ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 7 (530)

УДК 519.853

А.С. ДУДОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ

1. Введение

Пусть D — некоторый выпуклый компакт из конечномерного действительного пространства $\mathbb{R}^p$, $\|x\|$ — евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^p$, $h(A, B)$ — расстояние Хаусдорфа между множествами A и B из $\mathbb{R}^p$, $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leq r\}$.

Задачу о наилучшем приближении выпуклого компакта D евклидовым шаром в метрике Хаусдорфа можно записать в виде

$$h(D, B(x, r)) \to \min_{x \in \mathbb{R}^p,\ r > 0}. \tag{1.1}$$

Эта задача была поставлена и исследовалась в работе [1]. В ней, в частности, выяснилось, что задача (1.1) имеет непосредственное отношение к другой задаче по оценке компакта D. А именно, было показано, что шар наилучшего приближения для D является единственным, причем его центр x_0 содержится в D и является единственным решением задачи

$$\Phi(x) \equiv R(x) - \rho(x) \to \min_{x \in D}, \tag{1.2}$$

где $R(x) = \max\limits_{y \in D} \|x - y\|$, $\rho(x) = \min\limits_{y \in \Omega} \|x - y\|$, $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$. При этом радиус искомого шара есть $r_0 = (R(x_0) + \rho(x_0))/2$ и

$$h_0(D) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^p,\ r \geq 0} h(D, B(x, r)) = (R(x_0) - \rho(x_0))/2. \tag{1.3}$$

С геометрической точки зрения (1.2) является задачей о построении шарового слоя наименьшей толщины, содержащего границу выпуклого компакта D. Как отмечалось в [1], задача (1.2) или близкие к ней рассматривались в [2]–[10]. Обобщение задачи (1.1) на ситуацию, когда евклидова норма заменяется на произвольную и приближение осуществляется шаром этой нормы в порожденной ею метрике Хаусдорфа рассматривалось в [11], [12].

В данной работе изучается устойчивость решения задачи (1.1) относительно погрешности задания приближаемого компакта. Цель работы — получить оценку устойчивости центра шара наилучшего приближения. Пусть D_ε — выпуклый компакт такой, что

$$h(D, D_\varepsilon) \leq \varepsilon, \tag{1.4}$$

где $\varepsilon > 0$. Как было показано в [1], функция $h_0(\cdot) : Kv(\mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^1_+$, определенная через (1.3) на метрическом пространстве $Kv(\mathbb{R}^p)$ всех выпуклых компактов из $\mathbb{R}^p$ с метрикой Хаусдорфа, является липшицевой:

$$|h_0(D_1) - h_0(D_2)| \leq h(D_1, D_2) \quad \forall D_1, D_2 \in Kv(\mathbb{R}^p).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

Отсюда сразу следует

$$|h_0(D) - h_0(D_\varepsilon)| \le \varepsilon. \tag{1.5}$$

Неравенство (1.5) дает оценку устойчивости оптимального значения целевой функции.

Далее под $\operatorname{int} A$, $\overline{A}$, $\operatorname{co} A$ понимаем соответственно внутренность, замыкание, выпуклую оболочку множества A; $\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение элементов x и y из $\mathbb{R}^p$, x_ε — центр шара наилучшего приближения для D_ε, 0_p — нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^p$.

2. Вспомогательные факты

1. Напомним некоторые свойства функций $R(x)$ и $\rho(x)$. Известно, что функция расстояния $\rho(x)$ является вогнутой на выпуклом множестве D, дифференцируемой по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$ в точках $x \in \operatorname{int} D$, причем для ее производной по направлениям справедлива формула (см. [13], с. 245)

$$\rho'(x,g) \equiv \lim_{\alpha\downarrow 0} \alpha^{-1}[\rho(x+\alpha g) - \rho(x)] = \min_{y\in Q^\rho(x)} \left\langle \frac{x-y}{\|x-y\|}, g\right\rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^p, \tag{2.1}$$
$$Q^\rho(x) = \{y \in \Omega : \rho(x) = \|x-y\|\}.$$

Очевидно, функция $R(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$. Используя дифференциальные свойства функций маргинального вида (напр., [14], с. 82–85), нетрудно записать формулу ее производной по направлениям в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$

$$R'(x,g) \equiv \lim_{\alpha\downarrow 0} \alpha^{-1}[R(x+\alpha g) - R(x)] = \max_{y\in Q^R(x)} \left\langle \frac{x-y}{\|x-y\|}, g\right\rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^p, \tag{2.2}$$
$$Q^R(x) = \{y \in D : R(x) = \|x-y\|\}.$$

2. Возьмем произвольную пару точек $x_1 \ne x_2$ и рассмотрим некоторые свойства вспомогательной функции $R_0(x) = \max\limits_{y\in D_0} \|x-y\|$, где $D_0 = B(x_1, R(x_1)) \cap B(x_2, R(x_2))$.

