ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 7 (434)

УДК 510.5

А.А. ЕФРЕМОВ

ИЗОЛИРОВАННЫЕ СВЕРХУ d-Р. П. СТЕПЕНИ, II

1. Введение

Множество $A \subseteq \omega$ называется *d-рекурсивно перечислимым* (d-р. п.), если существуют рекурсивно перечислимые (р.п.) множества A_1 и A_2 такие, что $A = A_1 - A_2$. Тьюрингова степень называется d-р. п. степенью, если она содержит d-р. п. множество; d-р. п. степень называется *собственно* d-р. п., если она не является р. п. степенью (не содержит р. п. множеств).

В статье продолжается изучение изолированных сверху (ИСВ) d-р. п. степеней. Понятие ИСВ степени, введенное в первой части статьи [1], является естественным расширением понятия изолированной d-р. п. степени [2] (которому в нашей терминологии соответствует понятие изолированности снизу (ИСН)). Напомним, что d-р. п. степень $\mathbf{d}$ называется изолированной сверху, если существует р. п. степень $\mathbf{b} > \mathbf{d}$ такая, что между $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ нет р. п. степеней. В противном случае она называется неизолированной сверху. В случае ИСВ говорим, что степени $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ образуют изолированную сверху пару, и обозначаем $\langle \mathbf{d}, \mathbf{b} \rangle$.

В первой части статьи изучался вопрос о плотности ИСВ степеней в структуре р. п. степеней. Было установлено, что их "достаточно много": из основного результата вытекало, что каждый класс скачков содержит бесконечно возрастающую последовательность ИСВ d-р. п.степеней. В этой статье мы отвечаем полностью на вопрос о плотности, показывая, что существует нерекурсивная р. п. степень, под которой *все* d-р. п. степени являются неизолированными сверху, т. е. ИСВ степени в структуре р. п. степеней не плотны.

2. Обозначения и терминология

Наши обозначения стандартны, и в основном мы следуем [3]. Используемая терминология подробно описана в первой части статьи [1], здесь же напомним лишь некоторые определения.

При описании стратегий употребляем следующие термины: при выборе представителя цикла слова "достаточно большое число" означают первое число, большее всех упоминаемых в конструкции к данному моменту; *начинаем* цикл, позволяя ему выполнить (1) и перейти в (2); *останавливаем* цикл, прекращая его работу, определяя его запрет равным нулю и заставляя перейти в (1); *разрушаем* цикл, останавливая его и считая, что его часть функционала становится неопределенной; *инициализируем* стратегию, разрушая все ее циклы и начиная цикл 0; при инициализации все созданные связи и прикрепления уничтожаются; цикл *работает*, переходя из некоторого (кроме (1)) состояния в другое; стратегия *работает*, позволяя циклу с наименьшим номером, который может это сделать, работать (в противном случае ничего не делает).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номера проектов 93-011-16004, 96-01-00830) и гранта Новосибирского Университета.

3. Основной результат

Вначале мы доказываем следующий результат.

Теорема. *Существует нерекурсивное р. п. множество A такое, что для любого d-р. п. множества $(D_1 - D_2) \leqslant_{\mathrm{T}} A$ либо найдется р. п. множество B такое, что $(D_1 - D_2) <_{\mathrm{T}} B <_{\mathrm{T}} (D_1 \oplus D_2)$, либо $(D_1 - D_2) \equiv_{\mathrm{T}} (D_1 \oplus D_2)$.*

Доказательство. Пусть $\{V_e\}_{e\in\omega}$ — некоторое эффективное перечисление d-р. п. множеств. Заметим, что изолированная сверху пара $\langle \mathbf{d}, \mathbf{b}\rangle$ характеризуется тем, что степени $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ имеют в структуре р. п. степеней общие верхние конусы (это следует из теоремы Лахлана [3], с. 164). Поэтому, чтобы построить р. п. множество A с требуемыми свойствами, достаточно удовлетворить для всех e следующим требованиям:

$\mathcal{P}_e : A \neq \Phi_e$, где $\{\Phi_e\}_{e\in\omega}$ — перечисление ч. р. функционалов;

$$\mathcal{M}_e : V_e = (D_1 - D_2) = \Phi_e^A \Longrightarrow (\exists B_e)(\exists \Delta_e)\Big(((D_1 - D_2) = \Delta_e^{B_e})\&$$
$$(\forall j)(B_e \neq \Phi_j^{(D_1-D_2)})\&(\forall j)((D_1 \oplus D_2) \neq \Phi_j^{B_e})\Big) \vee (\exists \Gamma_e)\Big((D_1 \oplus D_2) = \Gamma_e^{(D_1-D_2)}\Big),$$

где $\{V_e, \Phi_e\}$ — перечисление пар, состоящих из d-р. п. множества V_e и ч. р. функционала Φ_e, B_e — р. п. множество, Δ_e, Γ_e — ч. р. функционалы.

Рассмотрим основные модули для удовлетворения этих требований.

Основной модуль для $\mathcal{P}_e$: $A \neq \Phi_e$

Этот вид требований обеспечивает нерекурсивность множества A. Стратегия работает следующим образом.

