^*(\gamma) = (\tilde{p} - (\lambda - \lambda_0) + p_{d,1})(\gamma) \text{ для почти всех } \gamma \in [0, 2\pi].$$

Для отыскания λ_0 преобразуем уравнение (33), применив к обеим его частям оператор Pr_{V_0} ортогонального в L_2 проектирования на подпространство V_0 . Будем иметь

$$\lambda_0 = \text{Pr}_{V_0} \text{Pr}_{L_2^+}(\lambda_0 + p_{d,1} + \tilde{p} - H). \quad (34)$$

Ясно, что (34) — система нелинейных уравнений относительно трех первых коэффициентов Фурье-разложения функции λ , которую нетрудно записать в явном виде для численного решения. С другой стороны, это уравнение с нестягивающим оператором $F = \text{Pr}_{V_0} \circ \text{Pr}_{L_2^+}$ в V_0 . Уравнение (34) имеет хотя бы одно решение (ортогональная проекция на V_0 второй компоненты λ седловой точки функции Лагранжа). Докажем, что оператор F обладает свойством обратной сильной монотонности

$$\|F\lambda_0 - F\mu_0\| \leq (F\lambda_0 - F\mu_0, \lambda_0 - \mu_0) \quad \forall F\lambda_0, \mu_0 \in V_0.$$

Для этого воспользуемся тем, что Pr_{V_0} — линейный ортогональный проектор, а оператор $\text{Pr}_{L_2^+}$ обладает свойством обратной сильной монотонности как проектор на выпуклое замкнутое множество. Будем иметь

$$\begin{aligned} \|F\lambda_0 - F\mu_0\| &\leq \|\text{Pr}_{L_2^+} \lambda_0 - \text{Pr}_{L_2^+} \mu_0\| \leq (\text{Pr}_{L_2^+} \lambda_0 - \text{Pr}_{L_2^+} \mu_0, \lambda_0 - \mu_0) = \\ &= (\text{Pr}_{L_2^+} \lambda_0 - \text{Pr}_{L_2^+} \mu_0, \text{Pr}_{V_0}(\lambda_0 - \mu_0)) = (\text{Pr}_{V_0} \text{Pr}_{L_2^+} \lambda_0 - \text{Pr}_{V_0} \text{Pr}_{L_2^+} \mu_0, \lambda_0 - \mu_0) = \\ &= (F\lambda_0 - F\mu_0, \lambda_0 - \mu_0). \end{aligned}$$

Поскольку оператор F обратно сильно монотонный и уравнение (34) имеет хотя бы одно решение, итерации

$$\lambda_0^{n+1} = (1 - \omega)\lambda_0^n + \omega \text{Pr}_{V_0} \text{Pr}_{L_2^+}(\lambda_0^n + p_{d,1} + \tilde{p} - H), \quad \omega \in (0, 2),$$

сходятся [12], начиная с любого начального приближения, к какому-либо решению уравнения (34).

Подобный предыдущему алгоритм можно применить и для решения конечномерной двойственной задачи

$$\lambda = \underset{\mu \gg 0}{\text{argmax}} \Psi(\mu), \quad (35)$$

где функция $\Psi(\mu)$ задана равенством (22), а неравенство $\mu \gg 0$ означает $\mu_i \geq 0 \forall i$. Действительно, используя свойство дифференцируемости Ψ , из (35) получим

$$(S\lambda, \mu - \lambda) \geq ((E - S)b' - Sp_d + H, \mu - \lambda) \quad \forall \mu \gg 0,$$

откуда

$$\lambda = ((E - S)b' - Sp_d + H + (E - S)\lambda)^+. \quad (36)$$

Умножив обе части уравнения (36) на матрицу $E - S$ — проектор на $\text{Im } B^T$, получим уравнение для вектора $y = (E - S)\lambda \in R^3$ (аналог (34))

$$y = (E - S)((E - S)b' - Sp_d + H + y)^+.$$

Аналогично предыдущему случаю можно доказать сходимость итерационного алгоритма

$$y^{n+1} = (1 - \omega)y^n + \omega(E - S)((E - S)b' - Sp_d + H + y^k)^+, \quad \omega \in (0, 2). \quad (37)$$

Ясно, что по найденному $y = (E - S)\lambda \in R^3$ вектор λ восстанавливается по формуле (36), после чего решение задачи (P_h) определяется по формуле $p = b' + Sp_d - S\lambda$ (см. (20)).