Лемма 1. *Для множества* $Q^{R_0}(x) = \{y \in D_0 : R_0(x) = \|x-y\|\}$ *выполняется*

$$Q^{R_0}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x_1 - y\| = R(x_1),\ \|x_2 - y\| = R(x_2)\}, \quad \alpha \in (0,1). \tag{2.3}$$

Доказательство. Как следует из определения множества $Q^{R_0}(x)$, множество $Q^{R_0}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$ представляет собой совокупность решений экстремальной задачи

$$\|\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 - y\| \to \max_{y\in D_0},$$
$$D_0 = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x_1 - y\| \le R(x_1),\ \|x_2 - y\| \le R(x_2)\}.$$

Несложное решение этой задачи методом множителей Лагранжа приводит к формуле (2.3). □

Лемма 2. *Для точек* $x(\alpha) = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $\alpha \in [0,1]$, *выполняется*

$$R_0^2(x(\alpha)) = \alpha R_0^2(x_1) + (1-\alpha)R_0^2(x_2) - \alpha(1-\alpha)\|x_1 - x_2\|^2. \tag{2.4}$$

Доказательство. Очевидно, $R_0(x_i) = R(x_i)$, $i = 1,2$. Поэтому, если $y(\alpha) \in Q^{R_0}(x(\alpha))$, то в соответствии с леммой 1

$$\|x_1 - y(\alpha)\| = R_0(x_1), \quad \|x_2 - y(\alpha)\| = R_0(x_2). \tag{2.5}$$

Используя (2.5), получаем

$$\begin{aligned}R_0^2(x(\alpha)) &= \|x(\alpha)-y(\alpha)\|^2 = \langle x(\alpha)-x_1+x_1-y(\alpha), x(\alpha)-x_1+x_1-y(\alpha)\rangle = \\ &= \|x(\alpha)-x_1\|^2+\|x_1-y(\alpha)\|^2+2\langle x(\alpha)-x_1, x_1-y(\alpha)\rangle = \\ &= R_0^2(x_1)+\|x(\alpha)-x_1\|^2+2(1-\alpha)\langle x_2-x_1, x_1-y(\alpha)\rangle, \qquad (2.6)\\ R_0^2(x_2) &= \|x_2-y(\alpha)\|^2 = \langle x_2-x_1+x_1-y(\alpha), x_2-x_1+x_1-y(\alpha)\rangle = \\ &= \|x_2-x_1\|^2+\|x_1-y(\alpha)\|^2+2\langle x_2-x_1, x_1-y(\alpha)\rangle = \\ &= R_0^2(x_1)+\|x_1-x_2\|^2+2\langle x_2-x_1, x_1-y(\alpha)\rangle. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Имеем из (2.7) $2\langle x_2-x_1, x_1-y(\alpha)\rangle = R_0^2(x_2)-R_0^2(x_1)-\|x_1-x_2\|^2$ и подставляя в (2.6) вместе с $x(\alpha)=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$, получаем (2.4). □

Лемма 3. *Для точек* $x(\alpha)=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$, $\alpha\in[0,1]$, *выполняется*

$$R_0(x(\alpha)) \le \alpha R_0(x_1)+(1-\alpha)R_0(x_2)-\frac{\alpha(1-\alpha)(\|x_1-x_2\|^2-(R_0(x_1)-R_0(x_2))^2)}{2(\alpha R_0(x_1)+(1-\alpha)R_0(x_2))}. \qquad (2.8)$$

