И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.518

Б.В. СИМОНОВ

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

1. *Введение.* Пусть φ — неотрицательная, неубывающая на $[0,2\pi]$ функция, $0<\alpha<\infty$. Пространством Лоренца $\Lambda(\varphi,\alpha)$ назовем множество 2π-периодических измеримых функций f, для каждой из которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)}=\left\{\int_0^{2\pi}(\varphi(t)f^*(t))^{\alpha}\frac{dt}{t}\right\}^{1/\alpha},$$

где f^* — невозрастающая на $[0,2\pi]$ функция, равноизмеримая с $|f|$.

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx, \tag{2}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям: $a_n\to 0$ при $n\to\infty$ и $\Delta_k a_n\ge 0$ для некоторого $k\ge 1$ и любых n, где $\Delta_1 a_n=a_n-a_{n+1}$, $\Delta_k a_n=\Delta_1(\Delta_{k-1}a_n)$ для $k\ge 2$. Будем также считать, что $\Delta_0 a_n=a_n$.

Известно ([1], с. 95), что для любого $\delta\in(0,\pi)$ эти ряды сходятся равномерно на отрезке $[\delta,2\pi-\delta]$, т. е. существуют функции $f(x)$ и $g(x)$ — соответственно суммы рядов (1) и (2).

В данной работе находятся условия, при которых функции f и g принадлежат классам $\Lambda(\varphi,\alpha)$, а также устанавливаются оценки квазинорм этих функций через коэффициенты рядов (1) и (2).

Известна следующая теорема Харди-Литтлвуда ([1], с. 657).

Пусть $a_n\to 0$ при $n\to\infty$ и $\Delta_1 a_n\ge 0$ для всех n. Тогда для $p\in(1,\infty)$ справедливы неравенства

$$C_1\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^p(n+1)^{p-2}\right)^{1/p}\le\|f\|_p\le C_2\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^p(n+1)^{p-2}\right)^{1/p},$$

где положительные постоянные C_i $(i=1,2)$ не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

Заметим, что все эти неравенства (и нижеследующие) понимаются таким образом: из конечности правой части следует конечность левой части.

В [2] доказана

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01–00010).

Теорема. а. *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_2 a_n \geq 0$ для всех n. Тогда для $p \in (0, \infty)$*

$$C_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\Delta_1 a_n)^p (n+1)^{2p-2} \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C_2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\Delta_1 a_n)^p (n+1)^{2p-2} \right)^{1/p}.$$

б. *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_1 a_n \geq 0$ для всех n. Тогда*

$$C_3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C_4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} \right)^{1/p}, \quad p \in (0, \infty),$$

где положительные постоянные C_i $(i = \overline{1,4})$ не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

В данной работе доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $0 < \alpha < \infty$, $\varphi(t)$ — неотрицательная, непрерывная, неубывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция, равная нулю в точке $t = 0$ и удовлетворяющая условию*

$$\left(\int_0^{\delta} \varphi^{\alpha}(t) \frac{dt}{t} \right)^{1/\alpha} \leq C\varphi(\delta/2) \text{ для любого } \delta \in (0, 2\pi),$$

где положительная постоянная C не зависит от δ.

а) *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_2 a_n \geq 0$ для всех n. Тогда*

$$\|f\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \leq C_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\Delta_1 a_n)^{\alpha} (n+1)^{2\alpha-1} \varphi^{\alpha} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right)^{1/\alpha}. \tag{3}$$

б) *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_1 a_n \geq 0$ для всех n. Тогда*

$$\|f\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \leq C_2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\alpha} (n+1)^{\alpha-1} \varphi^{\alpha} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right)^{1/\alpha}, \tag{4}$$

$$\|g\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \leq C_3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha} n^{\alpha-1} \varphi^{\alpha} \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{1/\alpha}, \tag{5}$$

где положительные постоянные C_i $(i = \overline{1,3})$ не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