(1) Выбираем представителя цикла x достаточно большим.
(2) Ждем шага $s : \Phi_e(x) \downarrow= 0[s]$.
(3) Перечисляем x в A.
(4) Конец работы.

Выходы $\mathcal{P}_e$-стратегии

1) Стратегия ждет всегда в (2). Выход обозначим через *1*.
2) Стратегия проходит через (3) и остается навсегда в (4). Выход обозначим через *0*.

$\mathcal{P}_e$-стратегия действует один раз (без учета инициализаций со стороны других стратегий) и требует лишь того, чтобы запрет стратегий с большим приоритетом на A либо был конечным, либо бесконечно много раз снимался.

Требование $\mathcal{M}_e$ очень сложно для удовлетворения в том виде, в котором мы его записали. Поэтому мы его разбиваем на три части: требование $\mathcal{R}_e$ и подтребования $\mathcal{N}_{e,j}$ и $\mathcal{S}_{e,j}$.

$$\mathcal{R}_e : (D_1 - D_2) = \Phi_e^A \Longrightarrow (\exists B_e)(\exists \Delta_e)\Big((D_1 - D_2) = \Delta_e^{B_e}\Big) \bigvee (\exists \Gamma_e)\Big((D_1 \oplus D_2) = \Gamma_e^{(D_1-D_2)}\Big).$$
$$\mathcal{N}_{e,j} : (D_1 - D_2) = \Phi_e^A \Longrightarrow (D_1 \oplus D_2) \neq \Phi_j^{B_e}.$$
$$\mathcal{S}_{e,j} : (D_1 - D_2) = \Phi_e^A \Longrightarrow B_e \neq \Phi_j^{(D_1-D_2)}.$$

Введем вспомогательные о. р. функции:

$\ell(e,s) = \max\{x \mid (\forall y < x)[(D_1 - D_2)(y) = \Phi_e^A(y)[s]]\}$,

$m(e,s) = \max\{\ell(e,t) \mid t \leqslant s\}$.

Будем говорить, что шаг s является e-расширяющим, если $s = 0$ или $\ell(e,s) > m(e,s-1)$.

Основной модуль для $\mathcal{R}_e$

$$\mathcal{R}_e : (D_1 - D_2) = \Phi_e^A \Longrightarrow (\exists B_e)(\exists \Delta_e)\Big((D_1 - D_2) = \Delta_e^{B_e}\Big) \bigvee (\exists \Gamma_e)\Big((D_1 \oplus D_2) = \Gamma_e^{(D_1-D_2)}\Big).$$

Стратегия для одиночного $\mathcal{R}_e$ состоит в следующем: если верна посылка, то мы хотим выполнить первый дизъюнкт, т. е. построить всюду определенный функционал Δ_e такой, что $(D_1 - D_2) = \Delta_e^{B_e}$. Поэтому для каждого x ждем первый шаг s такой, чтобы $\ell(e,s) > x$, и определяем $\Delta_e^{B_e}(x) = (D_1 - D_2)(x)$ с достаточно большим $\delta_e(x)$. При необходимости корректируем функционал $\Delta_e^{B_e}$ в точке x, перечисляя $\delta_e(x)$ в B_e (при этом делаем неопределенным $\Delta_e^{B_e}(y)$ во всех $y > x$).

Выходы $\mathcal{R}_e$-стратегии

1) Конечный выход нашей стратегии, соответствующий ситуации, когда $\lim_s \ell(e,s) < \infty$. Требование $\mathcal{R}_e$ выполнено, причем нет необходимости выполнять требования $\mathcal{N}_{e,j}$ и $\mathcal{S}_{e,j}$, $j \in \omega$. Выход стратегии обозначим в этом случае через *1*.
2) Бесконечный выход нашей стратегии, соответствующий ситуации, когда $\lim_s \ell(e,s) = \infty$. Тогда функционал $\Delta_e^{B_e}$ является всюду определенным, и ниже этого выхода возможны бесконечные нарушения на B_e. Выход стратегии обозначим в этом случае через *0*.

Основной модуль для $\mathcal{S}_{e,j}$

$\mathcal{S}_{e,j} : (D_1 - D_2) = \Phi_e^A \Longrightarrow B_e \neq \Phi_j^{(D_1 - D_2)}$
Требования $\mathcal{S}_{e,j}$ на дереве стратегий будут расположены только под бесконечным выходом $\mathcal{R}_e$-стратегии. Поэтому будем предполагать, что $(D_1 - D_2) = \Phi_e^A$.

Стратегия работает следующим образом.

(1) Выбираем представителя стратегии x достаточно большим.
(2) Ждем шага $s : \Phi_j^{(D_1-D_2)}(x) = 0 \ \& \ (D_1 - D_2) \restriction (\varphi_j(x)+1) = \Phi_e^A \restriction (\varphi_j(x)+1)[s]$.
(3) Перечисляем x в B_e, устанавливаем запрет $r[s+1] = \varphi_e(\varphi_j(x))[s]$ на A.
(4) Конец работы.