Доказательство. Возводя в квадрат правую часть неравенства (2.8) и используя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned}&\alpha^2R_0^2(x_1)+(1-\alpha)^2R_0^2(x_2)+\frac{\alpha^2(1-\alpha)^2(\|x_1-x_2\|^2-(R_0(x_1)-R_0(x_2))^2)^2}{4(\alpha R_0(x_1)+(1-\alpha)R_0(x_2))^2}+\\ &\quad+2\alpha(1-\alpha)R_0(x_1)R_0(x_2)-\alpha(1-\alpha)[\|x_1-x_2\|^2-(R_0(x_1)-R_0(x_2))^2] = \\ &\quad= \alpha R_0^2(x_1)+(1-\alpha)R_0^2(x_2)-\alpha(1-\alpha)\|x_1-x_2\|^2+\\ &\quad\quad+\frac{\alpha^2(1-\alpha)^2(\|x_1-x_2\|^2-(R_0(x_1)-R_0(x_2))^2)^2}{4(\alpha R_0(x_1)+(1-\alpha)R_0(x_2))^2} \ge R_0^2(x(\alpha)).\end{aligned}$$

Отсюда следует (2.8). □

3. Получим некоторые оценки для производной по направлению функции расстояния.

Лемма 4. *Пусть* $\rho(x)=\rho>0$ *и точка* $y\in D$ *такова, что* $\|x-y\|=R>\rho$.

а) *Если единичный вектор* $g\in\mathbb{R}^p$ *таков, что* $\delta\equiv\langle (x-y)/\|x-y\|, g\rangle\le-\rho/R$, *то*

$$\rho'(x,g)\ge\frac{\delta\rho}{R}-\sqrt{(1-\delta^2)\Big(1-\frac{\rho^2}{R^2}\Big)}. \qquad (2.9)$$

б) *Если единичный вектор* $g\in\mathbb{R}^p$ *таков, что* $\delta\ge\rho/R$, *то*

$$\rho'(x,g)\le\frac{\delta\rho}{R}+\sqrt{(1-\delta^2)\Big(1-\frac{\rho^2}{R^2}\Big)}. \qquad (2.10)$$

Доказательство. Пусть точка $y_0\in Q^\rho(x)$ такова, что в соответствии с (2.1)

$$\rho'(x,g)=\Big\langle\frac{x-y_0}{\|x-y_0\|}, g\Big\rangle. \qquad (2.11)$$

В силу вогнутости функции расстояния на множестве D имеем

$$\rho(x+\alpha(y-x))=\rho((1-\alpha)x+\alpha y)\ge(1-\alpha)\rho(x)+\alpha\rho(y)\ge(1-\alpha)\rho\quad\forall\alpha\in[0,1].$$

Отсюда и из (2.1) следует

$$-\rho\le\rho'(x,y-x)\le\Big\langle\frac{x-y_0}{\|x-y_0\|}, y-x\Big\rangle. \qquad (2.12)$$

Обозначим $z = \frac{x-y_0}{\|x-y_0\|}$, $\widehat{y} = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. Из (2.12) с учетом того, что $\|x-y_0\| = \rho$ и $\|x-y\| = R$, вытекает

$$\langle z, \widehat{y} \rangle \le \frac{\rho}{R}. \tag{2.13}$$

Таким образом, согласно (2.11), введенным обозначениям и (2.13) получение верхней и нижней оценок для $\rho'(x,g)$ можно свести к решению экстремальных задач вида

$$\langle z, g \rangle \to \operatorname*{extr}_{z \in \mathbb{R}^p}, \tag{2.14}$$

$$\langle z, \widehat{y} \rangle \le \frac{\rho}{R}, \quad \|z\| = 1. \tag{2.15}$$

При этом следует учитывать соответствующие ограничения на δ и $\langle \widehat{y}, g \rangle = \delta$, $\|\widehat{y}\| = \|g\| = 1$. Решение задачи (2.14)–(2.15) на максимум с помощью метода множителей Лагранжа и найденное максимальное значение целевой функции дает верхнюю оценку (2.10). А решение задачи (2.14)–(2.15) на минимум дает нижнюю оценку (2.9). □

4. Известно (напр., [11]), что функция $R(x)$ является липшицевой на $\mathbb{R}^p$ с константой Липшица, равной единице. Из этого факта легко следует оценка для ее производной по направлениям

$$|R'(x,g)| \le \|g\| \ \ \forall x \in \mathbb{R}^p, \quad g \in \mathbb{R}^p. \tag{2.16}$$

Поскольку функции $R(x)$ и $\rho(x)$ дифференцируемы по направлениям в любой точке, то и функция $\Phi(x) = R(x) - \rho(x)$ обладает тем же свойством, причем

$$\Phi'(x,g) = R'(x,g) - \rho'(x,g). \tag{2.17}$$

Обозначим $g_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon - x_0}{\|x_\varepsilon - x_0\|}$, считая $x_\varepsilon \ne x_0$.

