Известия вузов. Математика
2013, № 8, с. 80–85

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение, представленное А.М. Бикчентаевым

С.С. БЕЛЬМЕСОВА, Л.С. ЕФРЕМОВА

ОБ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЕМЕЙСТВЕ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕМ ЭНДОМОРФИЗМЫ МОРСА–СМЕЙЛА

Аннотация. В некотором однопараметрическом семействе квадратичных отображений плоскости указан промежуток значений параметра так, что каждое отображение семейства при значении параметра из выделенного промежутка является сингулярным эндоморфизмом Морса–Смейла.

Ключевые слова: квадратичное отображение, эндоморфизм Морса–Смейла.

УДК: 517.987

1. Введение

В настоящее время в мировой математической литературе появляются работы, в которых исследуются дискретные динамические системы, связанные с различными моделями квантовой механики и, в частности, с дискретными аналогами уравнения Шрёдингера [1], [2]. К этому направлению относится и данная работа. В ней рассматривается подсемейство (при $\mu \in (0,1]$) однопараметрического семейства квадратичных отображений

$$F_\mu(x,y) = (xy, (x-\mu)^2) \tag{1}$$

(где (x,y) — произвольная точка плоскости $\mathbf{R}^2$, $\mu \in [0,2]$), связанного с задачей изучения коэффициентов прохождения и отражения плоской волны с заданным импульсом в поле кристаллической решетки [3], [4]. В работе [3] при изучении дискретного уравнения Шрёдингера приводится схема, с помощью которой можно продуцировать специальные отображения следа (“trace maps”), одним из которых является отображение $F_2 = (xy, (x-2)^2)$, включенное в семейство (1) при $\mu = 2$. Задача исследования некоторых аспектов динамики отображения F_2 сформулирована А.Н. Шарковским в [5]. В работах [6] и [7] изучены общие свойства отображений семейства F_μ, справедливые при всех $\mu \in [0,2]$. Кроме того, в [7] приведены результаты полного исследования фазовой плоскости невозмущенного отображения F_0.

Данная работа является продолжением [6], [7]. В ней доказано, что при любом $\mu \in (0,1]$ отображение F_μ представляет собой сингулярный эндоморфизм Морса–Смейла.

Поступила 31.05.2012

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2009–2013 гг.) Министерства образования и науки (грант № 14B37.21.0361).

При любом $n \geq 1$ обозначим через F_μ^n n-ю итерацию отображения F_μ, а через $f_{\mu,n}(x,y)$ и $g_{\mu,n}(x,y)$ — первую и вторую координатные функции отображения F_μ^n соответственно, т. е. $F_\mu^n(x,y) = (f_{\mu,n}(x,y), g_{\mu,n}(x,y))$.

Перед формулировкой основного результата приведем необходимые определения.

Определение 1 ([8], с. 140)**.** Точка $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ называется *неблуждающей* для отображения $F : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$, если для любого открытого множества $U \subset \mathbf{R}^2$, $(x,y) \in U$, существует такое $N > 0$, что $F^N(U) \cap U \neq \emptyset$. Множество всех неблуждающих точек отображения F называется *неблуждающим* множеством отображения F и обозначается $\Omega(F)$.

Распространим определение из [9] (несингулярного) эндоморфизма Морса–Смейла, заданного на компактном многообразии, на случай отображений плоскости.

В [10] рассмотрены несингулярные потоки Морса–Смейла. По аналогии с [10] будем говорить о несингулярных эндоморфизмах Морса–Смейла.

В случае эндоморфизмов глобальное устойчивое многообразие точки может быть несвязным множеством, поэтому в определении 2 используется локальное устойчивое многообразие. Локальным устойчивым многообразием $W^s_{\mathrm{loc}}(p)$ точки p будем называть связную компоненту глобального устойчивого многообразия $W^s(p)$ точки p, содержащую точку p [11].