Выходы $\mathcal{S}_{e,j}$-стратегии

1) Стратегия всегда ждет в (2). Работы никакой не производилось. Выход стратегии в этом случае обозначим через *1*.
2) Стратегия проходит через (3) и остается навсегда в (4). Запрет на A конечный. Выход обозначим через *0*.

$\mathcal{S}_{e,j}$-стратегия действует один раз (без учета инициализаций со стороны других стратегий) и требует лишь того, чтобы запрет стратегий с большим приоритетом на B_e либо был конечным, либо бесконечно много раз снимался.

Основной модуль для $\mathcal{N}_{e,j}$

$\mathcal{N}_{e,j} : (D_1 - D_2) = \Phi_e^A \Longrightarrow (D_1 \oplus D_2) \neq \Phi_j^{B_e}$.
Требования $\mathcal{N}_{e,j}$ на дереве стратегий будут расположены только под бесконечным выходом $\mathcal{R}_e$-стратегии. Поэтому будем предполагать, что $(D_1 - D_2) = \Phi_e^A$. Именно между $\mathcal{N}_{e,j}$- и $\mathcal{R}_e$-стратегиями возникает первый конфликт нашей конструкции: $\mathcal{N}_{e,j}$-стратегия будет порождать запреты на B_e, а $\mathcal{R}_e$-стратегия может бесконечно нарушать их. В этом случае $\mathcal{N}_{e,j}$-стратегия будет обходить эту трудность, выполняя второй дизъюнкт требования $\mathcal{R}_e$ (каждая $\mathcal{N}_{e,j}$-стратегия строит свой вариант функционала Γ_e).

$\mathcal{N}_{e,j}$-стратегия работает по циклам, каждый из которых работает следующим образом:

Цикл k

(1) Выбираем представителя цикла $x_k = 2n_k + 1$ достаточно большим.
(2) Ждем шага $s : (D_1 \oplus D_2) \restriction (x_k+1) = \Phi_j^{B_e} \restriction (x_k+1) \& (D_1 - D_2) \restriction (y_k+1) = \Phi_e^A \restriction (y_k+1)[s]$, где
$$y_k = \max\{n_k, \max\{z \mid \delta_e(z) < \varphi_j(x_k)[s]\}\}.$$
(3) Определяем функционал $\Gamma_e^{(D_1-D_2)} \restriction (x_k+1) = (D_1 \oplus D_2) \restriction (x_k+1)[s+1]$ с $\gamma_e(x_k)[s+1] = y_k$ в точках, в которых он еще не определен. Определяем запреты $r_1[s+1] = \varphi_j(x_k)[s]$ на B_e и $r_2(k)[s+1] = \varphi_e(y_k)[s]$ на A. Начинаем $(k+1)$-й цикл. Одновременно продолжаем работу нашего цикла, переходя в (4).
(4) Ждем шага $t > s : (D_1 \oplus D_2) \restriction (x_k+1)[t] \neq (D_1 \oplus D_2) \restriction (x_k+1)[s]$, но $(D_1 - D_2) \restriction (y_k+1)[t] = (D_1 - D_2) \restriction (y_k+1)[s]$. Пока такого шага t нет, мы, следуя изменениям $(D_1 \oplus D_2) \restriction (x_k+1)$, имеем возможность корректировать функционал $\Gamma_e^{(D_1-D_2)}$ в соответствующих точках, т. к. $(D_1 - D_2) \restriction (y_k+1)$ тоже меняется. Как только такой шаг t нашелся, останавливаем циклы с номерами $> k$ и идем в (5).
(5) Конец работы.

Выходы $\mathcal{N}_{e,j}$-стратегии

1) Существует шаг s_0, после которого ни один цикл не работает. Тогда некоторый цикл k_0 остается навсегда в (2) или в (5). Требование $\mathcal{N}_{e,j}$ удовлетворено. Общие запреты всех циклов на B_e и A имеют конечный предел. Заметим, что запрет на B_e не мешает $\mathcal{R}_e$-стратегии корректировать свой функционал, т. к. значения $(D_1 - D_2)$ для всех y : $\delta_e(y) < \varphi_j(x_k)$ являются такими же, какими были при определении $\Delta_e^{B_e}(y)$, а дальнейшие изменения $(D_1 - D_2) \upharpoonright (y+1)$ контролируются запретом r_2 на A. Обозначим этот выход через *1* (конечный) (для более простого вида дерева стратегий объединяем два конечных выхода в одном).
2) Работает бесконечно много циклов, каждый из которых ждет в (4). Общий запрет всех циклов на B_e и на A может иметь бесконечный предел. Требование $\mathcal{N}_{e,j}$ не выполнено, но построен всюду определенный функционал $\Gamma_e^{(D_1-D_2)} = (D_1 \oplus D_2)$, тем самым $\mathcal{N}_{e,j}$-стратегия полностью удовлетворяет требование $\mathcal{R}_e$ и ниже этого выхода не нужно больше ни $\mathcal{S}_{e,i}$, ни $\mathcal{N}_{e,i}$, $i > j$. Выход бесконечный, обозначим его через *0*.

Теперь ниже бесконечного выхода $\mathcal{N}_{e,j}$-стратегии возникает вторая проблема: т. к. запрет на A может быть бесконечным, то могут не выполниться $\mathcal{P}$-стратегии.