Лемма 5. *Если точка* x_0 *— центр шара наилучшего приближения в задаче* (1.1) *и* $\operatorname{int} D \ne \emptyset$, *то*

$$R'(x_0, g_\varepsilon) \ge -\sqrt{\frac{R(x_0)+\rho(x_0)}{2R(x_0)}}. \tag{2.18}$$

Доказательство. Точка x_0, являясь центром шара наилучшего приближения для D, является [1] одновременно точкой минимума функции $\Phi(x)$ на D, причем $x_0 \in \operatorname{int} D$. Следовательно, выполняется

$$\Phi'(x_0, g) \ge 0 \ \ \forall g \in \mathbb{R}^p. \tag{2.19}$$

Пусть точка $y_\varepsilon \in Q^R(x_0)$ такова, что в соответствии с формулой (2.2)

$$R'(x_0, g_\varepsilon) = \max_{y \in Q^R(x_0)} \Big\langle \frac{x_0 - y}{\|x_0 - y\|}, g_\varepsilon \Big\rangle = \Big\langle \frac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|}, g_\varepsilon \Big\rangle. \tag{2.20}$$

Поскольку $\rho(x_0) \le R(x_0)$, то всегда выполняется

$$\frac{\rho(x_0)}{R(x_0)} \le \sqrt{\frac{R(x_0)+\rho(x_0)}{2R(x_0)}}.$$

С учетом (2.20) это означает, что для доказательства справедливости неравенства (2.18) достаточно рассмотреть случай, когда

$$\delta_\varepsilon \equiv \Big\langle \frac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|}, g_\varepsilon \Big\rangle \le -\frac{\rho(x_0)}{R(x_0)}. \tag{2.21}$$

Так как $y_\varepsilon \in D$ и $\|x_0 - y_\varepsilon\| = R(x_0)$, то, используя (2.17), (2.19)–(2.21) и утверждение а) леммы 4, имеем

$$0 \le \Phi'(x_0, g_\varepsilon) = R'(x_0, g_\varepsilon) - \rho'(x_0, g_\varepsilon) \le \delta_\varepsilon - \frac{\delta_\varepsilon \rho(x_0)}{R(x_0)} + \sqrt{(1-\delta_\varepsilon^2)\Big(1 - \frac{\rho^2(x_0)}{R^2(x_0)}\Big)}.$$

Несложным преобразованием получаем

$$|\delta_\varepsilon| \le \sqrt{\frac{R(x_0) + \rho(x_0)}{2R(x_0)}},$$

откуда и следует (2.18). $\square$

Лемма 6. *Если* $\operatorname{int} D \ne \emptyset$ *и* $R'(x_0, g_\varepsilon) \equiv \delta_\varepsilon > \rho(x_0)/R(x_0)$, *то*

$$\Phi'(x_0, g_\varepsilon) \ge \delta_\varepsilon \Big(1 - \frac{\rho(x_0)}{R(x_0)}\Big) - \sqrt{(1-\delta_\varepsilon^2)\Big(1 - \frac{\rho^2(x_0)}{R^2(x_0)}\Big)}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть точка $y_\varepsilon \in Q^R(x_0)$ такова, что выполняется (2.20). Таким образом, имеем

$$\delta_\varepsilon = \Big\langle \frac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|}, g_\varepsilon \Big\rangle, \quad \|x_0 - y_\varepsilon\| = R(x_0), \quad y_\varepsilon \in D.$$

Кроме того, $\rho(x_0) > 0$, поскольку $x_0 \in \operatorname{int} D$. Поэтому, применяя утверждение б) леммы 4, получаем

$$\rho'(x_0, g_\varepsilon) \le \delta_\varepsilon \frac{\rho(x_0)}{R(x_0)} + \sqrt{(1-\delta_\varepsilon^2)\Big(1 - \frac{\rho^2(x_0)}{R^2(x_0)}\Big)}. \tag{2.23}$$

Теперь оценка (2.22) следует из (2.17) и (2.23). $\square$

Лемма 7. *Справедливо неравенство*

$$|\Phi(x_0) - \Phi(x_\varepsilon)| \le 4\varepsilon. \tag{2.24}$$

Доказательство. Обозначим через

$$R_\varepsilon(x) = \max_{y \in D_\varepsilon} \|x - y\|, \quad \rho_\varepsilon(x) = \min_{y \in \Omega_\varepsilon} \|x - y\|, \quad \Omega_\varepsilon = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D_\varepsilon}. \tag{2.25}$$

