ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 8 (507)

УДК 517.968:519.642

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВНУТРЕННИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Введение

Значительное число теоретических и практических задач приводит к необходимости решения следующего двумерного сингулярного интегрального уравнения (с. и. у.) с внутренними коэффициентами:

$$A\varphi \equiv a_0(s,\sigma)\varphi(s,\sigma) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_1(s,\sigma;\xi)\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}\varphi(\xi,\sigma)d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_2(s,\sigma;\eta)\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}\varphi(s,\eta)d\eta + \\ + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a_{12}(s,\sigma;\xi,\eta)\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}\varphi(\xi,\eta)d\xi\, d\eta = f(s,\sigma), \quad -\infty < s,\sigma < \infty. \tag{0.1}$$

Здесь $a_0(s,\sigma)$, $a_1(s,\sigma;\xi)$, $a_2(s,\sigma;\eta)$, $a_{12}(s,\sigma;\xi,\eta)$ — известные непрерывные 2π-периодические функции[1] по каждой из переменных, $f(s,\sigma)$ и $\varphi(s,\sigma) \in L_2[0,2\pi]^2 \equiv L_2$ — данная и искомая функции соответственно, причем сингулярные интегралы

$$S_1(a_1\varphi) = S_1(a_1\varphi;s,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_1(s,\sigma;\xi)\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}\varphi(\xi,\sigma)d\xi, \tag{0.2}$$

$$S_2(a_2\varphi) = S_2(a_2\varphi;s,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_2(s,\sigma;\eta)\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}\varphi(s,\eta)d\eta, \tag{0.3}$$

$$S_{12}(a_{12}\varphi) = S_{12}(a_{12}\varphi;s,\sigma) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a_{12}(s,\sigma;\xi,\eta)\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}\varphi(\xi,\eta)d\xi\, d\eta \tag{0.4}$$

понимаются в смысле главного значения по Коши–Лебегу [1]–[3].

Теория уравнений вида (0.1), в том числе аппроксимативных методов их решения, весьма сложна и все еще далека от своего завершения. Ниже, в продолжение ряда результатов [4]–[8], приводятся простые достаточные условия существования, единственности и устойчивости решений уравнения (0.1), а также предлагаются практически эффективные (в том числе оптимальные) аппроксимативные методы его решения. Ради простоты выкладок все функции и пространства считаем (без ограничения общности) вещественными. Отметим также, что некоторые результаты работы анонсированы в ([9]; [10], гл. 4, § 4).

---

[1]Они таковы, что оператор A из (0.1) ограничен в $L_2[0,2\pi]^2$. Для этого достаточно, чтобы функции a_i $(i=1,2,12)$ были непрерывны по Гёльдеру; если же $a_1(s,\sigma;\xi) = b_1(s,\sigma)c_1(\xi)$, $a_2(s,\sigma;\eta) = b_2(s,\sigma)c_2(\eta)$ и $a_{12}(s,\sigma;\xi,\eta) = b_{12}(s,\sigma)c_{12}(\xi,\eta)$, то достаточно, чтобы функции b_i и c_i $(i=1,2,12)$ были непрерывными в своих областях определения.

1. Основные результаты

1.1. *Теорема существования и единственности решения.* В следующей теореме устанавливается существование, единственность и устойчивость решения уравнения (0.1).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $|a_0(s,\sigma)| \geqslant \alpha = \mathrm{const} > 0$, $a_1(s,\sigma;\xi) = a_1(\xi,\sigma;s)$, $a_2(s,\sigma;\eta) = a_2(s,\eta;\sigma)$, $a_{12}(s,\sigma;\xi,\eta) = -a_{12}(\xi,\eta;s,\sigma)$.

Тогда оператор $A : L_2 \to L_2$ *непрерывно обратим и*

$$\|A^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1} < \infty,$$

а уравнение (0.1) *имеет единственное решение* $\varphi^*(s,\sigma) \in L_2$ *при любой правой части* $f(s,\sigma) \in L_2$, *которое устойчиво относительно малых возмущений* $f(s,\sigma)$ *в пространстве* L_2 (*и тем более в пространстве* $C[0,2\pi]^2$).

Доказательство. Обозначим через $L_2 \equiv L_2[0,2\pi]^2$ пространство квадратично суммируемых в $[0,2\pi;0,2\pi] \equiv [0,2\pi]^2$ по Лебегу функций с обычными скалярным произведением и нормой соответственно

$$(f,g) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s,\sigma)g(s,\sigma)ds\,d\sigma \qquad (f,g \in L_2),$$

$$\|f\| = \left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(s,\sigma)|^2 ds\,d\sigma\right\}^{1/2} \qquad (f \in L_2).$$

Через $C = C[0,2\pi]^2$ будем обозначать пространство непрерывных 2π-периодических по каждой из переменных функций от двух переменных с обычной нормой

$$\|g\|_{C[0,2\pi]^2} = \max_{-\infty < s,\sigma < \infty} |g(s,\sigma)| \quad (g \in C[0,2\pi]^2).$$

Тогда с. и. у. (0.1) эквивалентно заданному в L_2 линейному операторному уравнению

$$A\varphi \equiv S_0(a_0\varphi) + S_1(a_1\varphi) + S_2(a_2\varphi) + S_{12}(a_{12}\varphi) = f \quad (\varphi, f \in L_2), \tag{1.1}$$

где $S_0(a_0\varphi) = a_0(s,\sigma)\varphi(s,\sigma)$, причем $A \equiv S_0a_0 + S_1a_1 + S_2a_2 + S_{12}a_{12} : L_2 \to L_2$ есть непрерывный оператор:

$$\|A\|_{L_2\to L_2} \leqslant \sum_{i=0,1,2,12} \|S_ia_i\|_{L_2\to L_2} \leqslant M = \mathrm{const} < \infty.$$

Далее без ограничения общности будем считать, что $a_0(s,\sigma) > 0$; случай $a_0(s,\sigma) < 0$ рассматривается аналогично.

Очевидно, для любой функции $\varphi \in L_2$ имеем

$$(S_0(a_0\varphi),\varphi) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a_0(s,\sigma)|\varphi(s,\sigma)|^2 ds\,d\sigma \geqslant \alpha\|\varphi\|^2. \tag{1.2}$$

В силу условий на функции a_i $(i = 1,2,12)$ и свойств ядер Гильберта для любой функции $\varphi \in L_2$ находим

$$K_i \equiv (S_i(a_i\varphi),\varphi) = 0 \quad (i = 1,2,12). \tag{1.3}$$

Действительно, для интеграла (0.2) имеем

$$K_1 \equiv (S_1(a_1\varphi),\varphi) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s,\sigma)ds\,d\sigma\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_1(s,\sigma;\xi)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\xi-s}{2}\varphi(\xi,\sigma)d\xi =$$
$$= \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}d\sigma\int_0^{2\pi}\varphi(\xi,\sigma)d\xi\int_0^{2\pi} a_1(\xi,\sigma;s)\,\mathrm{ctg}\,\frac{s-\xi}{2}\varphi(s,\sigma)ds =$$
$$= \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}d\sigma\int_0^{2\pi}\varphi(s,\sigma)ds\int_0^{2\pi} a_1(s,\sigma;\xi)\Big[-\mathrm{ctg}\,\frac{\xi-s}{2}\Big]\varphi(\xi,\sigma)d\xi = -K_1,$$

поэтому $K_1 = 0$. Аналогично для интеграла (0.3) получаем $K_2 = (S_2(a_2\varphi), \varphi) = 0$ для любой $\varphi \in L_2$. С учетом свойств функций a_{12} и ядер Гильберта для интеграла (0.4) при любых $\varphi \in L_2$ находим

$$K_{12} \equiv (S_{12}(a_{12}\varphi), \varphi) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(s,\sigma)ds\, d\sigma \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a_{12}(s,\sigma;\xi,\eta)\operatorname{ctg}\frac{\xi - s}{2}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}\varphi(\xi,\eta)d\xi\, d\eta =$$
$$= \frac{1}{16\pi^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\xi,\eta)d\xi\, d\eta \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a_{12}(\xi,\eta;s,\sigma)\operatorname{ctg}\frac{s-\xi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\eta}{2}\varphi(s,\sigma)ds\, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{16\pi^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(s,\sigma)ds\, d\sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [-a_{12}(s,\sigma;\xi,\eta)]\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}\varphi(\xi,\eta)d\xi\, d\eta = -K_{12},$$

следовательно, $K_{12} = 0$.