$\mathcal{P}$-стратегия ниже бесконечного выхода $\mathcal{N}$-стратегии

Фиксируем произвольную $\mathcal{N}$-стратегию и некоторую $\mathcal{P}$-стратегию, расположенную под бесконечным выходом нашей стратегии. Обозначим через x текущий представитель $\mathcal{P}$-стратегии, и пусть на шаге s цикл k $\mathcal{N}$-стратегии установил запрет на A $r_2[s] > x$. Предположим далее, что на шаге $t \geqslant s$ $\mathcal{P}$-стратегия хочет перечислить x в A, чтобы удовлетворить $\mathcal{P}_e$. Основная идея решения этой проблемы состоит в том, что мы будем разрешать $\mathcal{P}$-стратегии перечислять элемент x в A в этом случае, соблюдая одно условие: каждый цикл $\mathcal{N}$-стратегии может нарушаться нижними $\mathcal{P}$-стратегиями не более одного раза. Перечислив x в A, мы нарушаем запрет $r_2(k)$ и тем самым, возможно, разрушаем некоторое вычисление $\Phi_e^A \upharpoonright (y_k+1)[s]$. Цикл k должен обработать эту ситуацию, поэтому изменим цикл $\mathcal{N}$-стратегии следующим образом:

(1), (2) и (3) остаются без изменений.

(4) Ждем шаг $t > s$ такой, что выполняется либо а), либо б). Пока такого шага t нет, мы, следуя изменениям $(D_1 \oplus D_2) \upharpoonright (x_k+1)$, имеем возможность корректировать функционал $\Gamma_e^{(D_1-D_2)}$ в соответствующих точках, т. к. $(D_1 - D_2) \upharpoonright (y_k+1)$ тоже меняется.
   а) $(D_1 \oplus D_2) \upharpoonright (x_k+1)[t] \neq (D_1 \oplus D_2) \upharpoonright (x_k+1)[s]$,но $(D_1 - D_2) \upharpoonright (y_k+1)[t] = (D_1 - D_2) \upharpoonright (y_k+1)[s]$. Тогда останавливаем циклы с номерами $> k$ и идем в (5).
   б) Изменилось $A \upharpoonright [r_2(k-1), r_2(k)]$ и $(D_1 - D_2) \upharpoonright [y_{k-1}+1, y_k]$. Тогда разрушаем циклы с номерами $> k$ и начинаем $(k+1)$-й цикл. Переходим в (5).

(5) Конец работы.

Разница между пп. (4а) и (4б) состоит в следующем. Пока цикл ждет в (4), сохраняются две возможности удовлетворения требований $\mathcal{R}_e$ и $\mathcal{N}_{e,j}$: либо удовлетворяем $\mathcal{N}_{e,j}$ без корректировки функционала Δ_e требования $\mathcal{R}_e$, либо не удовлетворяем требования $\mathcal{N}_{e,j}$, но строим функционал $\Gamma_{e,j}$, тем самым полностью удовлетворяя требование $\mathcal{R}_e$. Проходя в (5) через (4а), реализуем первую возможность; проходя в (5) через (4б), делаем шаг по реализации второй возможности.

Рассмотрим подробнее п. (4б). Если цикл k попал в (4б), это означает, что нижняя $\mathcal{P}$-стратегия перечислила элемент x в A, который повлиял на вычисления, т. к. равенство на отрезке $[y_{k-1}+1, y_k]$ восстановилось только после изменения $(D_1 - D_2)$. Тем самым имеем возможность корректировать функционал $\Gamma_{e,j}$ в соответствующих точках. Если же в будущем $(D_1 - D_2)$ на отрезке $[y_{k-1}+1, y_k]$ вернется к предыдущему значению, просто добиваемся неравенства $(D_1 - D_2) \neq \Phi_e^A$, т. к. контролируем $A \upharpoonright \varphi_e(y_k)$.

Выходы стратегии остаются прежними, внесем только небольшие изменения.

Выход 1. Существует шаг s_0, после которого ни один цикл не работает. Тогда некоторый цикл k_0 остается навсегда в (2) или в (5), пройдя через (4а).

Выход 2. Работает бесконечно много циклов, каждый из которых либо ждет в (4), либо находится в (5), пройдя через (4б).

Случай, когда $\mathcal{P}$-стратегия находится под бесконечным выходом нескольких $\mathcal{N}$-стратегий, никаких новых проблем не ставит. Подчеркнем, что вышеописанная стратегия взаимодействия $\mathcal{P}$- и $\mathcal{N}$-стратегий будет работать при условии, что каждый цикл $\mathcal{N}$-стратегии нарушается нижними $\mathcal{P}$-стратегиями не более одного раза. Реализация этой идеи будет описана в Полной конструкции.