Замечание 4. Уравнение (36), а значит, и итерационный алгоритм (37) можно построить, исходя из седловой задачи (26).

Методы расщепления для прямых задач (P_h) и $(P_{1,h})$. Запишем задачу (P_h) в виде уравнения (включения) с многозначным максимально монотонным оператором

$$Tp_h \equiv p_h - p_d + \partial I_{K_h}(p_h) \ni 0, \quad (38)$$

где ∂I_{K_h} — субдифференциал индикаторной функции множества K_h , т. е. $I_{K_h}(p) = \{0 \text{ при } p \in K_h, +\infty \text{ при } p \notin K_h\}$. Пусть, кроме того, $\partial I_{K_{0,h}}$ и $\partial I_{K_{1,h}}$ — субдифференциалы индикаторных функций множеств $K_{0,h}$ и $K_{1,h}$ соответственно, $Sp_h = p_h - p_{d,h} + \partial I_{K_{0,h}}(p_h)$, $R = \partial I_{K_{1,h}}$. Известно, что области определений $D(S) = K_{0,h}$ и $D(R) = K_{1,h}$. Согласно лемме 2 при $v_{\max} > v_h^*$ не пусто множество $\text{int } K_{1,h} \cap K_{0,h} = \text{int } D(S) \cap D(R)$, откуда следует [10], что $T = R + S$. Это позволяет применить методы расщепления [13] к решению уравнения (38).

Пусть I — тождественное отображение в пространстве V_h , $J_R^r = (I + rR)^{-1}$, $r = \text{const} > 0$, — резольвента максимально монотонного оператора R , однозначный и нерастягивающий оператор. Итерационный метод типа метода Дугласа–Рэкфорда для уравнения (38) имеет вид

$$t_h^{n+1} = J_R^r(2J_S^r - I)t_h^n + (I - J_S^r)t_h^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (39)$$

Поскольку операторы R и S максимально монотонны и, кроме того, S — равномерно монотонный, то при любом $r > 0$ итерационный процесс (39) сходится с любого начального приближения, при этом если t_h^* — предел последовательности t_h^k , то $p_h^* = J_S^r t_h^*$ — решение задачи (P_h) .

Реализация (39) состоит в последовательном применении к известным функциям операторов J_R^r и J_S^r , что, в свою очередь, сводится к процедурам проектирования в V_h на $K_{0,h}$ и $K_{1,h}$. Именно $y_h = J_R^r x_h$ означает, что $y_h = \text{Pr}_{K_{1,h}} x_h$, а $y_h = J_S^r x_h$ означает, что $y_h = \text{Pr}_{K_{0,h}}((1 + r)^{-1}x_h + k(1 + r)^{-1}p_{d,h})$. Таким образом, алгоритм (39) принимает вид

$$\begin{aligned} t_h^{n+1/2} &= \text{Pr}_{K_{0,h}}((1 + r)^{-1}t_h^n + r(1 + r)^{-1}p_{d,h}), \\ t_h^{n+1} &= t_h^n - t_h^{n+1/2} + \text{Pr}_{K_{1,h}}(2t_h^{n+1/2} - t_h^n). \end{aligned}$$

Операции проектирования на множества $K_{0,h}$ и $K_{1,h}$ легко реализуемы. Действительно, проектирование на $K_{0,h}$ есть задача квадратичного программирования с ограничениями вида $Bp = b$, решение которой выписывается в явном виде (ср. с (20)), а проектирование на $K_{1,h}$ осуществляется поточечно (ср. с (30)).