Из соотношений (1.1)–(1.3) находим неравенство

$$(A\varphi, \varphi) \geqslant \alpha\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in L_2. \tag{1.4}$$

Аналогично для оператора $A^* : L_2 \to L_2$, сопряженного к оператору $A : L_2 \to L_2$ в пространстве L_2, имеем

$$(A^*\varphi, \varphi) = (\varphi, A\varphi) = (A\varphi, \varphi) \geqslant \alpha\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in L_2. \tag{1.5}$$

Из соотношений (1.4) и (1.5) находим соответственно неравенства

$$\|A\varphi\| \geqslant \alpha\|\varphi\|, \quad \|A^*\varphi\| \geqslant \alpha\|\varphi\|, \quad \varphi \in L_2,$$

обеспечивающие [11] существование левых ограниченных обратных операторов A_l^{-1} и $(A^*)_l^{-1}$ соответственно

$$\|A_l^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1} < \infty \quad \text{и} \quad \|(A^*)_l^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1} < \infty.$$

Отсюда, в свою очередь, следует [11] существование и ограниченность двустороннего обратного оператора $A^{-1} : L_2 \to L_2$ и справедливость необходимых для него неравенств.

Остальные утверждения теоремы легко выводятся из сказанного выше. □

1.2. *Итерационный метод.* В следующей теореме устанавливается возможность решения уравнения (0.1) итерационным методом.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *решение* $\varphi^* \in L_2$ *уравнения* (0.1) *при любой правой части* $f \in L_2$ *может быть найдено с помощью линейного универсального итерационного метода*

$$\varphi^k = \varphi^{k-1} + \alpha\|A\|^{-2}(f - A\varphi^{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.6}$$

при любом начальном приближении $\varphi^0 \in L_2$. *Погрешность* k*-го приближения может быть оценена в пространстве* L_2 *неравенствами*

$$\|\varphi^* - \varphi^k\| \leqslant q^k\|\varphi^* - \varphi^0\| \leqslant q^k(1-q)^{-1}\|\varphi^1 - \varphi^0\| \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1.7}$$

где $q = (1 - \alpha^2\|A\|^{-2})^{1/2} < 1$; *если же начальное приближение выбирается по формуле* $\varphi^0 = \alpha\|A\|^{-2}f$, *то и неравенствами*

$$\|\varphi^* - \varphi^k\| \leqslant q^{k+1}(1-q)^{-1}\alpha\|A\|^{-2}\|f\|, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Уравнение (0.1) эквивалентно заданному в L_2 линейному операторному уравнению второго рода вида

$$\varphi = (E - \tau A)\varphi + \tau f, \quad \tau = \frac{\alpha}{\|A\|^2}, \quad \varphi \in L_2, \tag{1.9}$$

где оператор перехода $B = E - \tau A$ является сжимающим оператором с коэффициентом сжатия $q = (1 - \alpha/\|A\|^2)^{1/2} < 1$. С другой стороны, универсальный итерационный метод (1.6) для уравнения (0.1) является методом простой итерации для эквивалентного ему уравнения (1.9). Поэтому утверждения теоремы, в том числе оценки (1.7) и (1.8), легко выводятся из известных результатов (напр., [11], с. 213–214; [12], сс. 104, 131) по итерационным методам решения операторных уравнений второго рода в полных линейных нормированных пространствах. □

1.3. *Общий проекционный метод и его частные случаи.* Обозначим через $\{\psi_r = \psi_r(s,\sigma)\}_1^\infty$ полную ортонормальную систему функций в L_2, а через $c_r(f) = (f, \psi_r)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$ по указанной системе. Приближения $\varphi_N = \varphi_N(s,\sigma)$ к решению $\varphi^* = \varphi^*(s,\sigma)$ уравнения (0.1) будем искать в виде обобщенного "полинома"

$$\varphi_N(s,\sigma) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, \psi_k(s,\sigma), \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{1.10}$$

неизвестные коэффициенты $\alpha_k = \alpha_{k,N}$ которого будем определять из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, c_r(A\psi_k) = c_r(f), \quad r = \overline{1,N}. \tag{1.11}$$

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *СЛАУ* (1.11) *однозначно разрешима при любых* $N = 1, 2, \ldots,$ *а приближенные решения* (1.10) *сходятся к решению уравнения* (0.1) *в пространстве* L_2*, причем для погрешности справедливы двусторонние оценки*

$$E_N(\varphi^*) \leqslant \|\varphi^* - \varphi_N\| \leqslant \alpha^{-1}\|A\| E_N(\varphi^*), \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{1.12}$$

где $E_N(g)$ *— наилучшее приближение функции* $g \in L_2$ *всевозможными элементами вида* (1.10) *в пространстве* $L_2 = L_2[0, 2\pi]^2$.

Доказательство. Пусть $X = L_2 = L_2[0, 2\pi]^2$, а $X_N = \{\varphi_N\}$ — его N-мерное подпространство, состоящее из всевозможных элементов вида (1.10). Тогда СЛАУ (1.11) эквивалентна операторному уравнению

$$A_N\varphi_N \equiv P_N A\varphi_N = P_N f \quad (\varphi_N, P_N f \in X_N), \tag{1.13}$$

где оператор проектирования $P_N : X \to X_N$ определяется по формуле

$$P_N(g; s, \sigma) = \sum_{r=1}^{N} c_r(g)\psi_r(s,\sigma), \quad g \in L_2. \tag{1.14}$$

Нетрудно видеть, что

$$P_N^2 = P_N, \quad P_N^* = P_N, \quad \|P_N\|_{X \to X_N \subset X} = 1, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Поэтому в силу (1.4), (1.13) и (1.14) для любых $\varphi_N \in X_N$ находим

$$(A_N\varphi_N, \varphi_N) = (P_N A\varphi_N, \varphi_N) = (A\varphi_N, P_N^*\varphi_N) = (A\varphi_N, P_N\varphi_N) = (A\varphi_N, \varphi_N) \geqslant \alpha\|\varphi_N\|^2. \tag{1.16}$$

Отсюда следует неравенство

$$\|A_N\varphi_N\| \geqslant \alpha\|\varphi_N\|, \quad \varphi_N \in X_N, \tag{1.17}$$

обеспечивающее (напр., [13], гл. I, § 2) двустороннюю обратимость оператора $A_N : X_N \to X_N$ при любых $N \in \mathbb{N}$ и справедливость оценки

$$\|A_N^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1} < \infty, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