Утверждение 2. *Пусть $0 < \alpha < \infty$, $\varphi(t)$ — неотрицательная, непрерывная, неубывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция, равная нулю при $t = 0$. Пусть также функция $\varphi(t)$ такова, что $\varphi^{\alpha}(t)/t$ не возрастает или удовлетворяет условию*

$$\left(\int_{\delta}^{2\pi} (\varphi(t)/t)^{\alpha} \frac{dt}{t} \right)^{1/\alpha} \leq C\varphi(\delta)/\delta \text{ для любого } \delta \in (0, \pi), \tag{6}$$

где положительная постоянная C не зависит от δ.

а) *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_2 a_n \geq 0$ для всех n. Тогда*

$$\|f\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \geq C_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\Delta_1 a_n)^{\alpha} (n+1)^{2\alpha-1} \varphi^{\alpha} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right)^{1/\alpha}. \tag{7}$$

б) *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_1 a_n \geq 0$ для всех n. Тогда*

$$\|g\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \geq C_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha} n^{\alpha-1} \varphi^{\alpha} \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{1/\alpha}. \tag{8}$$

Кроме того, для функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию (6),

$$\|f\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \geq C_3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\alpha} (n+1)^{\alpha-1} \varphi^{\alpha} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right)^{1/\alpha}, \tag{9}$$

где положительные постоянные C_i $(i=\overline{1,3})$ не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

Замечание 1. Если $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_k a_n \geq 0$ для некоторого $k \geq 2$ и всех n, то тем более справедливы неравенства (3)–(5), (7)–(9).

Замечание 2. Функция $\varphi(t) = t^{1/\alpha}$ $(\alpha \in (0,\infty))$ удовлетворяет условиям, наложенным на функцию $\varphi(t)$ в утверждениях 1 и 2. В силу этого утверждения 1 и 2 являются обобщениями теоремы, сформулированной выше, из работы [2].

Замечание 3. Пусть $0 < \alpha < \infty$, $\varphi(t)$ — неотрицательная, непрерывная, неубывающая на отрезке $[0,2\pi]$ функция, равная нулю при $t=0$ и удовлетворяющая условиям: для любых $\delta \in (0,2\pi)$ справедливы следующие неравенства:

$$\left(\int_0^\delta \varphi^\alpha(t)\frac{dt}{t}\right)^{1/\alpha} \leq C_1\varphi(\delta/2), \qquad \left(\int_\delta^{2\pi} (\varphi(t)/t)^\alpha \frac{dt}{t}\right)^{1/\alpha} \leq C_2\varphi(\delta)/\delta,$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от δ.

Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_1 a_n \geq 0$ для всех n. Тогда

$$C_3\left(\sum_{n=0}^\infty a_n^\alpha (n+1)^{\alpha-1}\varphi^\alpha\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1/\alpha} \leq \|f\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \leq C_4\left(\sum_{n=0}^\infty a_n^\alpha (n+1)^{\alpha-1}\varphi^\alpha\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^{1/\alpha},$$

где положительные постоянные C_3 и C_4 не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

2. *Вспомогательные утверждения.* Пусть

$$\begin{aligned}
&B_0^1(x) = \frac{1}{2};\\
&B_n^1(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx \text{ для } n \geq 1;\\
&B_n^k(x) = \sum_{\nu=0}^n B_\nu^{k-1}(x) \text{ для } k = 2,3,\dots \text{ и } n \geq 0;\\
&\overline{B}_n^1(x) = \sin x + \dots + \sin nx \text{ для } n \geq 1;\\
&\overline{B}_n^k(x) = \sum_{\nu=1}^n \overline{B}_\nu^{k-1}(x) \text{ для } k = 2,3,\dots \text{ и } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Лемма 1 ([2]). *Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_k a_n \geq 0$ для некоторого $k \geq 1$ и любого n. Тогда*

а) *функция $f(x)$ — сумма ряда (1) — может быть почти всюду представлена в виде*

