Министерство образования и науки Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ

Направление: 010100.68 - математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

Голоморфные связности на трансверсальном расслоении второго порядка

Работа завершена:
“___” _____ 2014 г. _____ С. К. Кузьмина

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор
“___” _____ 2014 г. _____ В. В. Шурыгин

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор
“___” _____ 2014 г. _____ В. В. Шурыгин

Казань — 2014

Содержание

1 Введение 3

2 Слоение на многообразии 4

3 Трансверсальное расслоение второго порядка слоения на многообразии 5

4 Структура многообразия над алгеброй триальных чисел на трансверсальном расслоении второго порядка 8

5 Категория трансверсальных расслоений второго порядка 12

6 Специальные автоморфизмы трансверсального расслоения второго порядка 15

7 Касательное расслоение слоеного многообразия M. 19

8 Соответствия между векторными полями на $T^2_{tr}M$ при автоморфизмах $T^2_{tr}M$ с тождественным отображением F^1 21

9 Связность в главном расслоении 26

10 Линейные связности на слоеном многообразии 29

11 $\mathbb{D}^2$-линейные связности на трансверсальном расслоении второго порядка 34

12 Соответствия между $\mathbb{D}^2$-гладкими линейными связностями на $T^2_{tr}M$ при автоморфизмах $T^2_{tr}M$ с тождественным отображением F^1 41

1 Введение

Целью работы является изучение трансверсальных расслоений второго порядка слоеных многообразий как гладких многообразий над алгеброй $\mathbb{D}^2$ триальных чисел. Трансверсальные расслоения принадлежат к общему классу полукасательных расслоений, изучавшихся В.В. Вишневским [**?**], [**?**]. Дальнейшие обобщения трансверсальных и полукасательных расслоений исследовались Л.Б. Смоляковой и В.В. Шурыгиным [**?**]. Геометрия трансверсальных расслоений второго порядка относится к области так называемой дифференциальной геометрии второго порядка (см. [**?**]). Одной из задач, возникающих в геометрии трансверсальных расслоений второго порядка является нахождение условий эквивалентности полей геометрических объектов относительно гладких преобразований над алгеброй триальных чисел. Впервые такого рода условия были найдены А.П. Широковым [**?**] для метрических тензоров на касательных расслоениях. Наличие структуры многообразия над $\mathbb{D}^2$ на трансверсальном расслоении второго порядка $T^2_{tr}M$ позволяет определить на $T^2_{tr}M$ $\mathbb{D}^2$-гладкие векторные поля и связности. Такие поля можно получать, в частности, применяя функтор $T^2_{tr}M$, относящий морфизму слоений $M \to M'$ отображение $T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M'$, к сечениям касательных расслоения слоеных многообразий.

§2 работы посвящен описанию структуры слоения на многообразии как псевдогрупповой структуры.

В §3 определяется трансверсальные расслоения второго и первого порядков на многообразия со слоением.

В §4 приводится определение алгебры триальных чисел $\mathbb{D}^2$, определяются $\mathbb{D}^2$-модули вида $\mathbb{D}^{2m} \oplus \mathbb{R}^n$. В предложении 1 найден общий вид $\mathbb{D}^2$-линейных отображений и в предложении 2 найден общий вид $\mathbb{D}^2$-гладкого отображения между открытыми подмножествами моделей вида $\mathbb{D}^{2m} \oplus \mathbb{R}^n$.

В §5 было приведено описание понятия категории общего вида и категории локально тривиальных расслоений.

§6 работы посвящен введению категории трансверсальных расслоений второго порядка, объектами которой являются трансверсальные расслоения второго порядка. А так же рассматриваются специальные автоморфизмы трансверсальных расслоений второго порядка.

В §7 показывается, что $TT^2_{tr}M$ и $T^2_{tr}TM$ эквивалентны и выведен вид произвольного $\mathbb{D}^2$-гладкого векторного поля.