Поэтому как уравнение (1.13), так и эквивалентная ему СЛАУ (1.11) однозначно разрешимы при любых натуральных N и любых правых частях, причем приближенное решение (1.10) в силу (1.15)–(1.18) удовлетворяет неравенствам

$$\|\varphi_N\| = \|A_N^{-1} P_N f\| \leqslant \alpha^{-1} \|P_N f\| \leqslant \alpha^{-1} \|f\|, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Для решений $\varphi^* = A^{-1} f$ и $\varphi_N = A_N^{-1} P_N f$ уравнений соответственно (1.1) и (1.13) из теоремы 6 ([13], гл. I) следует тождество

$$\varphi^* - \varphi_N = (E - A_N^{-1} P_N A)(\varphi^* - \overline{\varphi}_N), \tag{1.19}$$

где E — единичный оператор, а $\overline{\varphi}_N$ — произвольный элемент из X_N. Полагая $\overline{\varphi}_N = P_N \varphi^*$, из (1.15) и (1.19) находим неравенство

$$\|\varphi^* - \varphi_N\|_X \leqslant \|E - A_N^{-1} P_N A\|_{X \to X} E_N(\varphi^*), \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1.20}$$

Поскольку для любых $N \in \mathbb{N}$

$$(E - A_N^{-1} P_N A)^2 = E - A_N^{-1} P_N A, \tag{1.21}$$

то с помощью соотношений (1.15) и (1.18) можно доказать

$$\|E - A_N^{-1} P_N A\| = \|A_N^{-1} P_N A\| \leqslant \alpha^{-1} \|A\|, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

Из (1.20) и (1.22) следуют оценки (1.12). Так как в условиях теоремы $E_N(g) \to 0$, $N \to \infty$, для любой функции $g \in X$, то сходимость метода доказана. □

На практике большое значение имеет выбор координатной системы функций $\{\psi_r(s,\sigma)\}$. Дадим несколько способов такого выбора, которые приводят к конкретным проекционным методам решения с. и. у. (0.1).

1.3.1. *Метод редукции (Галёркина).* Пусть $N = (2n+1)(2m+1)$, где n и $m = 0, 1, \ldots$, а $\psi_r = \psi_r(s,\sigma) = e^{i(ks+j\sigma)} \equiv \psi_{kj}(s,\sigma)$, $r = \overline{1,N}$, $k = \overline{-n,n}$, $j = \overline{-m,m}$, $i^2 = -1$. Тогда

$$\varphi_N(s,\sigma) = \sum_{r=1}^{N} \alpha_r \, \psi_r(s,\sigma) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-m}^{m} \beta_{kj} \, e^{i(ks+j\sigma)},$$

где α_r, β_{kj} — неизвестные коэффициенты.

Очевидно, что в этом случае имеем дело с *методом редукции (Галёркина)* решения с. и. у. (0.1), СЛАУ которого имеет вид

$$\sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-m}^{m} \beta_{kj} c_{rl}(A\psi_{kj}) = c_{rl}(f), \quad r = \overline{-n,n}, \quad l = \overline{-m,m},$$

где

$$c_{rl}(g) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s,\sigma) e^{-i(rs+l\sigma)} ds \, d\sigma, \quad g \in L_2.$$

1.3.2. *Метод сплайн-подобластей.* Рассмотрим случай $\psi_r = \psi_{r,N}(s,\sigma)$, $r = \overline{1,N}$, $N = 1, 2, \ldots$, где последовательность подпространств $X_N = \mathcal{L}(\{\psi_{k,N}\}_1^N)$, натянутых на элементы $\psi_1, \ldots, \psi_N$, предельно плотна в пространстве L_2. За $\psi_r = \psi_{r,N}(s,\sigma)$ возьмем характеристические функции областей $\Delta_r = \Delta_{r,N} \subset [0,2\pi]^2$, $r = \overline{1,N}$, $N = 1, 2, \ldots$, где плоская мера $\operatorname{mes}(\Delta_k \cap \Delta_j) = 0$ для любых k, $j = \overline{1,N}$, $k \neq j$, $\bigcup\limits_{r=1}^{N} \Delta_r = [0,2\pi]^2$, причем

$$\lim_{N \to \infty} \max_{1 \leq j \leq N} \operatorname{mes} \Delta_{j,N} = 0.$$

В частном случае $N = nm$ положим $\psi_{r,N}(s,\sigma) = \psi_{k,n}(s)\psi_{j,m}(\sigma)$, $r = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, где $\psi_{k,n}(s)$ и $\psi_{j,m}(\sigma)$ — характеристические функции интервалов соответственно $(s_{k-1}, s_k]$, $k = \overline{1,n}$, и $(\sigma_{i-1}, \sigma_i]$, $i = \overline{1,m}$, а

$$s_j = \frac{2j\pi}{n}, \quad j = \overline{0,n}; \qquad \sigma_l = \frac{2l\pi}{m}, \quad l = \overline{0,m} \quad (n,m = 1,2,\dots). \tag{1.23}$$

Очевидно, что в этом случае имеем дело с *методом сплайн-подобластей нулевого порядка* решения бисингулярного интегрального уравнения (0.1).

Заметим также, что в обоих частных случаях сходимость и оценки погрешности указанных конкретных методов следуют из общей теоремы 3.

Теорема 3, в том числе оценки (1.12), показывают, что рассматриваемый в ней метод является *оптимальным по порядку* ([13], гл. II) среди всевозможных прямых и проекционных методов, позволяющих построить приближенное решение с. и. у. (0.1) в виде обобщенного "полинома" (1.10). Если же уравнения (1.1) и (1.13) таковы, что

$$\|E - A_N^{-1} P_N A\|_{X \to X} \to 1, \quad N \to \infty, \tag{1.24}$$

то исследуемый метод будет *асимптотически оптимальным* ([13], гл. II); если же

$$\|E - A_N^{-1} P_N A\|_{X \to X} = 1, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{1.25}$$

то указанный метод будет *оптимальным* ([13], гл. II). Однако следует отметить, что условие (1.25) выполняется лишь при очень жестких ограничениях на коэффициенты уравнения (0.1), т. к. в силу соотношения (1.21) в общем случае имеем $\|E - A_N^{-1} P_N A\| \geqslant 1$ для любых $N \in \mathbb{N}$. Тем не менее класс уравнений (0.1), удовлетворяющих условию (1.25), не пуст; например, это условие выполняется в любом из следующих случаев:

1) $a_k = \mathrm{const}$ $(k = 0, 1, 2, 12)$, $a_0 \neq 0$.
2) $a_0 = \mathrm{const} \neq 0$, $a_1 = a_1(s - \xi)$, $a_2 = a_2(\sigma - \eta)$, $a_{12} = a_{12}(s - \xi, \sigma - \eta)$, где $a_1(t), a_2(\tau), a_{12}(t,\tau)$ — непрерывные 2π-периодические функции своих аргументов.

Ясно, что множество уравнений вида (0.1), удовлетворяющих условию (1.24), тем более не пусто.

Поясним сказанное на примере метода редукции из п. 1.3.1. Сначала рассмотрим случай 1). Поскольку здесь

$$A_N \varphi_N \equiv P_N A \varphi_N = A \varphi_N = P_N f \quad (\varphi_N, P_N f \in X_N),$$

то справедливы тождества

$$A_N^{-1} P_N A(\varphi^* - P_N \varphi^*) = (A^{-1} P_N - P_N A^{-1}) f = (A^{-1} P_N A - P_N) A^{-1} f = A^{-1}(P_N - A P_N A^{-1}) f,$$

где φ^* и φ_N — соответственно точное и приближенное решения с. и. у. (0.1).

