Известия вузов. Математика
2013, №3, с. 68–73

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение, представленное В.В. Васиным

В.И. ЖЕГАЛОВ, И.М. САРВАРОВА

К УСЛОВИЯМ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГУРСА В КВАДРАТУРАХ

Аннотация. На основе комбинации метода Римана с каскадным интегрированием выделены новые варианты решения задачи Гурса в квадратурах. Результаты применены к двум уравнениям Вольтерра с частными интегралами.

Ключевые слова: задача Гурса, функция Римана, каскадный метод, решение в квадратурах, уравнения Вольтерра.

УДК: 517.956

Рассматривается задача об отыскании в области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ регулярного решения уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f \tag{1}$$

по условиям

$$u(x_0, y) = \varphi(y), \quad u(x, y_0) = \psi(x), \quad \varphi(y_0) = \psi(x_0), \quad x \in [x_0, x_1], \quad y \in [y_0, y_1].$$

Хорошо известно ([1], с. 172; [2], с. 147) решение такой задачи методом Римана

$$\begin{aligned} u(x,y) = R(x, y_0, x, y)\psi(x) + R(x_0, y, x, y)\varphi(y) - R(x_0, y_0, x, y)\psi(x_0) + \\ + \int_{x_0}^{x} \left[b(\alpha, y_0)R(\alpha, y_0, x, y) - \frac{\partial}{\partial\alpha}R(\alpha, y_0, x, y)\right]\psi(\alpha)d\alpha + \\ + \int_{y_0}^{y} \left[a(x_0, \beta)R(x_0, \beta, x, y) - \frac{\partial}{\partial\beta}R(x_0, \beta, x, y)\right]\varphi(\beta)d\beta + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} R(\alpha, \beta, x, y)f(\alpha, \beta)d\beta\, d\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

При этом разрешимость в квадратурах получается в случаях, когда соответствующая функция Римана R записывается в явном виде. Подобных случаев немного, но они имеются ([2], с. 15–20; [3]). Целью нашего исследования является увеличение числа вариантов указанного типа. Приводятся также примеры применения получаемых результатов к решению интегральных уравнений Вольтерра.

1. Исходным моментом для наших рассуждений служит метод каскадного интегрирования Лапласа. Как известно ([4], с. 177–181), существенную роль в этом методе играют конструкции

$$h = a_x + ab - c, \quad k = b_y + ab - c.$$

Поступила 26.06.2012

Если $k \equiv 0$ или $h \equiv 0$, то функция Римана $R(x, y; \xi, \eta)$ для уравнения (1) строится в явном виде ([2], формулы (1.23), (1.24)). Если же $h \neq 0$ или $k \neq 0$, то можно построить уравнения вида (1)

$$\frac{\partial^2 u_{\pm 1}}{\partial x \partial y} + a_{\pm 1} \frac{\partial u_{\pm 1}}{\partial x} + b_{\pm 1} \frac{\partial u_{\pm 1}}{\partial y} + c_{\pm 1} u_{\pm 1} = f_{\pm 1}, \tag{3}$$

где коэффициенты $a_{\pm 1}$, $b_{\pm 1}$, $c_{\pm 1}$ задаются формулами (3) из ([4], с. 179), а

$$f_1 = [a - (\ln h)_y] f - f_y, \quad f_{-1} = [b - (\ln k)_x] f - f_x. \tag{4}$$

В (4) и далее индекс $+1$ пишется как “1”. Роль h, k для (3) играют

$$h_1 = 2h - k - (\ln h)_{xy}, \quad k_1 = h; \quad h_{-1} = k, \quad k_{-1} = 2k - h - (\ln k)_{xy}.$$

При этом, если регулярность получаемого по формуле (2) решения обеспечивается при $h \equiv 0$ или $k \equiv 0$ условиями $a, b, c, a_x, b_y, f \in C(\overline{D})$, то при вычислениях, связанных с $h_1 \equiv 0$ ($k_{-1} \equiv 0$), уже требуется дополнительная гладкость $a \in C^{(2,1)}$, $b, c \in C^{(1,1)}$, $f \in C^{(0,1)}$ ($b \in C^{(1,2)}$, $a, c \in C^{(1,1)}$, $f \in C^{(1,0)}$). Из сказанного выше ясно, что при $hk \neq 0$ функции Римана для уравнений (3) строятся в явном виде, если $h_1 \equiv 0$ или $k_{-1} \equiv 0$. Обеспечивающие выполнение этих двух тождеств условия на коэффициенты исходного уравнения (1) можно записать в терминах следующих соотношений:

$$b_y - a_x \equiv a_x + ab - c \equiv \alpha_1(x)\beta_1(y) \neq 0, \tag{5}$$

$$a_x - b_y \equiv b_y + ab - c \equiv \alpha_2(x)\beta_2(y) \neq 0, \tag{6}$$

$$m a_x - b_y \equiv m b_y - a_x \equiv (m-1)(ab - c), \tag{7}$$

$$\omega \equiv \frac{2s'(x)t'(y)}{(2-m)[s(x) + t(y)]^2}, \quad s'(x)t'(y) \neq 0, \quad s(x) + t(y) \neq 0, \tag{8}$$