Определение 2. Эндоморфизм $F : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ будем называть (*несингулярным*) *эндоморфизмом Морса–Смейла*, если

(1) неблуждающее множество $\Omega(F)$ конечно и состоит из гиперболических периодических точек;

(2) локальное устойчивое $W^s_{\mathrm{loc}}(p)$ и глобальное неустойчивое $W^u(q)$ многообразия различных периодических точек p и q пересекаются трансверсально, т. е. если $(x,y) \in W^s_{\mathrm{loc}}(p) \cap W^u(q)$, то касательное пространство $T_{(x,y)}$ разлагается в прямую сумму касательных пространств $T_{(x,y)}W^s_{\mathrm{loc}}(p)$, $T_{(x,y)}W^u(q)$ так, что справедливо равенство $T_{(x,y)} = T_{(x,y)}W^s_{\mathrm{loc}}(p) \oplus T_{(x,y)}W^u(q)$.

Определение 3. Эндоморфизм $F : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ с конечным неблуждающим множеством $\Omega(F)$ будем называть *сингулярным* эндоморфизмом Морса–Смейла, если выполнено хотя бы одно из следующих свойств:

(1) в неблуждающем множестве $\Omega(F)$ существует негиперболическая периодическая точка;

(2) существуют периодические точки p' и $q' \in \Omega(F)$, локальное устойчивое $W^s_{\mathrm{loc}}(p')$ и глобальное неустойчивое $W^u(q')$ многообразия которых пересекаются нетрансверсально.

Сформулируем основной результат данного сообщения.

Теорема 1. *Отображение F_μ при каждом $\mu \in (0,1]$ представляет собой сингулярный эндоморфизм Морса–Смейла, обладающий следующими свойствами*:

1) *при всех $\mu \in (0,1)$ неблуждающее множество $\Omega(F_\mu)$ состоит из трех неподвижных точек (стока $A_1(0,\mu^2)$, источника $A_2(\mu+1,1)$, седла $A_3(\mu-1,1)$) и периодической орбиты B периода два, образованной источниками*

$$B_1\Big(\frac{\mu^2+1-\sqrt{\mu^2+1}}{\mu}, \frac{\mu^2}{(1-\sqrt{\mu^2+1})^2}\Big) \quad и \quad B_2\Big(\frac{\mu^2+1+\sqrt{\mu^2+1}}{\mu}, \frac{\mu^2}{(1+\sqrt{\mu^2+1})^2}\Big);$$

2) *при $\mu = 1$ множество $\Omega(F_1)$ состоит из двух неподвижных точек (негиперболической точки $A_1(0,1)$, источника $A_2(2,1)$) и периодической орбиты B периода два, образованной источниками $B_1\big(2-\sqrt{2}, \frac{1}{3-2\sqrt{2}}\big)$ и $B_2\big(2+\sqrt{2}, \frac{1}{3+2\sqrt{2}}\big)$*;

3) *при всех* $\mu \in (0,1)$ *локальное устойчивое многообразие* $W^s_{\mathrm{loc}}(A_1)$ *неподвижной точки* $A_1(0,\mu^2)$ *пересекается нетрансверсально с глобальным неустойчивым многообразием* $W^u(A_3)$ *неподвижной точки* $A_3(\mu-1,1)$ *по сепаратрисе, идущей из седла* A_3 *в сток* A_1.

2. Схема доказательства теоремы 1

Обозначим через K_i i-й открытый квадрант плоскости $\mathbf{R}^2$. Так как из задания отображения F_μ вытекает справедливость включений $F_\mu(K_1) \subseteq K_1$, $F_\mu(K_2) \subseteq K_2$ и равенства $F_\mu(\{0\} \times [0,+\infty)) = \{(0,\mu^2)\}$, то верхняя полуплоскость является инвариантным множеством. Из соотношения (1) следует также, что для любой точки $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ при $y \le 0$ выполнено $g_{\mu,1}(x,y) = (x-\mu)^2 \ge 0$. Поэтому нижняя полуплоскость отображается в верхнюю полуплоскость. Отсюда следует, что для исследования асимптотики траекторий точек отображения F_μ достаточно рассмотреть траектории точек первого и второго квадрантов плоскости $\mathbf{R}^2$.