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \Delta_k a_n B_n^k(x);$$

б) *функция $g(x)$ — сумма ряда (2) — может быть почти всюду представлена в виде*

$$g(x) = \sum_{n=1}^\infty \Delta_k a_n \overline{B}_n^k(x).$$

Лемма 2 ([3]). *Пусть $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $\sum\limits_{\nu=n}^\infty a_\nu = a_n\beta_n$ $(n=1,2,\dots)$. Тогда для $p \in [1,\infty)$*

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\left(\sum_{\nu=1}^k b_\nu\right)^p \leq p^p \sum_{\nu=1}^\infty a_\nu (b_\nu\beta_\nu)^p.$$

Лемма 3. *Пусть числовая последовательность* $\{a_n\}$ *такова, что* $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\Delta_1 a_n \geq 0$ *для любого* n; *числа* α, p, λ *таковы, что* $\alpha \in (0,\infty)$, $p \in (0,\infty)$, $\lambda \in (-\infty,\infty)$; *невозрастающая числовая последовательность* $\{\varphi(1/n)\}$ *удовлетворяет условию: для любого* $n = 1, 2, \ldots$

$$\left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \varphi^{\alpha}(2^{-\nu})\right)^{1/\alpha} \leq C_1 \varphi(2^{-(n+1)}), \tag{10}$$

где положительная постоянная C_1 *не зависит от* n.

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu}(\nu+1)^{\lambda}\right)^{p} \leq C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{n+1}\right)[a_n(n+1)^{\lambda+1}]^{p},$$

где положительная постоянная C_2 *не зависит от последовательности* $\{a_n\}$.

Доказательство. Используя монотонность последовательности $\{a_n\}$, неравенства (10),

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)^{p} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p \text{ при } p \in (0,1) \tag{11}$$

и лемму 2 при $p \in [1,\infty)$, имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu}(\nu+1)^{\lambda}\right)^{p} = \\
&= a_0^p\varphi^{\alpha}(1) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{n+1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu}(\nu+1)^{\lambda}\right)^{p} \leq \\
&\leq a_0^p\varphi^{\alpha}(1) + C_3\sum_{m=0}^{\infty}\varphi^{\alpha}(2^{-m})\left(\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1} a_{\nu}(\nu+1)^{\lambda}\right)^{p} \leq \\
&\leq a_0^p\varphi^{\alpha}(1) + C_4\sum_{m=0}^{\infty}\varphi^{\alpha}(2^{-m})\left(\sum_{\mu=0}^{m} a_{2^{\mu}}2^{\mu(\lambda+1)}\right)^{p} \leq \\
&\leq a_0^p\varphi^{\alpha}(1) + C_5\sum_{\mu=0}^{\infty}\varphi^{\alpha}(2^{-\mu})a_{2^{\mu}}^p 2^{\mu p(\lambda+1)} \leq \\
&\leq C_6\left\{a_0^p\varphi^{\alpha}(1) + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1} a_{\nu}^p\nu^{-1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{\nu}\right)\nu^{p(\lambda+1)}\right\} \leq \\
&\leq C_7\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}^p(\nu+1)^{p(\lambda+1)}\frac{1}{\nu+1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{\nu+1}\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Лемма 4 ([4], с. 93). *Пусть* f *и* g — *почти везде конечные измеримые на* $[0,2\pi]$ *функции. Тогда справедливы неравенства*

$$(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2),$$
$$(f \cdot g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) \cdot g^*(t_2).$$