где a, b, c удовлетворяют условиям гладкости, сформулированным при выводе (3), $\alpha_k, \beta_k \in C^1$, $s, t, m \in C^2$, причем функция m зависит лишь от одной из переменных (x, y) и не принимает значение 2. Классы гладкости указаны на замкнутых множествах определения соответствующих функций.

Лемма 1. *Пусть существуют функции α_k, β_k, m, s, t указанных выше классов, для которых имеет место хоть одна из групп соотношений* (5)–(6)*, или при выполнении тождеств* (7) *хотя бы одна из комбинаций h, k имеет вид ω из* (8)*. Тогда функция Римана хотя бы для одного из уравнений* (3) *записывается в явном виде.*

Доказательство в каждом из перечисленных вариантов (5)–(8) состоит в непосредственном построении функций Римана с использованием аналогов формул (1.23), (1.24) из [2] и (3) из ([4], с. 179). Эти функции Римана будем отмечать теми же индексами, что и искомые функции уравнений (3). В результате такого построения имеем в случаях тождеств (5), (6)

$$R_1 = \frac{\beta_1(\eta)}{\beta_1(y)} R, \quad R_{-1} = \frac{\alpha_2(\xi)}{\alpha_2(x)} R, \tag{9}$$

а в вариантах, связанных с соотношениями (7), (8), —

$$R_1 = \frac{t'(\eta)}{t'(y)} \left[\frac{s(\xi) + t(y)}{s(\xi) + t(\eta)}\right]^2 R, \quad R_{-1} = \frac{s'(\xi)}{s'(x)} \left[\frac{s(x) + t(\eta)}{s(\xi) + t(\eta)}\right]^2 R. \tag{10}$$

При этом первая формула из (10) получена в предположении $m = m(x)$, а вторая — в случае $m = m(y)$. Если же при построении R_1 считать $m = m(y)$, то в правой части у этой функции надо добавить множитель $\frac{2-m(y)}{2-m(\eta)}$. Аналогично при замене $m(y)$ на $m(x)$ в правой части у R_{-1} добавляется множитель $\frac{2-m(x)}{2-m(\xi)}$. Заметим,что для получения формул (10) используется ([1], с. 321–322) представление решения уравнения Лиувилля $u_{xy} = \exp u$ через функции s, t. Мы не записали в (9), (10) аргументы функций Римана: это всегда набор $(x, y; \xi, \eta)$, а под R понимаются функции Римана из формул (1.23), (1.24) (см. [2]).

На основании приведенных выше формул можно считать лемму доказанной.

При построении решений задач Гурса с использованием R_1 и R_{-1} необходимо знать граничные значения

$$u_1(x_0, y) = \varphi_1(y), \quad u_1(x, y_0) = \psi_1(x), \quad u_{-1}(x_0, y) = \varphi_{-1}(y), \quad u_{-1}(x, y_0) = \psi_{-1}(x), \qquad (11)$$

удовлетворяющие условиям согласования

$$\varphi_1(y_0) = \psi_1(x_0), \quad \varphi_{-1}(y_0) = \psi_{-1}(x_0).$$

Получить значения (11) нетрудно с помощью формул типа (1) из ([4], с. 177), которые для φ_1 и ψ_1 сразу дают их значения через φ и ψ, а в случаях φ_{-1}, ψ_{-1} требуется решить хорошо известные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. С помощью тех же формул типа (1) из ([4], с. 177) вычисляется искомая функция $u(x, y)$ либо через u_1, либо через u_{-1}. Только нужно еще требовать, чтобы $\varphi, \psi \in C^2$. Поэтому имеет место

Теорема 1. *Если при $hk \neq 0$ выполнены условия леммы и при этом $\varphi(y) \in C^2[y_0, y_1]$, $\psi(x) \in C^2[x_0, x_1]$, то задача Гурса для уравнения* (1) *решается в квадратурах.*