Применим итерационный метод расщепления к задаче $(P_{1,h})$. Запишем ее в виде включения

$$Tp_h \equiv e^{p_h} \theta_h + \partial I_{\tilde{K}_h}(p_h) \ni 0, \quad (40)$$

и пусть $Sp_h = e^{p_h} \theta_h + \partial I_{\tilde{K}_{0,h}}(p_h)$, $R = \partial I_{\tilde{K}_{1,h}}$. Как и выше, убедимся в том, что $\text{int } D(S) \cap D(R) \neq \emptyset$, поэтому $T = R + S$.

Итерационный метод типа метода Дугласа–Рэкфорда для уравнения (40) имеет вид (39) и сходится.

Остановимся на вопросе реализации алгоритма (39). Ясно, что решение уравнения $y_h = J_R^r x_h$ снова сводится к задаче квадратичного программирования с ограничениями вида $Bp = \tilde{b}$,

решение которой выписывается в явном виде (ср. с (20)). Что касается уравнения $y_h = J_S^r x_h$, то оно эквивалентно вариационному неравенству

$$y_h \geq 0 : (y_h + r e^{y_h} \theta_h - x_h, z_h - y_h) \geq 0 \quad \forall z_h \geq 0,$$

которое расщепляется на N независимых одномерных задач относительно узловых параметров y_i функции y_h

$$y_i \geq 0, \quad y_i + r e^{y_i} \theta_i - x_i \geq 0, \quad y_i (y_i + r e^{y_i} \theta_i - x_i) = 0. \quad (41)$$

Задача (41) решается следующим образом:

если $r \theta_i > x_i$, то $y_i = 0$,

иначе $y_i > 0$ является решением скалярного уравнения $y_i + r e^{y_i} \theta_i = x_i$ со строго монотонной дифференцируемой функцией $y_i + r e^{y_i}$, и можно применить, например, метод Ньютона.

Литература

1. Аксентьев Л.А., Журбенко Л.Н. *Вопросы корректности в обратных краевых задачах* // Тр. семин. по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1979. – Вып. 16. – С. 15–28.
2. Елизаров А.М. *О квазирешениях внешней обратной краевой задачи* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 10. – С. 42–50.
3. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики: теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей*. – М.: Физматлит, 1994. – 436 с.
4. Аксентьев Л.А. *Об однолистной разрешимости обратных краевых задач* // Тр. семин. по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1973. – Вып. 10. – С. 11–24.
5. Аксентьев Л.А. *Об однолистной разрешимости обратных краевых задач* // Тр. семин. по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1974. – Вып. 11. – С. 9–18.
6. Haslinger J., Neittaanmaki P. *Finite element approximation for optimal shape design: theory and application*. – John Wiley and Sons: New York, 1988. – 335p.
7. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. *Численное исследование вариационных неравенств*. – М.: Мир, 1979. – 576 с.
8. Бертсекас Д. *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа*. – М.: Радио и связь, 1987. – 400 с.
9. Елизаров А.М., Фокин Д.А. *Вариационные обратные краевые задачи аэрогидродинамики* // Докл. РАН. – 2001. – Т. 377. – № 6. – С. 758–763.
10. Barbu V. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*. – Stythoff & Noordhoff, 1976. – 352 p.
11. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*. – М.: Мир, 1979. – 400 с.
12. Gabay D. *Application of the method of multipliers to variational inequalities* // Augmented Lagrangian Methods: Appl. Numer. Solution of Boundary Value Problems. – Amsterdam: North Holland, 1983. – P. 299–331.
13. Lions P.L., Mercier B. *Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators* // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – V. 16. № 6. – P. 964–979.

Казанский государственный
университет

Поступила
11.11.2003