В соответствии с (1.3) и (1.5) имеем

$$|h_0(D) - h_0(D_\varepsilon)| = |(R(x_0) - \rho(x_0))/2 - (R_\varepsilon(x_\varepsilon) - \rho_\varepsilon(x_\varepsilon))/2| \le \varepsilon. \tag{2.26}$$

Из (2.26) для функции $\Phi_\varepsilon(x) = R_\varepsilon(x) - \rho_\varepsilon(x)$ получаем $|\Phi(x_0) - \Phi_\varepsilon(x_\varepsilon)| \le 2\varepsilon$. Отсюда вытекает

$$|\Phi(x_\varepsilon) - \Phi(x_0)| - |\Phi_\varepsilon(x_\varepsilon) - \Phi(x_\varepsilon)| \le 2\varepsilon. \tag{2.27}$$

Нетрудно видеть, что

$$|\Phi_\varepsilon(x_\varepsilon) - \Phi(x_\varepsilon)| \le |R_\varepsilon(x_\varepsilon) - R(x_\varepsilon)| + |\rho_\varepsilon(x_\varepsilon) - \rho(x_\varepsilon)|, \tag{2.28}$$

а из (1.4) следуют оценки

$$|R_\varepsilon(x_\varepsilon) - R(x_\varepsilon)| \le \varepsilon, \quad |\rho_\varepsilon(x_\varepsilon) - \rho(x_\varepsilon)| \le \varepsilon. \tag{2.29}$$

Теперь из (2.27)–(2.29) получаем (2.24). $\square$

3. Основной результат

Искомую оценку устойчивости центра шара наилучшего приближения найдем при условии, что сам приближаемый выпуклый компакт D отличен от евклидова шара. Это, в частности, означает, что $\rho(x_0) < R(x_0)$.

Теорема. *Справедливо асимптотическое неравенство*

$$\|x_0 - x_\varepsilon\| \le 4R(x_0)\sqrt{\frac{2\varepsilon(1+o(1))}{R(x_0)-\rho(x_0)}}, \tag{3.1}$$

где $o(1) \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Доказательство. 1) Рассмотрим случай, когда $\operatorname{int} D \ne \emptyset$. Тогда, как показано в [1],

$$x_0 \in \operatorname{int} D, \quad x_\varepsilon \to x_0, \quad \varepsilon \downarrow 0. \tag{3.2}$$

Следовательно, при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ можно считать

$$x_\varepsilon \in D. \tag{3.3}$$

Обозначим через $D_0 = B(x_0, R(x_0)) \cap B(x_\varepsilon, R(x_\varepsilon))$, $R_0(x) = \max\limits_{y\in D_0} \|x-y\|$. Очевидно, для функции $R_0(x)$ выполняется

$$R_0(x_0) = R(x_0), \quad R_0(x_\varepsilon) = R(x_\varepsilon), \tag{3.4}$$

а также, поскольку $D \subset D_0$,

$$R(x) \le R_0(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^p. \tag{3.5}$$

Так как x_0 является одновременно точкой минимума функции $\Phi(x)$ на множестве D, то в силу вогнутости функции $\rho(x)$ на D, соотношений (3.3)–(3.5) и леммы 3 получаем

$$\begin{aligned}\Phi(x_0) &\le \Phi\left(\frac{1}{2}(x_0+x_\varepsilon)\right) \le R_0\left(\frac{1}{2}(x_0+x_\varepsilon)\right) - \rho\left(\frac{1}{2}(x_0-x_\varepsilon)\right) \le \\ &\le \frac{1}{2}(R_0(x_0)-\rho(x_0)) + \frac{1}{2}(R_0(x_\varepsilon)-\rho(x_\varepsilon)) - \frac{1}{4}\frac{\|x_0-x_\varepsilon\|^2 - (R_0(x_0)-R_0(x_\varepsilon))^2}{R_0(x_0)+R_0(x_\varepsilon)} = \\ &= \frac{1}{2}\Phi(x_0) + \frac{1}{2}\Phi(x_\varepsilon) - \frac{1}{4}\frac{\|x_0-x_\varepsilon\|^2 - (R_0(x_0)-R_0(x_\varepsilon))^2}{R_0(x_0)+R_0(x_\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Отсюда согласно лемме 7 имеем

$$\frac{\|x_0-x_\varepsilon\|^2 - (R(x_0)-R(x_\varepsilon))^2}{8(R(x_0)+R(x_\varepsilon))} \le \varepsilon. \tag{3.6}$$

