ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

УДК 517.51

В.Л. КРЕПКОГОРСКИЙ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА И ЛИЗОРКИНА–ТРИБЕЛЯ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ $p_0 = \infty$

В [1] и [2] было показано, что интерполируя пару пространств Бесова $(B^{s_0}_{p_0}(R_n), B^{s_1}_{p_1}(R_n))_{\theta,q}$, $0 < p_i < \infty$, $s_0 \ne s_1$, $p_0 \ne p_1$, получим пространства типа $BL^{s,k}_{p,q}$. Пространства этого типа получаются также при интерполяции пространств Лизоркина–Трибеля $(F^{s_0}_{p_0,q_0}, F^{s_1}_{p_1,q_1})_{\theta,q}$, $0 < p_i < \infty$. В данной работе эти результаты распространяются на случай $p_0 = \infty$. Ряд известных пространств отождествляется с $F^s_{\infty,q}(R_n)$ или $B^s_\infty(R_n)$, например, пространства Гёльдера–Зигмунда $G^s = B^s_\infty$, $bmo = F^s_{\infty,2}$ и $L_p = F^0_{p,2}$. Здесь получены интерполяционные теоремы для пар пространств вида (G, F), (G, B), (bmo, F), (G, L_p).

1. Основные определения и обозначения

Пусть S' — множество всех комплекснозначных умеренных распределений на R_n, а Ff — преобразование Фурье распределения $f \in S'$. Рассмотрим функциональные пространства нескольких типов.

(i) *Пространства Лебега с весом* $L_p(\omega)$. Пусть $0 < p \le \infty$, $\omega \ne 0$ — п. в.-весовая функция. Тогда $\|f|L_p(\omega)\| = \|f(x)\omega(x)|L_p\|$.

(ii) *Пространства Лоренца с весом* $L_{p,q}(\omega, \lambda\mu)$. Пусть $0 < p, q \le \infty$, $\omega(x)$ и $\lambda(x)$ — измеримые функции, μ — мера, и $\lambda\mu$ — мера, которая определена равенством $\lambda\mu(E) := \int\limits_E \lambda(x)d\mu(x)$. Тогда

$$\|f|L_{p,q}(\omega,\lambda\mu)\| := \Big(\int_0^\infty (t^{1/p}(f(x)\omega(x))^{*(\lambda\mu)})^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q}, \quad q < \infty,$$
$$\|f|L_{p,\infty}(\omega,\lambda\mu)\| := \sup_{t\in R_+} (t^{1/p}(f(x)\omega(x))^{*(\lambda\mu)});$$

здесь $(g(x))^{*(\lambda\mu)}$ — невозрастающая равноизмеримая относительно меры $\lambda\mu$ перестановка функции $g(x)$, зависящая от аргумента $t \in (0, \infty)$.

(iii) *Пространства Гёльдера–Зигмунда* $G^s(R_n)$. Для вещественного $s > 0$ положим $s = [s] + \{s\}$, где $[s]$ целое и $0 \le \{s\} < 1$. Пусть

$$G^s(R_n) = \Big\{f \mid f \in C^{[s]}(R_n) : \|f|G^s\| = \|f|C^{[s]}\| + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{x\ne y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^{\{s\}}} < \infty,\ x \in R_n,\ y \in R_n\Big\}$$

при не целом s. Далее, если $f(x)$ — произвольная функция на R_n и $h \in R_n$, то для целого $s > 0$ положим

$$G^s(R_n) = \Big\{f \mid f \in C^{s-1} : \|f|G^s\| = \|f|C^{s-1}\| + \sum_{|\alpha|=s-1} \sup_{0\ne h\in R_n} |h|^{-1}\|\Delta_h^2 D^\alpha f|C(R_n)\| < \infty\Big\}.$$

(iv) *Пространства Бесова* B^s_p *и Лизоркина–Трибеля* $F^s_{p,q}$. Если $0 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $0 < q \le \infty$, то

$$F^s_{p,q}(R_n) = \{f \mid f \in S'(R_n) : \|f|F^s_{p,q}\| = \|2^{sj}F^{-1}\phi_j Ff|L_p[\ell_q]\| < \infty\},$$

где $j = 0, 1, 2, \dots$, $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$, Φ — специальный класс последовательностей функций ([3], с. 57); положим $F^s_{\infty,q}(R_n) := (F^{-s}_{1,q'}(R_n))'$ при $1 < q \le \infty$, $B^s_p(R_n) := F^s_{p,p}(R_n)$ при $0 < p \le \infty$.

(v) *Пространства* $L^{s,k}_{p,q}(Z_+ \times R_n)$. Пусть $-\infty < s < \infty$, $-\infty < k < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Тогда

$$L^{s,k}_{p,q} := \{(f)_{j=0}^{\infty} | f_j \in S' : \|(f_j)|L^{s,k}_{p,q}\| = \|(f_j)|L_{p,q}(2^{j(s-k/p)}, 2^{jk}\nu \times m_n)\| < \infty\},$$

где ν — мера на Z_+ такая, что $\nu(n) = 1$.