Приведем примеры выполнения условий теоремы. Пусть λ_k, μ_k, ν_k — произвольные функции указываемых далее классов и каждая их этих функций зависит только от одной из переменных (x, y). Запишем некоторые структурные представления коэффициентов уравнения (1): для каждого набора представлений выполняется какая-либо группа тождеств (5), (6) или (7), (8).

$$\text{Случай 1.} \quad a = \lambda_1(y), \quad b = \mu_1(x)\nu_1(y), \quad c = \lambda_1(y)\mu_1(x)\nu_1(y) - \mu_1(x)\nu_1'(y),$$
$$\nu_1'\mu_1 \neq 0, \quad \lambda_1 \in C, \quad \mu_1 \in C^1, \quad \nu_1 \in C^2.$$
$$\text{Случай 2.} \quad a = \lambda_2(x)\mu_2(y), \quad b = \nu_2(x), \quad c = \lambda_2(x)\mu_2(y)\nu_2(x) - \mu_2(y)\lambda_2'(x),$$
$$\lambda_2'\mu_2 \neq 0, \quad \lambda_2 \in C^2, \quad \mu_2 \in C^1, \quad \nu_2 \in C.$$

Путем непосредственной проверки нетрудно усмотреть, что в случае 1 выполняются условия (5) при $\alpha_1 = \mu_1(x)$, $\beta_1 = \nu_1'(y)$, а для случая 2 при $\alpha_2 = \lambda_2'(x)$, $\beta_2 = \mu_2(y)$ имеют место тождества (6).

$$\text{Случай 3.} \quad a = \frac{\nu_3'(y)}{\mu_3(x) + \nu_3(y)}, \quad b = \frac{\mu_3'(x)}{\mu_3(x) + \nu_3(y)}, \quad c = \frac{2\mu_3'(x)\nu_3'(y)}{[\mu_3(x) + \nu_3(y)]^2},$$
$$\mu_3'(x)\nu_3'(y) \neq 0, \quad \mu_3(x) + \nu_3(y) \neq 0, \quad \mu_3, \nu_3 \in C^1, \quad m \equiv 1.$$

Здесь выполняется набор тождеств (7), а (8) имеет место как для $\omega = h$, так и для $\omega{=}k$, причем $s = \mu_3(x)$, $t = \nu_3(y)$. Здесь условия тоже проверяются непосредственными вычислениями.

Мы видим, что каждый из случаев 1–3 описывает бесконечное множество уравнений вида (1), для которых задача Гурса разрешима в квадратурах.

2. Покажем возможность применения изложенных результатов к решению уравнений Вольтерра с частными интегралами [5]. Сделаем это на примерах двух уравнений:

$$u(x,y)+a_1(x,y)\int_{x_0}^{x} b_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+a_2(x,y)\int_{y_0}^{y} b_2(x,\eta)u(x,\eta)d\eta=f(x,y), \tag{12}$$

$$u(x,y)+a_1(x,y)\int_{x_0}^{x} b_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+a_2(x,y)\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} b_2(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi=f(x,y). \tag{13}$$

Пусть в (12) $b_1b_2\neq 0$. Тогда, сделав в этом уравнении две последовательные замены искомой функции:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} b_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi,\quad V(x,y)=\int_{y_0}^{y}\frac{b_2(x,\eta)}{b_1(x,\eta)}U_x(x,\eta)d\eta,$$

придем к системе

$$U_x=\alpha U+\beta V+f_1,\quad V_y=\gamma U+\delta V+f_2 \tag{14}$$

с условиями $U(x_0,y)=V(x,y_0)=0$. При этом коэффициенты в (14) определяются по формулам

$$\alpha=-a_1b_1,\quad \beta=-a_2b_1,\quad f_1=b_1f,$$
$$\gamma=-a_1b_2,\quad \delta=-a_2b_2,\quad f_2=b_2f.$$

На основе результатов работы [6] система (14) редуцируется к двум задачам Гурса для уравнений вида (1). Применяя к этим задачам результаты п. 1, можно отыскивать условия на коэффициенты уравнения (12), обеспечивающие его разрешимость в квадратурах. Например, набор, отвечающий соотношениям (6), имеет вид

$$(a_2b_2)_x-(a_1b_1)_y-[\ln(a_2b_1)]_{xy}\equiv a_1b_1a_2b_2\equiv \alpha_2(x)\beta_2(y).$$

С помощью приемов из [7] можно указать еще два уравнения вида (1), к которым сводится (12), и вычислить для них граничные значения Гурса. Это позволяет снова использовать результаты из п. 1.