Определим неограниченный квадрант $D'_{\mu,\infty} = \{(x,y) : x \ge \mu+1,\ y \ge 1\}$ с вершиной в неподвижной точке $A_2(\mu+1,1)$. Заметим, что множество $D'_{\mu,\infty}$ является F_μ-инвариантным, а его дополнение $K_1 \setminus D'_{\mu,\infty}$ до K_1 не является F_μ-инвариантным.

Доказательство теоремы 1 основано на построении специального разбиения первого квадранта K_1 плоскости $\mathbf{R}^2$. В K_1 отображение F_μ представляет собой эндоморфизм. На рис. 1 указаны элементы разбиения квадранта K_1 с использованием прообразов луча $\{(x,y) : x = \mu+1, y > 0\}$ порядков $1,2,3$ и луча $\{(x,y) : x = \mu, y > 0\}$ порядка 1.

Инвариантная кривая Γ_μ, проходящая через неподвижную точку $A_2(\mu+1,1)$, не является единственной ([7] и, например, [12], гл. 2).

Важную роль в изучении асимптотического поведения траекторий точек квадранта K_1 играет

Теорема 2 ([6]). *Пусть* F_μ *— квадратичное отображение* (1). *Тогда при каждом* $\mu \in (0,1]$ *существует* C^1*-гладкая строго убывающая функция* $y = \Gamma_\mu(x)$, *определенная при всех* $x \in (\mu,+\infty)$, *причем* $\Gamma_\mu((\mu,+\infty)) = (0,+\infty)$; *график функции* $y = \Gamma_\mu(x)$ *есть* F_μ*-инвариантная кривая, лежащая в* $(K_1 \setminus D'_{\mu,\infty}) \cup \{A_2(\mu+1,1)\}$ *и проходящая через неподвижную точку — источник* $A_2(\mu+1,1)$.

Инвариантная кривая Γ_μ обладает следующими асимптотическими свойствами

$$\lim_{x\to\mu+0} \Gamma_\mu(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \Gamma_\mu(x) = +0.$$

Она разбивает квадрант K_1 на два неограниченных инвариантных подмножества:

$$D_{\mu,A_1} = \{(x,y) : x > 0,\ \ y > 0,\ \ y < \Gamma_\mu(x)\} \ \text{ и } \ D_{\mu,\infty} = \{(x,y) : x > 0,\ \ y > 0,\ \ y > \Gamma_\mu(x)\}$$

(см. рис. 1) со следующим асимптотическим поведением траекторий принадлежащих им точек.

Теорема 3. *Пусть* F_μ *— квадратичное отображение* (1), $\mu \in (0,1]$. *Тогда для любой точки* $(x,y) \in D_{\mu,A_1}$, *за исключением периодической орбиты периода два, образованной двумя источниками и всевозможными их прообразами, справедливы предельные равенства*

$$\lim_{n\to+\infty} f_{\mu,n}(x,\,y) = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} g_{\mu,n}(x,\,y) = \mu^2; \tag{2}$$

если же $(x,y) \in D_{\mu,\infty}$, *то справедливы равенства*

$$\lim_{n\to+\infty} f_{\mu,n}(x,\,y) = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} g_{\mu,n}(x,\,y) = +\infty.$$