Для любой функции $g \in L_2$ имеем

$$g(s,\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{kr}(g) e^{i(ks + r\sigma)}, \quad P_N(g; s, \sigma) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{r=-m}^{m} c_{kr}(g) e^{i(ks + r\sigma)},$$

где $N = (2n+1)(2m+1)$. Поэтому с. и. у. (0.1) эквивалентно уравнению

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{kr}(\varphi) G_{kr} e^{i(ks + r\sigma)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{kr}(f) e^{i(ks + r\sigma)},$$

где $G_{kr} = a_0 + i a_1 \operatorname{sgn} k + i a_2 \operatorname{sgn} r - a_{12} \operatorname{sgn} k \operatorname{sgn} r$, $\operatorname{sgn} \beta = \{+1$ при $\beta > 0$; 0 при $\beta = 0$; -1 при $\beta < 0\}$. Отсюда находим $c_{kr}(\varphi) = c_{kr}(f)/G_{kr}$ $(k = \overline{-\infty, \infty}$, $r = \overline{-\infty, \infty})$. Поэтому решение с. и. у. (0.1) при любой $f \in L_2$ представимо в виде

$$\varphi^*(s,\sigma) = A^{-1}(f; s, \sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{c_{kr}(f)}{G_{kr}} e^{i(ks + r\sigma)}.$$

Отсюда находим

$$P_N(A^{-1}f;s,\sigma)=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{r=-m}^{m}\frac{c_{kr}(f)}{G_{kr}}e^{i(ks+r\sigma)},$$

$$A^{-1}(P_Nf;s,\sigma)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{c_{kr}(P_Nf)}{G_{kr}}e^{i(ks+r\sigma)}=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{r=-m}^{m}\frac{c_{kr}(f)}{G_{kr}}e^{i(ks+r\sigma)}=P_N(A^{-1}f;s,\sigma);$$

при выводе последнего равенства учтено также, что

$$c_{kr}(P_Nf)=\begin{cases}c_{kr}(f) & \text{при } |k|\leqslant n,\ |r|\leqslant m;\\ 0 & \text{при } |k|\leqslant n,\ |r|>m;\\ 0 & \text{при } |k|>n,\ |r|\leqslant m;\\ 0 & \text{при } |k|>n,\ |r|>m,\end{cases}$$

где $k=\overline{-\infty,\infty}$, $r=\overline{-\infty,\infty}$, $N=(2n+1)(2m+1)$.

Из приведенных соотношений и формулы (1.19) при $\overline{\varphi}_N=P_N\varphi^*$ следует, что соотношение (1.25) выполняется при любых $N\in\mathbb{N}$, следовательно, в рассматриваемом случае метод редукции является оптимальным.

Такое же утверждение справедливо и в случае 2). Здесь существенно пользуемся соотношениями

$$S_1(a_1\varphi;s,\sigma)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}c_{kr}(\varphi)c_{k\infty}(a_1)e^{i(ks+r\sigma)},$$

$$S_2(a_2\varphi;s,\sigma)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}c_{kr}(\varphi)c_{\infty r}(a_2)e^{i(ks+r\sigma)},$$

$$S_{12}(a_{12}\varphi;s,\sigma)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}c_{kr}(\varphi)c_{kr}(a_{12})e^{i(ks+r\sigma)},$$

где $\varphi(s,\sigma)\in L_2$, $i=\sqrt{-1}$, а

$$c_{k\infty}(a_1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a_1(s)e^{-iks}ds,\quad c_{\infty r}(a_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a_2(\sigma)e^{-ir\sigma}d\sigma,$$

$$c_{kr}(a_{12})=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}a_{12}(s,\sigma)e^{-i(ks+r\sigma)}ds\,d\sigma.$$

Поэтому собственными значениями оператора A и соответствующими им собственными функциями будут

$$G_{kr}=a_0+c_{k\infty}(a_1)+c_{\infty r}(a_2)+c_{kr}(a_{12}),\quad \psi_{kr}(s,\sigma)=e^{i(ks+r\sigma)},$$

где $k=\overline{-\infty,\infty}$, $r=\overline{-\infty,\infty}$.

Доказательство завершается аналогично доказательству в случае 1).

1.4. *Проекционно-итеративные методы.* Отметим, что даже при достаточно удачном выборе координатных функций $\{\psi_r(s,\sigma)\}$ решение СЛАУ (1.11) во многих случаях представляет значительные практические трудности. В связи с этим может оказаться интересным следующий простой способ ее решения универсальным линейным одношаговым итерационным методом:

$$\alpha_l^k=\alpha_l^{k-1}+\alpha\|A\|^{-2}\Big\{c_l(f)-\sum_{r=1}^{N}\alpha_r^{k-1}c_l(A\psi_r)\Big\},\quad l=\overline{1,N};\quad N,k=1,2,\ldots,\tag{1.26}$$

где $\alpha_1^0,\ldots,\alpha_N^0$ — произвольные вещественные числа. Дело в том, что при $k\to\infty$ числовая последовательность α_l^k $(l=\overline{1,N})$ сходится к решению α_l $(l=\overline{1,N})$ СЛАУ (1.11) со скоростью геометрической прогрессии с указанным выше знаменателем q, причем для погрешностей $|\alpha_l-\alpha_l^k|$, $l=\overline{1,N}$, $k=1,2,\ldots$, справедливы оценки типа (1.7) и (1.8).

Из теорем 1–3, как и в одномерном случае [14] (см. также [13], гл. II, § 7; [10], гл. 4, § 1), выводится

Теорема 4. *Проекционно-итеративная последовательность элементов*

$$\varphi_N^k(s,\sigma)=\sum_{r=1}^{N}\alpha_r^k\,\psi_r(s,\sigma),\quad k=1,2,\dots\,;\quad N=1,2,\dots,$$

сходится в L_2 *к точному и приближенному решениям соответственно* $\varphi^*(s,\sigma)$ *и* $\varphi_N(s,\sigma)$ *уравнения* (0.1) *в том смысле, что*

$$\varphi^*=\lim_{N\to\infty}\varphi_N=\lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty}\varphi_N^k,$$

причем существует такой номер итерации $k=k_0(N)$, *что для любых* $k\geq k_0(N)$

$$\lim_{N\to\infty}\varphi_N^k=\varphi^*$$

со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q, *указанным в теореме* 2.

1.5. *Квадратурно-кубатурные методы.* Результаты, аналогичные теоремам 3 и 4, справедливы также для разработанного автором (см., напр., [4]–[8] и литературу в них) квадратурно–кубатурного метода решения уравнения (0.1) на сетке узлов (1.23). Здесь приведем лишь некоторые результаты, основанные на аппроксимации тригонометрическими многочленами и полиномиальными сплайнами минимальных степеней.