Дерево стратегий

Пусть $\Lambda = \{0 <_\Lambda 1\}$ — множество возможных выходов наших стратегий. Тогда деревом стратегий будем называть множество $T = \Lambda^{<\infty}$. Следующее, что должны сделать, это назначить каждой вершине $\alpha \in T$ некоторое требование. Назначение требований вершинам дерева будем проводить индукцией по $n = |\alpha|$, определяя функцию $\mathrm{Req}(\alpha)$. При этом будем использовать вспомогательную функцию L, которая назначает каждой вершине некоторый упорядоченный список требований, которые ждут прикрепления к вершинам дерева. Вначале этот список будет включать все стратегии, упорядоченные в естественном порядке. По мере продвижения по дереву T будем добавлять или убирать некоторые стратегии. Обозначим через L_0 список всех стратегий в естественном порядке

$$L_0 = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{R}_0, \mathcal{S}_{0,0}, \mathcal{N}_{0,0}, \mathcal{P}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{S}_{0,1}, \mathcal{N}_{0,1}, \dots, \mathcal{P}_e, \mathcal{R}_e, \mathcal{S}_{l(e),r(e)}, \mathcal{N}_{l(e),r(e)}, \dots\};$$

через $\mathrm{first}(L)$ — первый элемент в списке L; через $\mathrm{num}(X)$ — номер требования X.

Теперь опишем стратегию прикрепления требований к вершинам.

Пусть $n = |\alpha| = 0$. Определяем $L(\alpha) = L(\lambda) = L_0, \mathrm{Req}(\lambda) = \mathrm{first}(L(\lambda))$, т.е. вершине λ назначаем требование $\mathcal{P}_0$.

Пусть $n = |\alpha| > 0$. Тогда $\alpha = \beta\widehat{\ }a$ для некоторого β, причем $L(\beta)$ и $\mathrm{Req}(\beta)$ определены. Определяем вначале $L(\alpha)$. Возможны следующие случаи.

(1) $\mathrm{Req}(\beta) = \mathcal{P}_e$ для некоторого $e \in \omega$, $a = 0, 1$. Полагаем $L(\alpha) = L(\beta) \setminus \{\mathrm{Req}(\beta)\}$.
(2) $\mathrm{Req}(\beta) = \mathcal{S}_{e,j}$ для некоторых $e, j \in \omega$, $a = 0, 1$. Полагаем $L(\alpha) = L(\beta) \setminus \{\mathrm{Req}(\beta)\}$.
(3) $\mathrm{Req}(\beta) = \mathcal{R}_e$ для некоторого $e \in \omega$.
  (а) $a = 0$. Полагаем $L(\alpha) = L(\beta) \setminus \{\mathrm{Req}(\beta)\}$.
  (б) $a = 1$. Полагаем $L(\alpha) = L(\beta) \setminus (\{\mathrm{Req}(\beta)\} \bigcup \{X \mid X \in L(\beta) \& \,\mathrm{num}(X) = (e, j)$ для некоторого $j \in \omega\})$.
(4) $\mathrm{Req}(\beta) = \mathcal{N}_{e,j}$ для некоторых $e, j \in \omega$.
  (а) $a = 0$. Полагаем $L(\alpha) = L(\beta) \setminus (\{\mathrm{Req}(\beta)\} \bigcup \{X \mid X \in L(\beta) \& \,\mathrm{num}(X) = (e, j)$ для некоторого $j \in \omega\})$.
  (б) $a = 1$. Полагаем $L(\alpha) = L(\beta) \setminus \{\mathrm{Req}(\beta)\}$.

Окончательно определяем $\mathrm{Req}(\alpha) = \mathrm{first}(L(\alpha))$.

На этом описание стратегии прикрепления требований к вершинам закончено.

Теперь α-стратегией будем называть вариант основного модуля для требования, которое назначено вершине α, с некоторыми изменениями, описанными в конструкции; S-стратегией, где $S \in \{\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{N}, \mathcal{S}\}$ будем называть стратегию α, если она работает над требованием вида $\mathcal{P}_e$, $\mathcal{R}_e$, $\mathcal{N}_{e,j}$, $\mathcal{S}_{e,j}$ соответственно. Отметим, что каждая $\mathcal{R}_e$-стратегия α будет строить свои варианты р.п. множества B_e и функционала Δ_e. Думаем, что никакой путаницы не возникнет, и поэтому не будем добавлять лишних индексов к нашим множествам. Шаг s назовем α-шагом, если стратегия α имела возможность работать на шаге s. Для работы со стратегиями α на дереве стратегий изменим определения функций длины $\ell(e, s)$, $m(e, s)$ следующим образом. Пусть $\mathrm{Req}(\alpha) = \mathcal{R}_e$. Тогда, если s — α-шаг, то $\ell(\alpha, s) = \ell(e, s)$; в противном случае $\ell(\alpha, s) = \ell(e, t)$, где t — наибольший α-шаг, меньший s. Аналогично определяем $m(\alpha, s)$.

Полная конструкция

Шаг 0. $A_0 = \emptyset$, для всех e все $B_{e,0} = \emptyset$, Δ_e, $\Gamma_{e,j}$ не определены, все стратегии $\alpha \in T$ инициализированы.

Шаг $s+1$. Работаем по подшагам $t \leqslant s$, причем на каждом подшаге t одна из стратегий α длины t будет иметь возможность работать (при $t = 0$ работает стратегия λ, которой назначено требование $\mathcal{P}_0$). Возможны четыре случая.