Лемма 5 ([4], с. 88). *Если* $|f_1(t)| \leq f_2(t)$, *то*

$$f_1^*(t) \leq f_2^*(t).$$

Лемма 6 ([4], с. 89). *Пусть* $f(x)$ — *измеримая на* $[0,2\pi]$ *функция. Тогда при любом* $x \in (0,2\pi]$

$$\int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^x f^*(t)dt.$$

Лемма 7 ([4], с. 100). *Пусть для неотрицательных суммируемых на* $[0, 2\pi]$ *функций* $x(t)$ *и* $y(t)$ *для любых* $t \in (0, 2\pi]$ *выполнено неравенство*

$$\int_0^t x(s)ds \le \int_0^t y(s)ds,$$

$b(t)$ — *невозрастающая неотрицательная на* $(0, 2\pi]$ *функция. Тогда*

$$\int_0^{2\pi} x(s)b(s)ds \le \int_0^{2\pi} y(s)b(s)ds.$$

Лемма 8 ([5]). *Пусть* $f(x)$ — *измеримая на отрезке* $[0, 2\pi]$ *функция и* α — *положительное число. Тогда для любого* $t \in (0, 2\pi]$ *имеет место равенство*

$$f^{*\alpha}(t) = |f|^{\alpha *}(t).$$

Лемма 9. *Пусть* $0 < \alpha < \infty$, $\varphi(t)$ — *неотрицательная, непрерывная, неубывающая на отрезке* $[0, 2\pi]$ *функция, равная нулю при* $t = 0$. *Пусть также* $\varphi^\alpha(t)/t$ *не возрастает. Тогда*

$$\int_0^{2\pi} (\varphi(t)|f(t)|)^\alpha \frac{dt}{t} \le \int_0^{2\pi} (\varphi(t)f^*(t))^\alpha \frac{dt}{t}.$$

Доказательство следует из последовательного применения лемм 6, 8 и 7.

Лемма 10 ([3]). *Пусть* $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$, $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_n \beta_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. *Тогда для* $p \in [1, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu \right)^p \le p^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n \beta_n)^p.$$

Лемма 11. *Пусть* $0 < \alpha < \infty$, $\varphi(t)$ — *неотрицательная, непрерывная, неубывающая на отрезке* $[0, 2\pi]$ *функция, равная нулю при* $t = 0$. *Пусть также функция* $\varphi(t)$ *для любого* $\delta \in (0, \pi]$ *удовлетворяет неравенству* (6). *Тогда*

$$C_1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\varphi(t) \frac{1}{t} \int_0^t f^*(x)dx \right)^\alpha \frac{dt}{t} \right)^{1/\alpha} \le \left(\int_0^{2\pi} (\varphi(t)f^*(t))^\alpha \frac{dt}{t} \right)^{1/\alpha} \le \\ \le \left(\int_0^{2\pi} \left(\varphi(t) \frac{1}{t} \int_0^t f^*(x)dx \right)^\alpha \frac{dt}{t} \right)^{1/\alpha}, \quad (12)$$

где положительная постоянная C_1 *не зависит от функции* f.

Доказательство. Левая часть неравенства (12) справедлива в силу невозрастания функции $f^*(t)$. Докажем справедливость правой части неравенства (12). Используя монотонность функций $f^*(t)$ и $\varphi(t)$ и неравенство (11) при $\alpha \in (0, 1]$, а при $\alpha \in (1, \infty)$ — неравенство (6) и лемму 10, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \left(\varphi(t) \frac{1}{t} \int_0^t f^*(x)dx \right)^\alpha \frac{dt}{t} \le \\ \le C_2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\varphi(2^{-\nu})2^\nu)^\alpha \left(\int_0^{2^{-\nu}} f^*(x)dx \right)^\alpha + \int_0^{2\pi} \left(\varphi(t) \frac{1}{t} \int_0^t f^*(x)dx \right)^\alpha \frac{dt}{t} \le \\ \le C_3 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\varphi(2^{-\nu})2^\nu)^\alpha \left(\sum_{n=\nu}^{\infty} f^*(2^{-(n+1)})2^{-n} \right)^\alpha \le \\ \le C_4 \sum_{n=0}^{\infty} (f^*(2^{-(n+1)})\varphi(2^{-n}))^\alpha \le C_5 \int_0^{2\pi} (\varphi(t)f^*(t))^\alpha \frac{dt}{t}. \quad \square$$