(vi) *Пространства* $BL^{s,k}_{p,q}(R_n)$. Пусть $-\infty < s < \infty$, $-\infty < k < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$. Тогда

$$BL^{s,k}_{p,q} = \{f \mid f \in S'(R_n) : \|f|BL^{s,k}_{p,q}\| = \|F^{-1}\phi_j Ff|L^{s,k}_{p,q}\| < \infty\}.$$

(vii) *Пространство* $bmo(R_n)$ (неоднородное BMO). Если $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(R_n)$, Q — куб в R_n и $|Q|$ — объем Q, то

$$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$$

и

$$bmo(R_n) = \left\{f \mid f \in L_1^{\mathrm{loc}} : \|f|bmo(R_n)\| = \sup_{|Q|\le 1} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx + \sup_{|Q|>1} \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x)|dx < \infty\right\}.$$

2. Интерполяция в классах пространств Лизоркина-Трибеля и Бесова в случае $p_0 = \infty$

В [1] доказано, что

$$(B^{s_0}_{p_0}(R_n), B^{s_1}_{p_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n) \tag{1}$$

при $-\infty < s_0, s_1, k < \infty$, $0 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < q \le \infty$, $p_0 \ne p_1$, $s_0 \ne s_1$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, k — угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(1/p_i, s_i)$, $i = 0, 1$. Кроме того,

$$(F^{s_0}_{p_0,q_0}(R_n), F^{s_1}_{p_1,q_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n) \tag{2}$$

при дополнительных условиях $1 < p_0, p_1 < \infty, 1 \le q \le \infty$.

Основная цель этого параграфа — доказать, что формула (1) справедлива при $0 < p_0, p_1 \le \infty$, а формула (2) — при $1 \le p_0, p_1 < \infty$, $1 \le q \le \infty$.

Лемма. *При* $k \ne 0$ *и* $q \in [1, \infty]$ *справедливы вложения*

$$BL^{s,k}_{1,1} \subset F^s_{1,q} \subset BL^{s,k}_{1,\infty}.$$

Следствие. Пусть $-\infty < s_0, s_1, k < \infty$, $0 \le q_0, q_1, q \le \infty$, $0 < p_1 < \infty$, $s_0 \ne s_1$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $1/p = (1-\theta) + \theta/p_1$, k — угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(1, s_0)$ и $B(1/p_1, s_1)$. Тогда

$$(F^{s_0}_{1,q_0}(R_n), F^{s_1}_{p_1,q_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n).$$

Теперь можно сформулировать интерполяционную теорему для пространств $B^s_p(R_n)$ и $F^s_{p,q}(R_n)$ в предельном случае $p_0 = \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $0 < p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$, $1 \le q_1 \le \infty$, $1 < q_0 \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $s_0 \ne s_1$, $k = p_1(s_1 - s_0)$ — *угловой коэффициент прямой, проходящей через точки* $(0, s_0)$ *и* $(1/p_1, s_1)$. *Тогда*

$$(B^{s_0}_{\infty}(R_n), B^{s_1}_{p_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n).$$

Если, кроме того, $1 \le p_1 < \infty$, *то*

$$(F^{s_0}_{\infty,q_0}(R_n), F^{s_1}_{p_1,q_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n).$$

3. Интерполяционные теоремы для пространств Гёльдера–Зигмунда, bmo, Лебега

Как следствия полученных результатов можно сформулировать следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть* а) $s_0 > 0$, $s_0 \neq s_1$, $0 < p_1 < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $1/p = \theta/p_1$, $k = p_1(s_1 - s_0)$, *тогда*

$$(G^{s_0}(R_n), B^{s_1}_{p_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n);$$

б) $(G^{s_0}(R_n), F^{s_1}_{p_1,q_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n)$ *при дополнительных условиях* $1 \leq p_1 < \infty$, $1 \leq q_1 \leq \infty$.

Теорема 3. *Если* $-\infty < s_1 < \infty$, $s_1 \neq 0$, $1 \leq p_1 < \infty$, $1 \leq q_1 \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = \theta s_1$, $1/p = \theta/p_1$, $k = p_1 s_1$, *то*

$$(bmo(R_n), F^{s_0}_{p_1,q_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n).$$

Теорема 4. *Если* $0 < s_0$, $1 < p_1 < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)s_0$, $1/p = \theta/p_1$, $k = -p_1 s_0$, *то*

$$(G^{s_0}(R_n), L_{p_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n).$$

Литература

1. Крепкогорский В.Л. *Интерполяция в пространствах Лизоркина–Трибеля и Бесова* // Матем. сб. – 1994. – Т. 185. – № 7. – С. 63–76.
2. Крепкогорский В.Л. *Интерполяция и теоремы вложения для квазинормированных пространств Бесова* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 7. – С. 23–29.
3. Трибель Х. *Теория функциональных пространств.* – М.: Мир, 1986. – 447 с.

Казанский филиал
высшего военного
артиллерийского университета

Поступила
12.01.1999