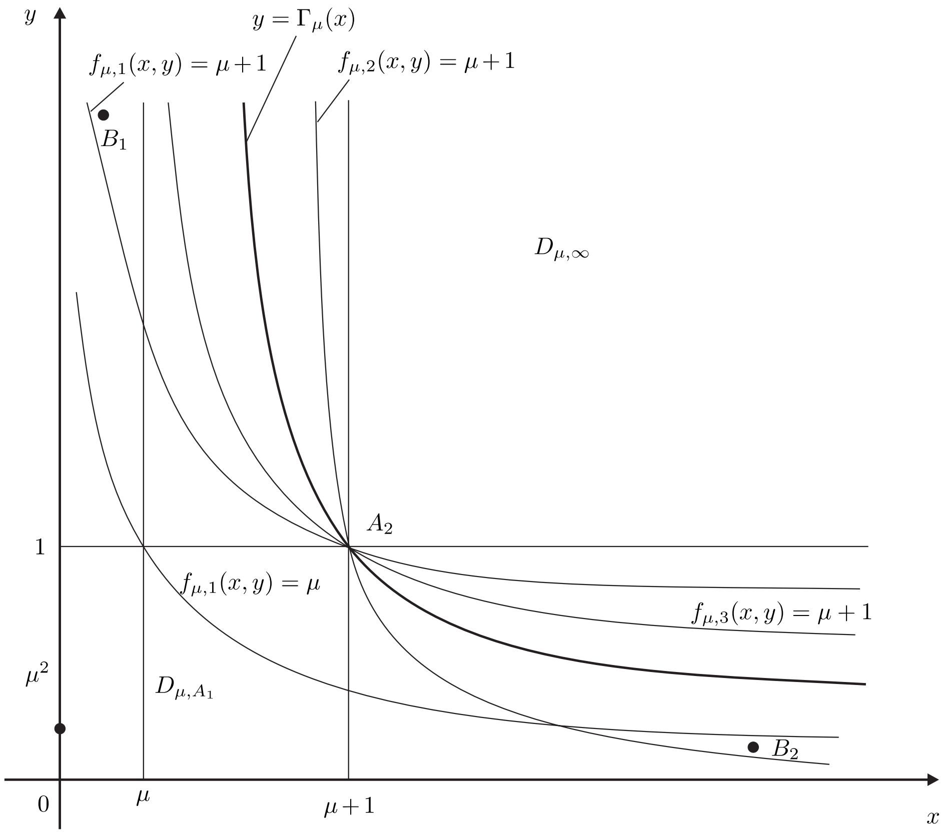

Рис. 1. Разбиение первого квадранта плоскости $\mathbf{R}^2$

Таким образом, теорема 3 завершает полное описание асимптотического поведения траекторий в первом квадранте. Множество $\Omega(F_\mu)\cap K_1$ конечно при всех $\mu\in(0,1]$ и состоит из неподвижной точки $A_2(\mu+1,1)$ и периодической орбиты B периода два, образованной точками $B_1\Big(\frac{\mu^2+1-\sqrt{\mu^2+1}}{\mu},\frac{\mu^2}{(1-\sqrt{\mu^2+1})^2}\Big)$ и $B_2\Big(\frac{\mu^2+1+\sqrt{\mu^2+1}}{\mu},\frac{\mu^2}{(1+\sqrt{\mu^2+1})^2}\Big)$.

Отображение F_μ является диффеоморфизмом в квадранте K_2 при всех $\mu\geq 0$. Так как седло $A_3(\mu-1,1)$ принадлежит K_2 при всех $\mu\in(0,1)$, то существуют непрерывные функции $y=\gamma_i^u(x)$, $y=\gamma_i^s(x)$, $i=1,2$, графики которых являются неустойчивыми γ_1^u, γ_2^u и устойчивыми γ_1^s, γ_2^s сепаратрисами седла A_3 ([13], с. 160), причем справедливы равенства $\gamma_1^u\cup\gamma_2^u=W^u(A_3)$, $\gamma_1^s\cup\gamma_2^s=W^s(A_3)$ (см. рис. 2). Глобальное устойчивое $W^s(A_3)$ и глобальное неустойчивое $W^u(A_3)$ многообразия седла A_3 разбивают второй квадрант K_2 на четыре множества

$$K_{21}=\{(x,y)\in K_2: y>\gamma_1^u(x),\ y>\gamma_1^s(x)\},\quad K_{22}=\{(x,y)\in K_2:\gamma_2^u(x)<y<\gamma_1^s(x)\},$$
$$K_{23}=\{(x,y)\in K_2: y<\gamma_2^u(x),\ y<\gamma_2^s(x)\},\quad K_{24}=\{(x,y)\in K_2:\gamma_2^s(x)<y<\gamma_1^u(x)\},$$