3. *Доказательство утверждения* 1. По лемме 1 почти всюду справедливо равенство

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_l a_n \widetilde{B}_n^l(x),$$

где в случае а) $l=2$, $F(x)=f(x)$, $\widetilde{B}_n^l=B_n^2(x)$, в случае б) $l=1$, $F(x)=g(x)$, $\widetilde{B}_n^l=\overline{B}_n^1(x)$ или $F(x)=f(x)$, $\widetilde{B}_n^l=B_n^1(x)$ ($n\ge 1$, $\Delta_1 a_0=0$).

Оценим $\|F(x)\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)}$. Применяя леммы 4 и 5, используя свойства функции $\varphi(t)$ и учитывая четность $f(x)$ и нечетность $g(x)$, получим

$$\begin{aligned}
I=\|F(x)\|^{\alpha}_{\Lambda(\varphi,\alpha)}&=\int_0^{2\pi}(\varphi(t)F^*(t))^{\alpha}\frac{dt}{t}\le\\
&\le C\int_0^{\pi}(\varphi(t)(F(x)\chi_{(0,\pi]}(x))^*(t))^{\alpha}\frac{dt}{t}=\\
&=C\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{m+2}}^{\frac{\pi}{m+1}}\left(\varphi(t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_l a_n\widetilde{B}_n^l(x)\chi_{(0,\pi]}(x)\right)^*(t)\right)^{\alpha}\frac{dt}{t}\le\\
&\le C_1\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2(m+2)}}^{\frac{\pi}{2(m+1)}}\left(\varphi(t)\left(\sum_{n=0}^{m}\Delta_l a_n|\widetilde{B}_n^l(x)|\chi_{(0,\pi]}(x)\right)^*(t)\right)^{\alpha}\frac{dt}{t}+\\
&+\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2(m+2)}}^{\frac{\pi}{2(m+1)}}\left(\varphi(t)\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\Delta_l a_n|\widetilde{B}_n^l(x)|\chi_{(0,\pi]}(x)\right)^*(t)\right)^{\alpha}\frac{dt}{t}\Bigg)=C_1(I_1+I_2).
\end{aligned}$$

Так как $|\widetilde{B}_n^l(x)|\le C_2(n+1)^l$, где постоянная C_2 не зависит от n, то

$$\begin{aligned}
I_1&\le C_3\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2(m+2)}}^{\frac{\pi}{2(m+1)}}\left(\varphi(t)\left(\sum_{n=0}^{m}\Delta_l a_n(n+1)^l\right)^*(t)\right)^{\alpha}\frac{dt}{t}=\\
&=C_3\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2(m+2)}}^{\frac{\pi}{2(m+1)}}\left(\varphi(t)\sum_{n=0}^{m}\Delta_l a_n(n+1)^l\right)^{\alpha}\frac{dt}{t}\le\\
&\le C_4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{m+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{m}\Delta_l a_n(n+1)^l\right)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\Delta_l a_n=\Delta_{l-1}a_n-\Delta_{l-1}a_{n+1}\quad\text{и}\quad\Delta_{l-1}a_{n+1}\ge 0,$$

то

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{m}\Delta_l a_n(n+1)^l\sum_{n=0}^{m}\Delta_{l-1}a_n(n+1)^l-\sum_{n=1}^{m+1}\Delta_{l-1}a_n n^l=\\
&=\sum_{n=0}^{m}\Delta_{l-1}a_n[(n+1)^l-n^l]-\Delta_{l-1}a_{m+1}(m+1)^l\le C_5\sum_{n=0}^{m}\Delta_{l-1}a_n(n+1)^{l-1},
\end{aligned}$$

где постоянная C_5 зависит лишь от l. Применим эту оценку, а затем лемму 3. Тогда

$$\begin{aligned}
I_1&\le C_6\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{m+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{m}\Delta_{l-1}a_n(n+1)^{l-1}\right)^{\alpha}\le\\
&\le C_7\sum_{m=0}^{\infty}(\Delta_{l-1}a_{m+1})^{\alpha}(m+1)^{l\alpha-1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{m+1}\right).
\end{aligned}$$