1.5.1. *Полиномиальные квадартурно-кубатурные методы.* Приближенное решение с. и. у. (0.1) с непрерывными коэффициентами и правой частью ищется в виде интерполяционного полинома

$$\varphi_{nm}(s,\sigma)=\frac{4}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ki}\,\Delta_n(s-s_k)\Delta_m(\sigma-\sigma_i)\quad(n,m\in\mathbb{N}),\tag{1.27}$$

где $\Delta_r(t)$ — обычное или модифицированное ядро Дирихле порядка $[\![r/2]\!]$ при r нечетном и соответственно при r четном, где $r+1\in\mathbb{N}$. Неизвестные коэффициенты $\alpha_{ki}=\varphi_{nm}(s_k,\sigma_i)$ определяются из следующей СЛАУ порядка nm:

$$\begin{aligned}a_0(s_j,\sigma_l)\alpha_{jl}&+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_1(s_j,\sigma_l;s_k)\beta_{j-k}(n)\alpha_{kl}+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_2(s_j,\sigma_l;\sigma_i)\beta_{l-i}(m)\alpha_{ji}+\\&+\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{12}(s_j,\sigma_l;s_k,\sigma_i)\beta_{j-k}(n)\beta_{l-i}(m)\alpha_{ki}=f(s_j,\sigma_l);\quad j=\overline{1,n},\quad l=\overline{1,m},\end{aligned}\tag{1.28}$$

где

$$s_j=s_{jn}=\frac{2j\pi}{n},\quad j=\overline{1,n};\quad \sigma_l=\sigma_{lm}=\frac{2l\pi}{m},\quad l=\overline{1,m},\tag{1.29}$$

$$\beta_{j-k}(r)=\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{j-k}{2r}\pi, & \text{если}\ \ j-k\ \ \text{четно};\\[2mm] \operatorname{ctg}\dfrac{k-j}{2r}\pi, & \text{если}\ \ j-k\ \ \text{нечетно},\end{cases}\tag{1.30}$$

при $r=2r_1+1$ $(r_1=0,1,\dots)$, а при $r=2r_1$ $(r_1=1,2,\dots)$

$$\beta_{j-k}(r)=\begin{cases}0, & \text{если}\ \ j-k\ \ \text{четно};\\ 2\operatorname{ctg}\dfrac{k-j}{r}\pi, & \text{если}\ \ j-k\ \ \text{нечетно}.\end{cases}\tag{1.31}$$

Для вычислительной схемы (0.1), (1.27)–(1.31) справедлива

Теорема 5. *Если $f \in C[0,2\pi]^2$, то в условиях теоремы 1 при любых n и $m \in \mathbb{N}$ СЛАУ (1.28) имеет единственное решение α_{jl} ($j = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,m}$). Приближенное решение (1.27) удовлетворяет неравенству*

$$\|\varphi_{nm}\|_{L_2[0,2\pi]^2} \le \alpha^{-1}\|f\|_{C[0,2\pi]^2} \quad (n, m \in \mathbb{N}), \tag{1.32}$$

является L_2-устойчивым относительно малых возмущений правой части $f(s,\sigma)$ в пространстве $C[0,2\pi]^2$.

Доказательство. Обозначим через X_{nm} множество всех двойных тригонометрических полиномов степени $([\![n/2]\!], [\![m/2]\!])$ вида (1.27), а через $\mathcal{L}_{nm} : X \to X_{nm} \subset X$ — оператор, ставящий в соответствие каждой функции $g \in C[0,2\pi]^2$ ее двумерный тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа вида

$$\mathcal{L}_{nm}(g; s, \sigma) = \frac{4}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} g(s_j, \sigma_l)\Delta_n(s - s_j)\Delta_m(\sigma - \sigma_l)$$

по узлам (1.29). Тогда, как известно [4]–[8], СЛАУ (1.28) эквивалентна операторному уравнению

$$\begin{aligned} A_{nm}\varphi_{nm} \equiv \mathcal{L}_{nm}(a_0\varphi_{nm}) + \mathcal{L}_{nm}S_1\mathcal{L}_n^{\xi}(a_1\varphi_{nm}) + \mathcal{L}_{nm}S_2\mathcal{L}_m^{\eta}(a_2\varphi_{nm}) +& \\ + \mathcal{L}_{nm}S_{12}\mathcal{L}_{nm}^{\xi\eta}(a_{12}\varphi_{nm}) = \mathcal{L}_{nm}f \quad (\varphi_{nm}, \mathcal{L}_{nm}f \in X_{nm}),& \end{aligned} \tag{1.33}$$

где $\mathcal{L}_n^{\xi}g$, $\mathcal{L}_m^{\eta}g$ и $\mathcal{L}_{nm}^{\xi\eta}g$ означают, что операторы $\mathcal{L}_{n\infty}$, $\mathcal{L}_{\infty m}$ и $\mathcal{L}_{nm}$ применяются к непрерывной функции $g(s,\sigma;\xi,\eta)$ по переменным ξ, η и (ξ,η) соответственно.

Рассмотрим случай нечетных n и $m \in \mathbb{N}$; другие случаи в силу результатов автора [4]–[10] рассматриваются аналогично.

Для любого полинома $\varphi_{nm} \in X_{nm}$ с учетом свойств оператора $\mathcal{L}_{nm}$ [4], [6], [13] имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{nm}(a_0\varphi_{nm}), \varphi_{nm}) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{L}_{nm}(a_0\varphi_{nm}; s,\sigma)\varphi_{nm}(s,\sigma)ds\,d\sigma = \\ &= \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_0(s_j,\sigma_l)|\varphi_{nm}(s_j,\sigma_l)|^2 ds\,d\sigma \geqslant \frac{\alpha}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}|\varphi_{nm}(s_j,\sigma_l)|^2 = \\ &= \frac{\alpha}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi_{nm}(s,\sigma)|^2 ds\,d\sigma = \alpha\|\varphi_{nm}\|^2 \quad (\varphi_{nm} \in X_{nm}). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Для любого $\varphi_{nm} \in X_{nm}$ с учетом свойств использованных в работе квадратурных формул находим

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{nm}S_1\mathcal{L}_n^{\xi}(a_1\varphi_{nm}), \varphi_{nm}) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{L}_{nm}[S_1\mathcal{L}_n^{\xi}(a_1\varphi_{nm}); s,\sigma]\varphi_{nm}(s,\sigma)ds\,d\sigma = \\ &= \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} S_1[\mathcal{L}_n^{\xi}(a_1\varphi_{nm}); s_j,\sigma_l]\varphi_{nm}(s_j,\sigma_l) = \\ &= \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\alpha_{jl}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_1(s_j,\sigma_l;s_k)\beta_{j-k}(n)\varphi_{nm}(s_k,\sigma_l) = \\ &= \frac{1}{n^2m}\sum_{l=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jl}\sum_{k=1}^{n} a_1(s_j,\sigma_l;s_k)\beta_{j-k}(n)\alpha_{kl}\right\} = \frac{1}{n^2m}\sum_{l=1}^{m} B_l, \end{aligned}$$

где $\alpha_{jl} = \varphi_{nm}(s_j, \sigma_l)$, $\alpha_{kl} = \varphi_{nm}(s_k, \sigma_l)$. В силу свойств функций $a_1(s, \sigma; \xi)$ и $\beta_{j-k}(n)$ величина

$$B_l = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jl} \sum_{k=1}^{n} a_1(s_j, \sigma_l; s_k) \beta_{j-k}(n) \alpha_{kl} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kl} \sum_{j=1}^{n} a_1(s_k, \sigma_l; s_j) \beta_{k-j}(n) \alpha_{jl} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jl} \sum_{k=1}^{n} a_1(s_j, \sigma_l; s_k) [-\beta_{j-k}(n)] \alpha_{kl} = -B_l, \quad l = \overline{1, m}.$$

Следовательно, $B_l = 0$, $l = \overline{1, m}$, поэтому

$$(\mathcal{L}_{nm}[S_1 \mathcal{L}_n^{\xi}(a_1 \varphi_{nm})], \varphi_{nm}) = 0, \quad \varphi_{nm} \in X_{nm}. \tag{1.35}$$