$\mathrm{Req}(\alpha) = \mathcal{P}_e$. Стратегия α работает над требованием $\mathcal{P}_e$, как описано в основном модуле для $\mathcal{P}_e$. После этого определяем выход o стратегии α следующим образом: если стратегия находится в (4), то выходом будет *0*, в противном случае — *1*. Инициализируем стратегии $\beta >_{\mathrm{L}} \alpha\hat{\ }o$. Далее, если стратегия только что прошла через (3) в (4) (перечислила некоторый элемент в A), то определяем $\delta_{s+1} = \alpha$ и переходим к следующему шагу $s+2$. В противном случае определяем следующую стратегию β, которая имеет возможность работать на подшаге $t+1 : \beta = \alpha\hat{\ }o$. Переходим к подшагу $t+1$.

$\mathrm{Req}(\alpha) = \mathcal{R}_e$. Стратегия α работает над требованием $\mathcal{R}_e$. Работу производим только в том случае, если шаг s является e-расширяющим. В первую очередь проверяем, есть ли точки, в которых необходимо корректировать функционал Δ_e. Если есть, то выбираем такую наименьшую точку x и перечисляем $\delta_e(x)$ в B_e. После этого функционал Δ_e во всех точках $y > x$ считается неопределенным. Определяем $\delta_{s+1} = \alpha$ и переходим к следующему шагу $s+2$. Если корректировать нечего, то стратегия определяет функционал Δ_e в точках x, для которых $\ell(\alpha, s) > x$ и в которых он не определен. После этого определяем выход o стратегии α следующим образом: если шаг s был e-расширяющим, то выходом считаем *0*, в противном случае — *1*. Определяем следующую стратегию β, которая имеет возможность работать на подшаге $t+1 : \beta = \alpha\hat{\ }o$. Переходим к подшагу $t+1$.

$\mathrm{Req}(\alpha) = \mathcal{S}_{e,j}$. Стратегия α работает над требованием $\mathcal{S}_{e,j}$, как описано в основном модуле для $\mathcal{S}_{e,j}$. После этого определяем выход o стратегии α следующим образом: если стратегия находится в (4), то выходом будет *0*, в противном случае — *1*. Инициализируем стратегии $\beta >_{\mathrm{L}} \alpha\hat{\ }o$. Далее, если стратегия только что прошла через (3) в (4) (перечислила некоторый элемент в B_e), то определяем $\delta_{s+1} = \alpha$ и переходим к следующему шагу $s+2$. В противном случае определяем следующую стратегию β, которая имеет возможность работать на подшаге $t+1 : \beta = \alpha\hat{\ }o$. Переходим к подшагу $t+1$.

$\mathrm{Req}(\alpha) = \mathcal{N}_{e,j}$. Стратегия α работает над требованием $\mathcal{N}_{e,j}$, как описано в основном модуле для $\mathcal{N}_{e,j}$. Если работал цикл k и установил новый запрет $r_2(k)$, то ищем $\mathcal{P}$-стратегии $\beta \supseteq \alpha\hat{\ }0$ такие, что их представители $x(\beta) < r_2(k)$ и $x(\beta) \notin A$. Если таких нет, ничего не делаем. Если есть, выбираем $<$-наименьшую такую β_0. Связываем β_0 с циклом k и инициализируем $\mathcal{P}$-стратегии $\gamma > \beta_0$ такие, что $\gamma \supseteq \alpha\hat{\ }0$. После этого определяем выход o стратегии α следующим образом: если стратегия начала новый цикл, то выходом будет *0*, в противном случае — *1*. Инициализируем стратегии $\beta >_{\mathrm{L}} \alpha\hat{\ }o$. Далее, определяем следующую стратегию β, которая имеет возможность работать на подшаге $t+1 : \beta = \alpha\hat{\ }o$. Переходим к подшагу $t+1$.

В каждом из рассмотренных случаев при $t = s$ следующую стратегию не выбираем, а, завершая шаг $s+1$, определяем $\delta_{s+1} = \alpha$ и переходим к следующему шагу $s+2$.
Конструкция закончена.

Проверка конструкции

Для завершения доказательства теоремы докажем ряд технических лемм.

Определим истинный путь $f \in [T]$ как самую левую бесконечную ветвь дерева T, посещаемую δ_s в течение конструкции бесконечное число раз, т.е. для всех n, если $\alpha = f \upharpoonright n$, то $f(n) = a$ означает окончательный выход стратегии α. Покажем, что истинный путь в нашей конструкции определяется корректно.