Для выпуклой конечной функции $R(x)$ можно записать асимтотическое представление (напр., [13], с. 45–46)

$$R(x_\varepsilon) = R(x_0) + R'(x_0, x_\varepsilon - x_0) + o(\|x_\varepsilon - x_0\|), \tag{3.7}$$

где с учетом (3.2) $o(\|x_\varepsilon - x_0\|)/\|x_\varepsilon - x_0\| \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Обозначив

$$g_\varepsilon = (x_\varepsilon - x_0)\|x_\varepsilon - x_0\|^{-1}, \quad \delta_\varepsilon = R'(x_0, g_\varepsilon),$$

асимптотическую формулу (3.7) можно переписать в виде

$$R(x_\varepsilon) = R(x_0) + \|x_\varepsilon - x_0\|(\delta_\varepsilon + o(1)), \tag{3.8}$$

где $o(1) \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Подставляя (3.8) в (3.6), получаем

$$\frac{\|x_0 - x_\varepsilon\|^2 (1 - (\delta_\varepsilon + o(1))^2)}{16R(x_0)(1 + o_1(1))} \le \varepsilon, \tag{3.9}$$

где $o_1(1) \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Выпуклая конечная на множестве D функция $\Phi(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in \operatorname{int} D$ по любому направлению и при этом (см. [13], с. 56)

$$\Phi(x_\varepsilon) - \Phi(x_0) \ge \Phi'(x_0, x_\varepsilon - x_0) = \Phi'(x_0, g_\varepsilon)\|x_\varepsilon - x_0\|.$$

Отсюда в силу леммы 7 имеем

$$\Phi'(x_0, g_\varepsilon)\|x_\varepsilon - x_0\| \le 4\varepsilon. \tag{3.10}$$

Легко убедиться, что если $\delta_\varepsilon > \rho(x_0)/R(x_0)$, то

$$\Delta_\varepsilon \equiv \delta_\varepsilon \left(1 - \frac{\rho(x_0)}{R(x_0)}\right) - \sqrt{(1 - \delta_\varepsilon^2)\left(1 - \frac{\rho^2(x_0)}{R^2(x_0)}\right)} > 0.$$

Поэтому, подставив оценку (2.22) в (3.10), получим

$$\|x_0 - x_\varepsilon\| \le \frac{4\varepsilon}{\Delta_\varepsilon} \quad \forall \delta_\varepsilon : \frac{\rho(x_0)}{R(x_0)} < \delta_\varepsilon \le 1. \tag{3.11}$$

Обозначим через

$$\gamma = \sqrt{\frac{R(x_0) + \rho(x_0)}{2R(x_0)}}, \quad \gamma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(R(x_0) - \rho(x_0))}}.$$

Из леммы 5 и (2.16) вытекает $\delta_\varepsilon \in [-\gamma, 1]$.

Теперь, используя для оценки $\|x_0 - x_\varepsilon\|$ неравенство (3.9) при значениях $\delta_\varepsilon \in [-\gamma, \gamma + \gamma_\varepsilon]$ и неравенство (3.11) при значениях $\delta_\varepsilon \in [\gamma + \gamma_\varepsilon, 1]$, имеем

$$\|x_0 - x_\varepsilon\| \le \max\{f_1(\varepsilon), f_2(\varepsilon)\}, \tag{3.12}$$

где $f_1(\varepsilon) = \max\limits_{\delta_\varepsilon \in [-\gamma, \gamma + \gamma_\varepsilon]} 4\sqrt{\frac{\varepsilon R(x_0)(1+o(1))}{1 - \delta_\varepsilon^2}}$, $f_2(\varepsilon) = \max\limits_{\delta_\varepsilon \in [\gamma + \gamma_\varepsilon, 1]} \frac{4\varepsilon}{\Delta_\varepsilon}$.