Аналогично, с учетом свойств функций $a_2(s, \sigma; \eta)$ и $\beta_{l-i}(m)$ находим

$$(\mathcal{L}_{nm}[S_2 \mathcal{L}_m^{\eta}(a_2 \varphi_{nm})], \varphi_{nm}) = 0, \quad \varphi_{nm} \in X_{nm}. \tag{1.36}$$

Кроме того, в силу свойств функций $a_{12}(s, \sigma; \xi, \eta)$ и $\beta_{j-k}(n)$, $\beta_{l-i}(m)$ для любого элемента $\varphi_{nm} \in X_{nm}$

$$(\mathcal{L}_{nm} S_{12} \mathcal{L}_{nm}^{\xi\eta}(a_{12}\varphi_{nm}), \varphi_{nm}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L}_{nm}[S_{12} \mathcal{L}_{nm}(a_{12}\varphi_{nm}); s, \sigma] \varphi_{nm}(s, \sigma) ds\, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \varphi_{nm}(s_j, \sigma_l) S_{12}[\mathcal{L}_{nm}(a_{12}\varphi_{nm}); s_j, \sigma_l] =$$
$$= \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \alpha_{jl} \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{12}(s_j, \sigma_l; s_k, \sigma_i) \beta_{j-k}(n) \beta_{l-i}(m) \alpha_{ki} =$$
$$= \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} a_{12}(s_k, \sigma_i; s_j, \sigma_l) \beta_{k-j}(n) \beta_{i-l}(m) \alpha_{jl} =$$
$$= -\frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \alpha_{jl} \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{12}(s_j, \sigma_l; s_k, \sigma_i) \beta_{j-k}(n) \beta_{l-i}(m) \alpha_{ki}.$$

Поэтому для любого полинома $\varphi_{nm} \in X_{nm}$ имеем

$$(\mathcal{L}_{nm} S_{12} \mathcal{L}_{nm}^{\xi\eta}(a_{12}\varphi_{nm}), \varphi_{nm}) = 0. \tag{1.37}$$

Из соотношений (1.33)–(1.37) следует

$$(A_{nm}\varphi_{nm}, \varphi_{nm}) \geqslant \alpha \|\varphi_{nm}\|^2, \quad \varphi_{nm} \in X_{nm}.$$

Отсюда для любого полинома $\varphi_{nm} \in X_{nm}$ имеем неравенство

$$\|A_{nm}\varphi_{nm}\| \geqslant \alpha \|\varphi_{nm}\|, \quad \varphi_{nm} \in X_{nm},$$

обеспечивающее существование двусторонне обратного оператора $A_{nm}^{-1} : X_{nm} \to X_{nm}$ и справедливость неравенств (напр., [13], гл. I, § 2)

$$\|A_{nm}^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1} < \infty \quad (n, m \in \mathbb{N}). \tag{1.38}$$

Поэтому операторное уравнение (1.33) и эквивалентная ему СЛАУ (1.28) однозначно разрешимы при любых $n, m \in \mathbb{N}$ и любых правых частях, причем $\varphi_{nm} = A_{nm}^{-1} \mathcal{L}_{nm} f$. Отсюда и из (1.38) находим неравенства

$$\|\varphi_{nm}\|_{L_2} \leqslant \|A_{nm}^{-1}\| \|\mathcal{L}_{nm} f\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{L}_{nm}(f; s, \sigma)|^2 ds\, d\sigma \right\}^{1/2} =$$
$$= \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |f(s_j, \sigma_l)|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{\alpha} \|f\|_C.$$

Остальные утверждения теоремы 5 легко выводятся из неравенства (1.32).

Далее, обозначим через $\overline{X} = \{\overline{\varphi}\}$ пространство всех векторов вида $\overline{\varphi} = \{\alpha_{jl}\}_{j=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,m}}$, где $\alpha_{jl} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,m}$, с нормой

$$\|\overline{\varphi}\|_{\overline{X}} = \left\{ \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |\alpha_{jl}|^2 \right\}^{1/2} \quad (\overline{\varphi} \in \overline{X})$$

и со скалярным произведением

$$(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \alpha_{jl}\beta_{jl} \quad (\overline{\varphi}, \overline{\psi} \in \overline{X}),$$

где $\overline{\varphi} = \{\alpha_{jl}\}_{j=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,m}}$ и $\overline{\psi} = \{\beta_{jl}\}_{j=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,m}}$. Тогда СЛАУ (1.28) можно записать в виде эквивалентного ей линейного уравнения

$$\overline{A}\overline{\varphi} = \overline{f} \quad (\overline{\varphi}, \overline{f} \in \overline{X}), \tag{1.39}$$

где $\overline{f} = \{f(s_j, \sigma_l)\}_{j=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,m}}$, а $\overline{A} : \overline{X} \to \overline{X}$ — матрица, определяемая левой частью СЛАУ (1.28).

Из вышеприведенных теорем 1, 2, 5 и из результатов ([13], гл. II, § 7) выводится

Теорема 6. *В условиях теоремы* 5 *решение* $\overline{\varphi} = \{\alpha_{jl}\}_{j=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,m}} \in \overline{X}$ *СЛАУ* (1.28) *можно найти с помощью универсального итерационного метода*

$$\overline{\varphi}^k = \overline{\varphi}^{k-1} + \alpha\, \|\overline{A}\|^{-2}(\overline{f} - \overline{A}\overline{\varphi}^{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.40}$$

при любом начальном приближении $\overline{\varphi}^0 = \{\alpha_{jl}^0\}_{j=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,m}} \in \overline{X}$. *Погрешность* k*-го приближения* $\overline{\varphi}^k = \{\alpha_{jl}^k\}_{j=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,m}} \in \overline{X}$ *может быть оценена в пространстве* $\overline{X}$ *неравенствами*

$$\|\overline{\varphi} - \overline{\varphi}^k\|_{\overline{X}} = \left\{ \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |\alpha_{jl} - \alpha_{jl}^k|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \overline{q}^k (1 - \overline{q})^{-1} \|\overline{\varphi}^1 - \overline{\varphi}^0\|_{\overline{X}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.41}$$

где $\overline{q} = (1 - \alpha^2\|\overline{A}\|^{-2})^{1/2} < 1$; *если же начальное приближение определяется по формуле* $\overline{\varphi}^0 = \alpha\|\overline{A}\|^{-2}\overline{f} \in \overline{X}$, *то и неравенствами*

$$\|\overline{\varphi} - \overline{\varphi}^k\|_{\overline{X}} \le \overline{q}^{k+1}(1 - \overline{q})^{-1}\alpha\|\overline{A}\|^{-2}\|\overline{f}\|_{\overline{X}},\ k = 1, 2, \ldots \tag{1.42}$$

Рассмотрим еще одну вычислительную схему полиномиального квадратурно-кубатурного метода решения бисингулярного интегрального уравнения (0.1). Приближенное решение снова будем искать в виде тригонометрического интерполяционного полинома (1.27) по узлам (1.29), коэффициенты $\alpha_{kj} = \alpha_{kj}(n, m)$ которого определим из СЛАУ

$$\begin{aligned} a_0(s_j, \sigma_l)\alpha_{jl} &+ \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_1(s_j, \sigma_l; s_k) \operatorname{ctg} \frac{(k-j)\pi}{n} \alpha_{kl} + \frac{1}{m} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{m} a_2(s_j, \sigma_l; \sigma_i) \operatorname{ctg} \frac{(i-l)\pi}{m} \alpha_{ji} + \\ &+ \frac{1}{nm} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{m} a_{12}(s_j, \sigma_l; s_k, \sigma_i) \operatorname{ctg} \frac{(k-j)\pi}{n} \operatorname{ctg} \frac{(i-l)\pi}{m} \alpha_{ki} = \\ &= f(s_j, \sigma_l); \quad j = \overline{1,n}, \quad l = \overline{1,m} \quad (n, m, \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Для вычислительной схемы (0.1), (1.27), (1.29), (1.43) справедливы результаты, аналогичные теоремам 5 и 6. Например, имеет место