Лемма 1.1. *Истинный путь f существует.*

Доказательство. Во-первых, очевидно, что $\lim_s |\delta_s| = \infty$. Во-вторых, наше дерево стратегий бинарно. Поэтому ясно, что истинный путь f определяется однозначно. $\square$

Лемма 1.2. *Все вершины $\alpha \subset f$ инициализируются конечное число раз.*

Доказательство. Пусть α — не $\mathcal{P}$-стратегия. Стратегию $\alpha \subset f$ могут инициализировать только такие стратегии β, для которых либо $\beta <_{\mathrm{L}} \alpha$, либо $\beta \subset \alpha$. В первом случае, т. к. $\alpha \subset f$, то, по определению истинного пути, β может это делать только конечное число раз. Во-втором случае по нашей конструкции никакая β не может инициализировать $\alpha \supset \beta$ вообще. Пусть теперь α — $\mathcal{P}$-стратегия. По определению истинного пути существует шаг s_0 такой, что для $t \geqslant s_0$ $\delta_t \not<_{\mathrm{L}} \alpha$. Учитывая это и тот факт, что $\mathcal{P}$-стратегий $\beta \subset \alpha$ конечное число, заключаем, что существует шаг $s_1 \geqslant s_0$, к которому все возможные прикрепления стратегий $\beta < \alpha$ к циклам $\mathcal{N}$-стратегий уже сделаны. После шага s_1 стратегия α больше инициализироваться не будет. $\square$

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathrm{Req}(\alpha) = \mathcal{N}_{e,j}$. Обозначим через $R_1(\alpha, s)$ запрет стратегии α на B_e после шага s; через $R_2(\alpha, s)$ — запрет стратегии α на A после шага s. Для $\mathcal{S}$-стратегий β $R_2(\beta, s)$ определяем аналогично; для всех s полагаем $R_1(\beta, s) = 0$. Для $\mathcal{R}$-стратегий и $\mathcal{P}$-стратегий γ для всех s $R_1(\gamma, s) = R_2(\gamma, s) = 0$.

Лемма 1.3. *Требования $\mathcal{P}_e$ для всех e вдоль истинного пути удовлетворяются.*

Доказательство. Стратегия прикрепления требований к вершинам дерева стратегий гарантирует, что вдоль любой бесконечной ветви расположены все требования $\mathcal{P}_e$.

Рассмотрим любую $\mathcal{P}$-стратегию $\alpha \subset f$. По лемме 1.2 существует шаг s, после которого α уже не инициализируется. Пусть $\beta_0{}^\frown 0 \subseteq \beta_1{}^\frown 0 \subseteq \cdots \subseteq \beta_n{}^\frown 0 \subseteq \alpha \subset f$, где β_i — все такие $\mathcal{N}$-стратегии, что α находится под их бесконечными выходами. После шага s все прикрепления стратегии α к некоторым циклам k_i стратегий β_i будут окончательными. Поэтому существует шаг $t \geqslant s$, к которому все возможные связи стратегии α будут определены. Таким образом, после шага t на α-шагах стратегии α уже ничто не будет мешать выполнить требование $\mathrm{Req}(\alpha)$. $\square$

Лемма 1.4. *Требования $\mathcal{M}_e$ для всех e вдоль истинного пути удовлетворяются.*

Доказательство. Фиксируем требование $\mathcal{M}_e$. Ему соответствуют $\mathcal{R}_e$-, $\mathcal{S}_{e,j}$- и $\mathcal{N}_{e,j}$-стратегии, $j \in \omega$. Стратегия прикрепления требований вершинам дерева стратегий гарантирует, что вдоль любой бесконечной ветви расположены все требования $\mathcal{R}_e$.

Пусть $\alpha \subset f$ такова, что $\mathrm{Req}(\alpha) = \mathcal{R}_e$.

Если $\alpha{}^\frown 1 \subset f$, то $\lim_s \ell(\alpha, s) < \infty$, и требование $\mathcal{R}_e$ выполнено. Более того, ниже конечного выхода $\mathcal{R}_e$ не нужны ни $\mathcal{S}_{e,j}$-, ни $\mathcal{N}_{e,j}$-стратегии. Таким образом, требование $\mathcal{M}_e$ в этом случае выполнено.

Пусть $\alpha{}^\frown 0 \subset f$. Вначале покажем, что в этом случае $\Delta_e^{B_e}$ будет всюду определенным и правильно вычислять $(D_1 - D_2)$. Действительно: в данном случае существует бесконечно много e-расширяющих шагов, для любого x $(D_1 - D_2) \restriction x$ может меняться лишь конечное число раз, поэтому по конструкции $\Delta_e^{B_e}$ будет всюду определенным. Так как на каждом e-расширяющем шаге мы в первую очередь корректируем $\Delta_e^{B_e}$, то легко видеть, что он правильно вычисляет $(D_1 - D_2)$ во всех точках (начиная с некоторого шага s, после которого α больше не инициализируется).

Далее, возможны два случая: 1) существует $\mathcal{N}_{e,j}$-стратегия β_0 такая, что $\beta_0{}^\frown 0 \subset f$; 2) для всех $\mathcal{N}_{e,j}$-стратегий β $\beta{}^\frown 1 \subset f$.

1) По лемме 1.2 существует шаг s, после которого β_0 не инициализируется. Так как $\beta_0{}^\frown 0 \subset f$, то работает бесконечно много циклов стратегии β_0, каждый из которых либо ждет всегда в (4), либо проходит в (5) через (4б). Это означает, что начиная с шага s, строящийся функционал $\Gamma_{e,j}^{(D_1 - D_2)}$ будет всюду определенным и правильно вычислять $(D_1 \oplus D_2)$. Тем самым β_0 удовлетворяет требование $\mathcal{R}_e$, выполняя его второй дизъюнкт. Ниже бесконечного выхода β_0 уже нет ни $\mathcal{S}_{e,i}$-, ни $\mathcal{N}_{e,i}$-стратегий, $i > j$. Требование $\mathcal{M}_e$ выполнено.