Уравнение (13) при условии $a_1b_2\neq 0$ можно путем замены искомой функции

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} b_2(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi=U(x,y)$$

преобразовать к уравнению

$$U_{xxy}+AU_{xy}+BU_x+CU=F, \tag{15}$$

$$A=a_1b_1-[\ln(a_1b_2)]_x,\quad B=a_2b_2,\quad C=a_{2x}b_2-a_2b_2(\ln a_1)_x,\quad F=b_2f_x-b_2f(\ln a_1)_x, \tag{16}$$

с условиями

$$U(x_0,y)=U(x,y_0)=0,\quad U_x(x_0,y)=\int_{y_0}^{y} b_2(x_0,\eta)f(x_0,\eta)d\eta. \tag{17}$$

Если дополнительно потребовать $C\equiv 0$, то задача (15)–(17) распадается на две:

$$V_{xy}+AV_y+BV=F,\quad V(x,y_0)=0,\quad V(x_0,y)=\int_{y_0}^{y} b_2(x_0,\eta)f(x_0,\eta)d\eta; \tag{18}$$

$$U_x=V,\quad U(x_0,y)=0. \tag{19}$$

Применяя к (18), (19) результаты из п. 1, условия разрешимости в квадратурах уравнения (13) можно записать с помощью формул

$$a_1 b_2 \neq 0, \tag{20}$$

$$\frac{2s'(x)t'(y)}{3[s(x)+t(y)]^2}, \tag{21}$$

$$a_{2x} b_2 - a_2 b_2 (\ln a_1)_x \equiv 0, \tag{22}$$

$$(a_1 b_1)_y - [\ln(a_1 b_2)]_{xy} \equiv -a_2 b_2 \equiv \alpha_1(x)\beta_1(y) \neq 0, \tag{23}$$

$$(a_1 b_1)_y - [\ln(a_1 b_2)]_{xy} - a_2 b_2 \equiv [\ln(a_1 b_2)]_{xy} - (a_1 b_1)_y \equiv \alpha_2(x)\beta_2(y) \neq 0, \tag{24}$$

$$(a_1 b_1)_y - [\ln(a_1 b_2)]_{xy} + 2a_2 b_2 \equiv 0, \tag{25}$$

$$-a_2 b_2, \quad (a_1 b_1)_y - [\ln(a_1 b_2)]_{xy} - a_2 b_2, \tag{26}$$

$$(a_1 b_1)_y - [\ln(a_1 b_2)]_{xy} \equiv a_2 b_2. \tag{27}$$

А именно, для указанной разрешимости достаточно выполнения любой из следующих трех групп перечисленных формул:

1) (20), (22), (27);

2) (20), (22) с добавлением либо (23), либо (24);

3) (20), (22), (25) вместе с представлением хоть одной из комбинаций (26) в виде (21).

В заключение отметим, что в п. 2 использованы приемы из статьи [7].

Литература

[1] Бицадзе А.В. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1982).

[2] Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными* (Казанск. матем. о-во, 2001).

[3] Жегалов В.И. *К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций*, Неклассические уравнения математической физики (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2002), с. 73–79.

[4] Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных* (Ин. лит., М., 1957).

[5] Забрейко П.П., Калитвин А.С., Фролова Е.В. *Об интегральных уравнениях с частными интегралами в пространстве непрерывных функций*, Дифференц. уравнения **38** (4), 538–546 (2002).

[6] Жегалов В.И. *О разрешимости в квадратурах одной гиперболической системы уравнений с частными производными*, Дифференц. уравнения и их прилож. Тр. всероссийск. научн. конф. (Стерлитамак, 2011), с. 61–64.

[7] Жегалов В.И., Сарварова И.М. *Об одном подходе к решению интегральных уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами*, Изв. вузов. Матем., № 7, 28–36 (2011).

В.И. Жегалов

профессор, кафедра дифференциальных уравнений,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Valentin.zhegalov@ksu.ru

И.М. Сарварова

аспирант, кафедра дифференциальных уравнений,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Inna.sarvarova@yandex.ru

V.I. Zhegalov and I.M. Sarvarova

On conditions of solvability of the Goursat problem in quadratures

Abstract. We find new variants of Goursat problem solution in quadratures on the basis of the combination of the Riemann method and the cascade integration. The results are applied to two Volterra equations with particular integrals.

Keywords: Goursat problem, Riemann function, cascade method, solution in quadratures, Volterra equations.

V.I. Zhegalov

Professor, Chair of Differential Equations,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Valentin.zhegalov@ksu.ru

I.M. Sarvarova

Postgraduate, Chair of Differential Equations,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Inna.sarvarova@yandex.ru