Оценим теперь сверху I_2. Так как $x \in (0,\pi)$, $|\widetilde{B}^l_n(x)| \le C_8/x^l$ $(l=1,2)$, где постоянная C_8 не зависит от n, то

$$\begin{aligned} I_2 &\le C_9 \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2(m+2)}}^{\frac{\pi}{2(m+1)}} \left(\varphi(t)\Big(\sum_{n=m+1}^{\infty} \Delta_l a_n \frac{1}{x^l}\Big)^*(t)\right)^{\alpha} \frac{dt}{t} \le \\ &\le C_9 \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2(m+2)}}^{\frac{\pi}{2(m+1)}} \left(\varphi(t)(x^{-l})^*\Big(\frac{t}{2}\Big)\right)^{\alpha} \frac{dt}{t} \Big(\sum_{n=m+1}^{\infty} \Delta_l a_n\Big)^{\alpha} \le \\ &\le C_{10} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{4(m+2)}}^{\frac{\pi}{4(m+1)}} (\varphi(t)t^{-l})^{\alpha} \frac{dt}{t} \Big(\sum_{n=m+1}^{\infty} \Delta_l a_n\Big)^{\alpha} \le \\ &\le C_{11} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^{\alpha}\Big(\frac{1}{m+1}\Big)(m+1)^{l\alpha-1}(\Delta_{l-1}a_m)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Объединяя оценки для I_1 и I_2, получаем оценку

$$I \le C_{12} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^{\alpha}\Big(\frac{1}{m+1}\Big)(m+1)^{l\alpha-1}(\Delta_{l-1}a_m)^{\alpha}. \quad \square$$

4. *Доказательство утверждения* 2. Сначала рассмотрим случай a). Из леммы 1 почти всюду имеем

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_2 a_\nu B^2_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_1 b_\nu B^2_\nu(x),$$

где

$$B^2_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{\nu+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2, \quad b_\nu = \Delta_1 a_\nu.$$

Если функция $\varphi^{\alpha}(t)/t$ не возрастает, то, применяя лемму 9, будем иметь

$$\|f(x)\|^{\alpha}_{\Lambda(\varphi,\alpha)} \ge \int_0^{\pi} (\varphi(t)|f(t)|)^{\alpha} \frac{dt}{t} \ge \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{\alpha}(\pi \cdot 2^{-\nu}) 2^{\nu} \int_{\pi/2^{\nu+1}}^{\pi/2^{\nu}} |f(t)|^{\alpha} dt.$$

Если же функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (6), то, применяя леммы 11, 6 и используя свойства функции $\varphi(t)$, получим

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^{\alpha}_{\Lambda(\varphi,\alpha)} &\ge C \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varphi(t)}{t}\int_0^t |f(x)|dx\right)^{\alpha} \frac{dt}{t} \ge \\ &\ge C_1 \left(\int_0^{\pi} \left(\frac{\varphi(t)}{t}\int_0^t |f(x)|dx\right)^{\alpha} \frac{dt}{t} + \frac{\varphi(\pi)}{\pi}\left(\int_0^{\pi} |f(x)|dx\right)^{\alpha}\right) \ge \\ &\ge C_2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\varphi(2^{-\nu})2^{\nu} \int_{\pi/2^{\nu+1}}^{\pi/2^{\nu}} |f(x)|dx\right)^{\alpha}. \end{aligned}$$

В работе [2] для $p \in (0,+\infty)$ доказано, что

$$\int_{\pi/2^{\nu+1}}^{\pi/2^{\nu}} |f(x)|^p dx \ge C_3 2^{\nu(2p-1)} b^p_{2^{\nu}-1},$$