2) Фиксируем любую стратегию $\beta \supseteq \alpha\hat{}0$ такую, что $\mathrm{Req}(\beta) = \mathcal{N}_{e,j}$. По лемме 1.2 существует шаг s, после которого β не инициализируется. Так как $\beta\hat{}1 \subset f$, то некоторый цикл стратегии β после шага s либо всегда ждет в (2), либо прошел в (5) через (4a). Таким образом, требование $\mathcal{N}_{e,j}$ выполнено. Отметим, что в этом случае существуют конечные пределы запретов на B_e и A: $R_1(\beta) = \lim_s R_1(\beta, s)$ и $R_2(\beta) = \lim_s R_2(\beta, s)$. Таким образом, все требования $\mathcal{N}_{e,j}$ в этом случае выполняются, порождая конечные запреты ниже своего конечного выхода. Напомним, что при этом $\mathcal{N}$-стратегия не мешает $\mathcal{R}_e$-стратегии α строить всюду определенный функционал $\Delta_e^{B_e}$, правильно вычисляющий $(D_1 - D_2)$. Теперь докажем, что и все требования $\mathcal{S}_{e,j}$, лежащие на истинном пути, удовлетворяются в этом случае. Фиксируем любую стратегию $\gamma \supseteq \alpha\hat{}0$ такую, что $\mathrm{Req}(\gamma) = \mathcal{S}_{e,j}$. По лемме 1.2 существует шаг s, после которого γ не инициализируется. Рассмотрим следующий запрет на B_e:

$$R = \max\{R_1(\beta) \mid \alpha\hat{}0 \subseteq \beta < \gamma \ \ \& \ \ \mathrm{num}(\mathrm{Req}(\beta)) = (e, i) \text{ для некоторого } i \in \omega\}.$$

Из вышеизложенных фактов следует, что он конечен и к шагу s уже будет достигнут. Следовательно, после шага s стратегии γ уже ничто не будет мешать выполнить требование $\mathcal{S}_{e,j}$.

Таким образом, $\mathcal{R}_e$-стратегия построила всюду определенный функционал $\Delta_e^{B_e} = (D_1 - D_2)$, все $\mathcal{S}_{e,j}$ и $\mathcal{N}_{e,j}$ выполнены. Следовательно, $\mathcal{M}_e$ выполнено. $\square$

Доказательство теоремы закончено.

Теперь можем получить наш основной результат. Вначале напомним, что в первой части статьи [1] был доказан критерий ИСВ пары: собственно d-р. п. степень $\mathbf{d}$ и р. п. степень $\mathbf{b} > \mathbf{d}$ образуют изолированную сверху пару тогда и только тогда, когда существует d-р. п. множество $(D_1 - D_2) \in \mathbf{d}$ такое, что $(D_1 \oplus D_2) \in \mathbf{b}$ и между степенями $\deg(D_1 - D_2)$ и $\deg(D_1 \oplus D_2)$ нет р. п. степеней. Из этого критерия и нашей теоремы легко получаем следующее

Следствие 1. Существует нерекурсивная р. п. степень $\mathbf{a}$ такая, что все d-р. п. степени $\mathbf{d} < \mathbf{a}$ являются неизолированными сверху.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = \deg(A)$, где A — построенное нами в теореме нерекурсивное р. п. множество. Пусть $\mathbf{d} < \mathbf{a}$ — собственно d-р. п. степень. По критерию ИСВ пары, если бы $\mathbf{d}$ была ИСВ степенью, тогда существовало бы d-р. п. множество $(D_1 - D_2) \in \mathbf{d}$ такое, что между $(D_1 - D_2)$ и $(D_1 \oplus D_2)$ нет р. п. множеств (по тьюринговой сводимости). Но по теореме для *любого* d-р. п. множества $(D_1 - D_2) <_{\mathrm{T}} A$ либо найдется р. п. множество B: $(D_1 - D_2) <_{\mathrm{T}} B <_{\mathrm{T}} (D_1 \oplus D_2)$, либо $(D_1 - D_2) \equiv_{\mathrm{T}} (D_1 \oplus D_2)$. Так как степень $\mathbf{d}$ является собственно d-р. п. степенью, то должно выполняться первое свойство. Следовательно, степень $\mathbf{d}$ неизолирована сверху. $\square$

Следствие 2. ИСВ степени в структуре р. п. степеней не плотны.

Следствие 3. Существует неизолированная сверху собственно d-р. п. степень.

Литература

1. Ефремов А.А., *Изолированные сверху d-р. п. степени*, I // Изв. вузов. Математика. – 1998. – №2. – С.20–28.
2. Cooper S.B., Yi X. *Isolated d. r. e. degrees*, University of Leeds, preprint, 1995.
3. Soare R.I., *Recursively enumerable sets and degrees: a study of computable functions and computably generated sets.* – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – 437 p.

Казанский государственный университет

Поступила 18.09.1995