Для значений $\delta_\varepsilon \ge \gamma$ выполняется $1 - \delta_\varepsilon^2 \le (R(x_0) - \rho(x_0))/2R(x_0)$. Тогда легко видеть, что $\Delta_\varepsilon \ge \Delta_\varepsilon^0 \equiv (R(x_0) - \rho(x_0))(\delta_\varepsilon - \gamma)/R(x_0)$ и, следовательно,

$$f_2(\varepsilon) \le f_3(\varepsilon) \equiv \max_{\delta_\varepsilon \in [\gamma + \gamma_\varepsilon, 1]} \frac{4\varepsilon}{\Delta_\varepsilon^0}. \tag{3.13}$$

Нетрудно убедиться, что

$$f_1(\varepsilon) = 4R(x_0)\sqrt{\frac{2\varepsilon(1 + o(1))}{R(x_0) - \rho(x_0)}}, \quad f_3(\varepsilon) = 4R(x_0)\sqrt{\frac{2\varepsilon}{R(x_0) - \rho(x_0)}}, \tag{3.14}$$

где $o(1) \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Из (3.12) согласно (3.13)–(3.14) получаем (3.1).

2) Предположим теперь, что $\operatorname{int} D = \emptyset$. В этом случае задача (1.2), а значит, и задача (1.1) эквивалентны задаче

$$R(x) \to \min_{x \in D}. \tag{3.15}$$

Но поскольку центр наименьшего евклидова шара, содержащего заданный выпуклый компакт, принадлежит этому компакту [5], то задача (3.15) эквивалентна задаче

$$R(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \tag{3.16}$$

Ее решение, точка x_0, является в рассматриваемом случае одновременно центром шара наилучшего приближения компакта D. Устойчивость решения задачи (3.16) рассматривалась одним из авторов данной статьи ранее и в результате получена следующая асимптотическая оценка [16]:

$$\|x_0 - \widehat{x}_\varepsilon\| \le 4\sqrt{\varepsilon(R(x_0) + o(1))}, \tag{3.17}$$

где $o(1) \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$, а $\widehat{x}_\varepsilon$ — решение задачи $R_\varepsilon(x) \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p}$. Здесь функция $R_\varepsilon(x)$, как и ниже функция $\rho_\varepsilon(x)$, определена в (2.25).

Известно [5], что точка $\widehat{x}_\varepsilon$ обладает свойством

$$\widehat{x}_\varepsilon \in \mathrm{co}\{y : y \in Q^{R_\varepsilon}(\widehat{x}_\varepsilon)\}, \tag{3.18}$$

где $Q^{R_\varepsilon}(\widehat{x}_\varepsilon) = \{y \in D_\varepsilon : R_\varepsilon(\widehat{x}_\varepsilon) = \|\widehat{x}_\varepsilon - y\|\}$. Соотношение (3.18) эквивалентно

$$0_p \in \mathrm{co}\{\widehat{x}_\varepsilon - y : y \in Q^{R_\varepsilon}(\widehat{x}_\varepsilon)\}. \tag{3.19}$$

С другой стороны, задача наилучшего приближения выпуклого компакта D_ε эквивалентна задаче $\Phi_\varepsilon(x) \equiv R_\varepsilon(x) - \rho_\varepsilon(x) \to \min\limits_{x\in D_\varepsilon}$, решение которой обозначено через x_ε. Очевидно, $R_\varepsilon(x_\varepsilon) - \rho_\varepsilon(x_\varepsilon) \le R_\varepsilon(\widehat{x}_\varepsilon)$. Отсюда, поскольку предположение $\mathrm{int}\, D = \emptyset$ влечет $\rho_\varepsilon(x) \le \varepsilon$ для $x \in D_\varepsilon$, имеем

$$R_\varepsilon(x_\varepsilon) \le R_\varepsilon(\widehat{x}_\varepsilon) + \varepsilon. \tag{3.20}$$

Из (3.19) следует, что найдется точка $\widehat{y} \in Q^{R_\varepsilon}(\widehat{x}_\varepsilon)$ такая, что

$$\langle \widehat{y} - \widehat{x}_\varepsilon, \widehat{x}_\varepsilon - x_\varepsilon \rangle \ge 0. \tag{3.21}$$