Теорема 7. *Пусть* $a_0(s,\sigma)$, $a_1(s,\sigma,\xi)$, $a_2(s,\sigma;\eta)$, $a_{12}(s,\sigma;\xi,\eta)$ *и* $f(s,\sigma)$ *— непрерывные* 2π*-периодические функции по каждой из переменных. Тогда в условиях теоремы* 1 *СЛАУ* (1.43) *однозначно разрешима при любых* n *и* $m \in \mathbb{N}$, *а приближенные решения* (1.27) *удовлетворяют неравенствам*

$$\|\varphi_{nm}\|_{L_2} \leqslant \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}|f(s_j,\sigma_l)|^2\right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f\|_C \quad (n,m\in\mathbb{N}). \tag{1.44}$$

Доказательство. Представим СЛАУ (1.43) в операторном виде (1.39), где $\overline{A} : \overline{X} \to \overline{X}$ — матричный оператор, определяемый левой частью СЛАУ (1.43). Тогда для любого вектора $\overline{\varphi} = \{\alpha_{jl}\}_{j=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,m}}$ находим

$$\begin{aligned}
(\overline{A}\overline{\varphi},\overline{\varphi}) = \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\alpha_{jl}\Bigg\{ & a_0(s_j,\sigma_l)\alpha_{jl} + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\alpha_{kl}a_1(s_j,\sigma_l;s_k)\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_j}{2} + \\
& + \frac{1}{m}\sum_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{m}\alpha_{ji}a_2(s_j,\sigma_l;\sigma_i)\operatorname{ctg}\frac{s_i-s_l}{2} + \\
& + \frac{1}{nm}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\sum_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{m}\alpha_{ki}a_{12}(s_j,\sigma_l;s_k,\sigma_i)\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_j}{2}\operatorname{ctg}\frac{s_i-s_l}{2}\Bigg\} \geqslant \\
& \geqslant \alpha\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}|\alpha_{jl}|^2 + M_1 + M_2 + M_{12} = \alpha\|\overline{\varphi}\|_X^2 + M_1 + M_2 + M_{12},
\end{aligned} \tag{1.45}$$

где смысл обозначений M_i очевиден. С учетом свойств функций $a_1(s,\sigma;\xi)$ и $\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}$ находим

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\alpha_{jl}\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\alpha_{kl}a_1(s_j,\sigma_l;s_k)\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_j}{2} = \\
&= \frac{1}{n^2m}\sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jl}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\alpha_{kl}a_1(s_j,\sigma_l;s_k)\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_j}{2}\right] = \\
&= \frac{1}{n^2m}\sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kl}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\alpha_{jl}a_1(s_k,\sigma_l;s_j)\operatorname{ctg}\frac{s_j-s_k}{2}\right] = \\
&= \frac{1}{n^2m}\sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jl}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\alpha_{kl}a_1(s_j,\sigma_l;s_k)\left(-\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_j}{2}\right)\right] = -M_1 = 0.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Аналогично для любого вектора $\overline{\varphi} = \{\alpha_{jl}\} \in \overline{X}$ находим

$$M_2 = \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\alpha_{jl}\frac{1}{m}\sum_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{m}\alpha_{ji}a_2(s_j,\sigma_l;\sigma_i)\operatorname{ctg}\frac{s_i-s_l}{2} = 0. \tag{1.47}$$

С учетом свойств функций $h_{12}(s,\sigma;\xi,\eta)$ и $\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}$ для любого $\overline{\varphi} \in \overline{X}$ получаем

$$M_{12} = \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\alpha_{jl}\frac{1}{nm}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\sum_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{m}\alpha_{ki}h_{12}(s_j,\sigma_l;s_k,\sigma_i)\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_j}{2}\operatorname{ctg}\frac{s_i-s_l}{2} = 0. \tag{1.48}$$

Из соотношений (1.45)–(1.48) находим неравенство

$$(\overline{A}\overline{\varphi},\overline{\varphi}) \geqslant \alpha\|\overline{\varphi}\|^2_{\overline{X}} \quad (\overline{\varphi}\in\overline{X}). \tag{1.49}$$

Из (1.49) следует, что оператор $\overline{A}:\overline{X}\to\overline{X}$ имеет двусторонний обратный $\overline{A}^{-1}$ и

$$\|\overline{A}^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1} < \infty, \quad \overline{A}^{-1}:\overline{X}\to\overline{X}.$$

Поэтому СЛАУ (1.43) имеет единственное решение $\overline{\varphi}=\{\alpha_{jl}\}_{j=\overline{1,m}}^{l=\overline{1,m}}\in\overline{X}$ и для него справедливы соотношения

$$\|\overline{\varphi}\|_{\overline{X}} = \left\{\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}|\alpha_{jl}|^2\right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}|f(s_j,\sigma_l)|^2\right\}^{1/2} \equiv \frac{1}{\alpha}\|\overline{f}\|_{\overline{X}} \quad (n,m\in\mathbb{N}). \tag{1.50}$$

Из соотношений (1.27), (1.29) и (1.50) с помощью соответствующих результатов [4], [6], [10] находим оценки (1.44). □

1.5.2. *Сплайновые квадратурно-кубатурные методы.* Теперь приближенное решение с. и. у. (0.1) будем искать в виде двумерного сплайна нулевой степени

$$\varphi_{nm}(s,\sigma) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ki}\psi_{kn}(s)\psi_{im}(\sigma) \quad (n,m\in\mathbb{N}), \tag{1.51}$$

где $\psi_{kn}(s)$ и $\psi_{im}(\sigma)$, как и выше, суть 2π-периодические характеристические функции интервалов соответственно $[s_{k-1},s_k)$ и $[\sigma_{i-1},\sigma_i)$, а узлы определены в (1.23). Неизвестные постоянные $\alpha_{ki}=\alpha_{ki}(n,m)$ будем определять из СЛАУ

$$a_0(\overline{s}_j,\overline{\sigma}_l)\alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{kl}a_1(\overline{s}_j,\overline{\sigma}_l;s_k)\gamma_{k-j}(n) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ji}a_2(\overline{s}_j,\overline{\sigma}_l;\overline{\sigma}_i)\gamma_{i-l}(m) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\alpha_{ki}a_{12}(\overline{s}_j,\overline{\sigma}_l;\overline{s}_k,\overline{\sigma}_i)\gamma_{k-j}(n)\gamma_{i-l}(m) = f(\overline{s}_j,\overline{\sigma}_l); \quad j=\overline{1,n}, \quad l=\overline{1,m}, \tag{1.52}$$

где

$$\overline{s}_j = \frac{(2j-1)\pi}{n}, \quad \overline{\sigma}_l = \frac{(2l-1)\pi}{m}, \tag{1.53}$$

$$\gamma_{k-j}(n) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\sin s_{k-j+1/2}}{\sin s_{k-j-1/2}}\right|, \quad \gamma_{i-l}(m) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\sin s_{i-l+1/2}}{\sin s_{i-l-1/2}}\right|. \tag{1.54}$$

Для вычислительной схемы (0.1), (1.23), (1.51)–(1.54) справедлива

Теорема 8. *В условиях теоремы 7 СЛАУ* (1.52)–(1.54) *однозначно разрешима при любых n и $m\in\mathbb{N}$, а для приближенного решения* (1.51) *справедливы соотношения*

$$\|\varphi_{nm}\|_{L_2} = \left\{\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ki}|^2\right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}|f(\overline{s}_j,\overline{\sigma}_l)|^2\right\}^{1/2} \quad (n,m\in\mathbb{N}).$$

Доказательство можно вести как по схеме доказательства теоремы 5, так и по схеме доказательства теоремы 7; при этом существенно используются свойства функций a_i $(i=0,1,2,12)$, $\gamma_{k-j}(n)$, $\gamma_{i-l}(m)$ и ядер Гильберта $\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}$. Ввиду громоздкости на деталях останавливаться не будем, тем более они почти аналогичны одномерному случаю [14].