причем для любой точки $(x,y)\in K_{22}\cup K_{23}$ справедливы предельные равенства (2), а для любой точки $(x,y)\in K_{21}\cup K_{24}$ справедливы предельные равенства $\lim\limits_{n\to+\infty}f_{\mu,n}(x,\,y)=-\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}g_{\mu,n}(x,\,y)=+\infty$. Отсюда следует, что при всех $\mu\in(0,1)$ множество $\Omega(F_\mu)\cap K_2$ конечно и состоит из единственной неподвижной точки $A_3(\mu-1,1)$; а при $\mu=1$ неподвижные точки $A_3(\mu-1,1)$, $A_1(0,\mu^2)$ совпадают и $\Omega(F_\mu)\cap K_2=\emptyset$. Обратим внимание на поведение точек, лежащих на координатных осях Ox и Oy плоскости $\mathbf{R}^2$. Имеем $F_\mu(Ox)=\{0\}\times[0,+\infty)$, $F_\mu(Oy)=(0,\mu^2)$. Поэтому

$$(Ox\cup Oy)\cap\Omega(F_\mu)=A_1(0,\mu^2) \text{ при любом } \mu\in(0,1].$$

Приведенные рассуждения доказывают утверждения 1) и 2) теоремы 1.

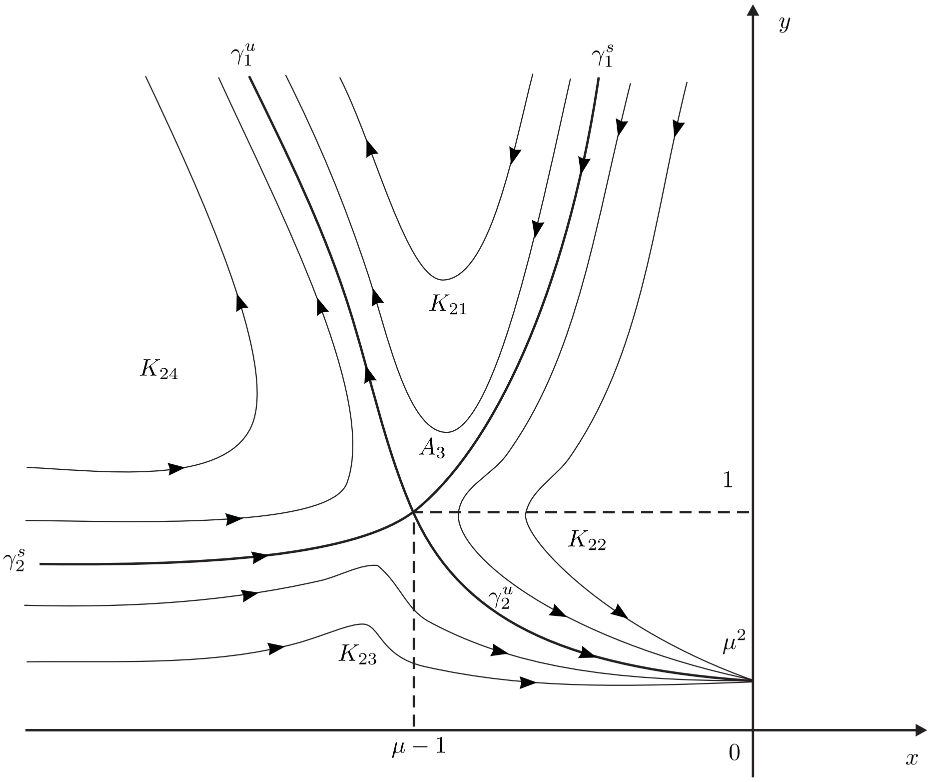

Рис. 2. Асимптотическое поведение траекторий точек в K_2

Сингулярность эндоморфизма F_μ при всех $\mu\in(0,1]$ связана со следующими причинами:

(1) при $\mu\in(0,1)$ локальное устойчивое многообразие $W^s_{\mathrm{loc}}(A_1)\cap K_2=W^s(A_1)\cap K_2$ стока A_1 в K_2 и глобальное неустойчивое многообразие $W^u(A_3)$ седла A_3 пересекаются нетрансверсально по сепаратрисе γ_2^u, идущей из седла A_3 в сток A_1;

(2) при $\mu=1$ неподвижная точка $A_1(0,1)$ не является гиперболической, так как один из ее мультипликаторов $\lambda_2(A_1)=1$.

Таким образом, справедливо утверждение 3) теоремы 1.

Литература

[1] Damanik D., Gorodetski A. *Hyperbolicity of the trace map for the weakly coupled Fibonacci hamiltonian*, Nonlinearity **22**, 123–143 (2009).

[2] Damanik D., Gorodetski A. *The spectrum of the weakly coupled Fibbonacci hamiltonian*, Elect. Research Announcements, Math. Sci. **16**, 23–29 (2009).

[3] Avishai Y., Berend D. *Transmission through a one-dimensional Fibonacci sequence of δ-function potentials*, Physical Review B **41** (9), 5492–5499 (1990).

[4] Avishai Y., Berend D., and Tkachenko V. *Trace maps*, Int. J. Modern Physics B **11** (30), 3525–3542 (1997).

[5] Sharkovskii A.N. *Problem list*, Int. Conf. “Low Dimensional Dynamics”, Oberwolfach, Germany, April 25 – May 1 1993 (Tagungsbericht 20, 1993), p. 17.
[6] Бельмесова С.С., Ефремова Л.С. *О квадратичных отображениях некоторого однопараметрического семейства, близких к невозмущенному*, Тр. МФТИ, № 2 (2), 46–57 (2010).
[7] Бельмесова С.С., Ефремова Л.С. *Об инвариантных множествах некоторых квадратичных отображений плоскости*, Вестн. Нижегородск. ун-та. Сер. матем., № 2 (2), 152–158 (2012).
[8] Каток А. Б., Хассельблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем* (Факториал, М., 1999).
[9] Brin M., Pesin Ya. *On Morse–Smale endomorphisms*, in: American Math. Soc. Transl. **171** (2), 35–45 (1996).
[10] Azimov D. *Round handles and non-singular Morse–Smale flows*, Ann. Math. **102**, 41–54 (1975).
[11] Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. *Разностные уравнения и их приложения* (Наук. Думка, Киев, 1986).
[12] Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения* (Мир, М., 1980).
[13] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. *Качественная теория динамических систем второго порядка* (Наука, М., 1966).

С.С. Бельмесова
ассистент, Центр подготовки управленческих кадров высшей квалификации,
Нижегородский государственный университет,
пр. Гагарина д. 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия,

e-mail: belmesovass@mail.ru

Л.С. Ефремова
доцент, кафедра дифференциальных уравнений и математического анализа,
Нижегородский государственный университет,
пр. Гагарина д. 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия,

e-mail: lefunn@gmail.com

S.S. Bel’mesova and L.S. Efremova

A one-parameter family of quadratic maps of a plane including Morse–Smale endomorphisms

Abstract. In an one-parameter family of quadratic maps of a plane, we indicate an interval of parameter values such that every map with a parameter value in the indicated interval is a singular Morse–Smale endomorphism.

Keywords: quadratic map, Morse–Smale endomorphism.

S.S. Bel’mesova
Assistant, Centre for High-Qualified Managers Training,
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod,
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod, 603950, Russia,

e-mail: belmesovass@mail.ru

L.S. Efremova
Associate Professor, Char of Differential Equations and Mathematical Analysis,
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod,
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod, 603950, Russia,

e-mail: lefunn@gmail.com