Используя неравенство (3.21) и то, что $\widehat{y} \in D_\varepsilon$ и $R_\varepsilon(\widehat{x}_\varepsilon) = \|\widehat{y} - \widehat{x}_\varepsilon\|$, получаем

$$R^2_\varepsilon(x_\varepsilon) \ge \|\widehat{y} - x_\varepsilon\|^2 = \|\widehat{y} - \widehat{x}_\varepsilon\|^2 + \|\widehat{x}_\varepsilon - x_\varepsilon\|^2 + 2\langle \widehat{y} - \widehat{x}_\varepsilon, \widehat{x}_\varepsilon - x_\varepsilon \rangle \ge R^2_\varepsilon(\widehat{x}_\varepsilon) + \|\widehat{x}_\varepsilon - x_\varepsilon\|^2. \tag{3.22}$$

Из (3.20) и (3.22) вытекает $(R_\varepsilon(\widehat{x}_\varepsilon) + \varepsilon)^2 \ge R^2_\varepsilon(\widehat{x}_\varepsilon) + \|x_\varepsilon - \widehat{x}_\varepsilon\|^2$ или

$$\|\widehat{x}_\varepsilon - x_\varepsilon\| \le \sqrt{2\varepsilon R_\varepsilon(\widehat{x}_\varepsilon) + \varepsilon^2}. \tag{3.23}$$

А поскольку $\widehat{x}_\varepsilon \to x_0$ при $\varepsilon \downarrow 0$ и $|R_\varepsilon(x) - R(x)| \le \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{R}^p$, то из (3.23) следует

$$\|\widehat{x}_\varepsilon - x_\varepsilon\| \le \sqrt{2\varepsilon(R(x_0) + o(1))}. \tag{3.24}$$

Теперь из (3.17) и (3.24) имеем

$$\|x_0 - x_\varepsilon\| \le (4 + \sqrt{2})\sqrt{\varepsilon(R(x_0) + o(1))} \le 4\sqrt{2\varepsilon(R(x_0) + o(1))}.$$

Таким образом, учитывая $\rho(x_0) = 0$, приходим к выводу, что асимптотическая оценка (3.1) имеет место и в случае $\mathrm{int}\, D = \emptyset$. $\square$

Литература

1. Никольский М.С., Силин Д.Б. *О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала* // Тр. МИРАН. – 1995. – Т. 211. – С. 338–354.
2. D'Ocagne M. *Sur certaine figures minimales* // Bull. Soc. Math. France. – 1884. – V. 12. – P. 168–177.
3. Lebesgue H. *Sur quelques questions de minimum, relatives and courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations* // J. Math. Pures Appl. – 1921. – V. 4. – P. 67–96.
4. Bonnesen T. *Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren* // Math. Ann. – 1924. – Bd. 91. – S. 252–268.
5. Боннезен Т., Фенхель В. *Теория выпуклых тел.* – М.: Фазис, 2002. – 210 с.
6. Vincze St. *Über den Minimalkreisring einer Eiline* // Acta Sci. Math. Acta Univ. Szeged. – 1947. – Bd. 11. – № 3. – S. 133–138.

7. Vincze I. *Über Kreisringe, die eine Eiline einschlissen* // Studia Sci. Math. Hungarica. – 1974. – Bd. 9. – № 1/2. – S. 155–159.
8. Kritikos N. *Über konvexe Flachen und einschlissende Kugeln* // Math. Ann. – 1927. – Bd. 96. – S. 583–586.
9. Barany I. *On the minimal ring containing the boundary of convex body* // Acta Sci. Math. Acta Univ. Szeged. – 1988. – V. 52. – № 1/2. – P. 93–100.
10. Zucco A. *Minimal shell of a typical convex body* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – V. 109.– № 3. – P. 797–802.
11. Дудов С.И., Златорунская И.В. *Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы* // Матем. сб. – 2000. – Т. 191. – № 10. – С. 13–38.
12. Dudov S.I., Zlatorunskaya I.V. *Best approximation of a compact convex set by a ball in an arbitrary norm* // Advances in Math. Research. Nova Science Publishers, Inc. – 2003. – V. 2. – P. 81–114.
13. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. *Недифференцируемая оптимизация.* – М.: Наука, 1981. – 384 с.
14. Пшеничный Б.Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи.* – М.: Наука, 1980. – 319 с.
15. Половинкин Е.С. *Сильно выпуклый анализ* // Матем. сб. – 1996. – Т. 187. – № 2. – С. 102-130.
16. Дудова А.С. *Об устойчивости задачи о внешней оценке компакта шаром произвольной нормы* // Тез. докл. 12-й Сарат. зимней школы. Современ. проблемы теории функций и их приложения. Саратов, 2004. – С. 75–76.

Саратовский государственный университет

Поступила
09.11.2004