Теперь приближенное решение с. и. у. (0.1) будем искать в виде двумерного сплайна первой степени вида

$$\widetilde{\varphi}_{nm}(s,\sigma) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ki}\psi_{kn}(s)\psi_{im}(\sigma) \quad (n,m\in\mathbb{N}), \tag{1.55}$$

где $\psi_{kn}(s)$ и $\psi_{im}(\sigma)$ суть одномерные 2π-периодические фундаментальные сплайны первой степени по системам узлов $s_k = 2k\pi/n$ $(k = \overline{0,n})$ и $\sigma_i = 2i\pi/m$ $(i = \overline{0,m})$ соответственно,

$$\psi_{kn}(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \leqslant s_{k-1}; \\ \dfrac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} & \text{при } s_{k-1} \leqslant s \leqslant s_k; \\ \dfrac{s_{k+1} - s}{s_{k+1} - s_k} & \text{при } s_k \leqslant s \leqslant s_{k+1}; \\ 0 & \text{при } s \geqslant s_{k+1}, \end{cases} \qquad \psi_{im}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma \leqslant \sigma_{i-1}; \\ \dfrac{\sigma - \sigma_{i-1}}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} & \text{при } \sigma_{i-1} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_i; \\ \dfrac{\sigma_{i+1} - \sigma}{\sigma_{i+1} - \sigma_i} & \text{при } \sigma_i \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{i+1}; \\ 0 & \text{при } \sigma \geqslant \sigma_{i+1}. \end{cases}$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_{ki} = \alpha_{ki}(n,m)$ будем определять из СЛАУ

$$a_0(s_j,\sigma_l)\alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kl} a_1(s_j,\sigma_l;s_k)\delta_{k-j}(n) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} a_2(s_j,\sigma_l;\sigma_i)\delta_{i-l}(m) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki} a_{12}(s_j,\sigma_l;s_k,\sigma_i)\delta_{k-j}(n)\delta_{i-l}(m) = f(s_j,\sigma_l), \quad j = \overline{1,n},\ l = \overline{1,m}, \tag{1.56}$$

где узлы приведены в (1.23), а

$$\delta_{k-j}(n) = \frac{1}{n}\int_0^1 \left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}(k-j+t) + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}(k-j-t)\right](1-t)dt, \tag{1.57}$$

$$\delta_{i-l}(m) = \frac{1}{m}\int_0^1 \left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{m}(i-l+s) + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{m}(i-l-s)\right](1-s)ds. \tag{1.58}$$

Для вычислительной схемы (0.1), (1.23), (1.55)–(1.58) справедлива

Теорема 9. *В условиях теоремы* 7 *СЛАУ* (1.56)–(1.58) *однозначно разрешима при любых* n *и* $m \in \mathbb{N}$, *а для приближенного решения* (1.55) *справедливы неравенства*

$$\|\widetilde{\varphi}_{nm}\| \leqslant \left\{\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ki}|^2\right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}|f(s_j,\sigma_l)|^2\right\}^{1/2} \qquad (n,m \in \mathbb{N}).$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 7 с использовнием соответствующего результата для одномерного случая ([10], с. 152–153); ввиду громоздкости на подробных выкладках останавливаться не будем.

2. Некоторые замечания

Замечание 1. Теоремы 1–4 остаются в силе при возмущении оператора $A : L_2 \to L_2$ соответствующим оператором T: а) вполне непрерывным в $L_2 = L_2[0,2\pi]^2$; б) малым по норме оператором $T : L_2 \to L_2$ таким, что $\|T\| < \alpha$, где постоянная α определена в теореме 1.

Замечание 2. Теоремы 5–9 остаются в силе при возмущении оператора $A : L_2 \to L_2$ соответствующим оператором T: а) вполне непрерывным из пространства L_2 в пространство $C = C[0,2\pi]^2$; б) малым по норме в том смысле, что $\|T\|_{L_2\to C} < \alpha$.

Замечание 3. На основе приведенных выше теорем 1–9 и результатов [13]–[16] могут быть построены быстросходящиеся в $L_2[0,2\pi]^2$ схемы кубатурно-итерационных методов решения бисингулярного интегрального уравнения (0.1).

Замечание 4. В формулах (1.6)–(1.8), (1.26) и соответственно (1.40)–(1.42) нормы $\|A\|$ и $\|\overline{A}\|$ могут быть заменены постоянными M и $\overline{M}$ соответственно, где $\|A\| \leqslant M < \infty$, $A : X \to X$, и $\|\overline{A}\| \leqslant \overline{M} < \infty$, $\overline{A} : \overline{X} \to \overline{X}$, причем $\overline{M} \leqslant M$, а постоянная M, как указано выше, определяется через функции a_i $(i = 0,1,2,12)$.

Литература

1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 638 с.
2. Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – 302 с.
3. Michlin S.G., Prößdorf S. *Singuläre Integraloperatoren.* – Berlin: Akademic-Verlag, 1980. – 514 S.
4. Габдулхаев Б.Г. *Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов*, I *и* II // Тр. Матем. ин-та АН Болгарии. – 1970. – Т. 11. – С. 181–196; Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 4. – С. 3–13.
5. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения некоторых операторных уравнений*, I–IV // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 11. – С. 33–44; 1971. – № 12. – С. 28–38; 1972. – № 4. – С. 32–43; 1974. – № 3. – С. 18–31.
6. Габдулхаев Б.Г. *Приближенное решение многомерных сингулярных интегральных уравнений*, I *и* II // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 7. – С. 30–41; 1976. – № 1. – С. 30–41.
7. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: Изд-во АН СССР, 1980. – Вып. 18. – С. 251–307.
8. Габдулхаев Б.Г. *Многомерные сингулярные интегральные уравнения с положительными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т.29. – № 9. – С. 1504–1516.
9. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные приближения решений бисингулярного интегрального уравнения* // Теория функций и ее прилож. Тез. докл. Школы-конф., 15–22 июня 1995 г. – Казань: Казанский фонд "Математика", 1995. – С. 15-17.
10. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
12. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.
13. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
14. Габдулхаев Б.Г. *Методы решения сингулярных интегральных уравнений с положительными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 3. – С. 400–409.
15. Лучка А.Ю. *Проекционно-итеративные методы.* – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.
16. Габдулхаев Б.Г. *Решение операторных уравнений методом уточняющих итераций* // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 66–80.

Казанский государственный университет

Поступила 20.05.2003