где положительная постоянная C_3 не зависит от ν. Применяя эту оценку в первом случае при $p=2$, а во втором — при $p=1$, будем иметь

$$\begin{aligned}\|f(x)\|^{\alpha}_{\Lambda(\varphi,\alpha)} &\geq C_4\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi^{\alpha}(2^{-\nu})2^{2\nu\alpha}b^{\alpha}_{2^{\nu}-1}\geq\\ &\geq C_5\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{\alpha}(n+1)^{2\alpha-1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{n+1}\right)=\\ &=C_6\sum_{n=0}^{\infty}(\Delta_1 a_n)^{\alpha}(n+1)^{2\alpha-1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Таким образом, оценка (7) в п. а) доказана.

Оценка (9) в п. б) для функции $f(x)$, когда функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (6), рассматривается аналогично, только при этом используется представление

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta_1 a_{\nu}B_{\nu}(x).$$

Докажем теперь п. б) для функции $g(x)$. Как следует из работы [2],

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_1 b_n\frac{\sin^2 nx}{\sin x},$$

где

$$\psi(x)=\frac{g(x)+g(x-\pi)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\sin(2n-1)x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n-1)x,\quad b_n=a_{2n-1}.$$

Поскольку $\|\psi(x)\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)}\leq C\|g(x)\|_{\Lambda(\varphi,\alpha)}$, то оценим снизу

$$\|\psi(x)\|^{\alpha}_{\Lambda(\varphi,\alpha)}\geq\int_0^{\pi}(\varphi(t)\psi^*(t))^{\alpha}\frac{dt}{t}.$$

Применяя те же рассуждения, которые использовали при доказательстве оценки снизу для $f(x)$ в п. а), получим в случае, когда $\varphi^{\alpha}(t)/t$ не возрастает,

$$\|\psi(x)\|^{\alpha}_{\Lambda(\varphi,\alpha)}\geq\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi^{\alpha}(\pi/2^{\nu})\int_{\pi/2^{\nu+1}}^{\pi/2^{\nu}}|\psi(t)|^{\alpha}dt,$$

а в случае, когда функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (6),

$$\|\psi(x)\|^{\alpha}_{\Lambda(\varphi,\alpha)}\geq C_7\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\varphi(\pi/2^{\nu})2^{\nu}\int_{\pi/2^{\nu+1}}^{\pi/2^{\nu}}|\psi(x)|dx\right)^{\alpha}.$$

В работе [2] для $p\in(0,+\infty)$ доказано, что

$$\int_{\pi/2^{\nu+1}}^{\pi/2^{\nu}}|\psi(x)|^p dx\geq C_8 2^{\nu(p-1)}b^p_{2^{\nu}-1},$$

где положительная постоянная C_8 не зависит от ν. Применяя эту оценку в первом случае при $p=\alpha$, а во втором — при $p=1$, будем иметь

$$\begin{aligned}\|\psi(x)\|^{\alpha}_{\Lambda(\varphi,\alpha)} &\geq C_9\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi^{\alpha}(2^{-\nu})2^{\nu\alpha}b^{\alpha}_{2^{\nu}-1}\geq\\ &\geq C_{10}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{\alpha}n^{\alpha-1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)=\\ &=C_{10}\sum_{n=1}^{\infty}a^{\alpha}_{2n-1}n^{\alpha-1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)\geq C_{11}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\alpha}n^{\alpha-1}\varphi^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Итак, оценка (8) доказана. □

Литература

1. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. *О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1995. – № 1. – С. 22-32.
3. Потапов М.К., Бериша М. *Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного* // Publ. inst. math. – 1979. – T. 26. – P. 215–228.
4. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5. Шерстнева Л.А. *Соотношения между наилучшими приближениями в различных метриках пространств Лоренца и теоремы вложения.* – Моск. ун-т. – М., 1986. – 65 с. – Деп. в ВИНИТИ 13.01.86, № 287-В.

Волгоградский государственный технический университет

Поступила
09.04.1996