В §8 было найдено условие при котором два $\mathbb{D}^2$-гладких векторных поля на $T^2_{tr}M$ эквивалентны и условие эквивалентности $\mathbb{D}^2$-гладкого векторного поля и $\mathbb{D}^2$-гладкого проектируемого векторного поля.

§9 посвящен введению определения связности в главном расслоении.

В §10 описываются линейные связности на слоеном многообразии. В предложении 9 был найден закон преобразования коэффициентов линейной связности в расслоении $P^1_{fol}M$. Так же был введен класс проектируемых связностей.

В §11 описываются $\mathbb{D}^2$-линейные связности на трансверсальном расслоении второго порядка. В предложении 11 был найден закон преобразования коэффициентов линейной связности в расслоении $P^1(\mathbb{D}^2)T^2_{tr}M$.

§12 посвящен соответствиям между $\mathbb{D}^2$-гладкими линейными связностями на $T^2_{tr}M$ при автоморфизмах $T^2_{tr}M$, индуцирующих тождественное преобразование трансверсального расслоения первого порядка.

2 Слоение на многообразии

Структура слоения на многообразии определяется следующим образом [**?**]. Проекция

$$p : \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ni \{x^i, y^\alpha\} \mapsto \{x^i\} \in \mathbb{R}^m.$$

где индексы $i, j, \ldots$ пробегают значения от 1 до m, а индексы $\alpha, \beta, \ldots$ от $m+1$ до $m+n$, определяет на пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ стандартное слоение коразмерности n, представляющее $\mathbb{R}^{m+n}$ в виде дизъюнктного объединения m-мерных плоскостей, имеющих уравнения $x^i = x^i_0 = const$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\mathbb{R}^{m+n} = \bigcup_{\{x^i\} \in \mathbb{R}^m} \{x^i\} \times \mathbb{R}^n.$$

Локальный диффеоморфизм

$$\varphi : u \ni \{x^i, y^\alpha\} \mapsto \{\varphi^j(x^i, y^\alpha), \varphi^\beta(x^i, y^\alpha)\} \in U',$$

где U и U' — открытые подмножества в $\mathbb{R}^{m+n}$, называется локальным автоморфизмом стандартного слоения коразмерности n на $\mathbb{R}^{m+n}$, если

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial y^\alpha} = 0, \tag{1}$$

то есть локально φ^i не зависит от y^α. Имея это в виду, будем в дальнейшем, для простоты, записывать условие (**??**) в следующем виде: $\varphi^j = \varphi^j(x^i)$.

Множество всех локальных автоморфизмов стандартного слоения образует псевдогруппу $\Gamma_{m,n}$, и слоение $\mathcal{F}$ коразмерности n на $(m+n)$-мерном многообразии M определяется максимальным атласом $\Phi_{n,m}$ на M с преобразованиями координат, принадлежащими псевдогруппе $\Gamma_{m,n}$ [**?**]. Карты из атласа $\Phi_{m,n}$ называются расслоенными. Многообразие со слоением обозначается следующим образом: $(M, \mathcal{F})$. Слоем слоения $\mathcal{F}$ на многообразии M, проходящим через точку x, называется максимальное связное подмногообразие $L_x \ni x$ в M, определяющееся в расслоенных картах уравнениями вида $x^i = x_0^i = const$.

Пусть $(M, \mathcal{F})$ и $(M', \mathcal{F}')$ — два слоеных многообразия. Отображение $f : M \to M'$, которое в расслоенных картах задается уравнениями вида

$$x^{i'} = f^{i'}(x^i), \quad y^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^i, y^\alpha). \tag{2}$$

отображает слои слоения $\mathcal{F}$ в слои слоения $\mathcal{F}'$ и называется *морфизмом слоений* или *слоеным отображением.*

3 Трансверсальное расслоение второго порядка слоения на многообразии

Пусть M — $(m+n)$-мерное слоеное многообразие, z — некоторая точка многообразия M, (U, h) — расслоенная карта на M,

$$h : U \ni z \mapsto \{x^i = h^i(z), y^\alpha = h^\alpha(z)\} \in \mathcal{U}^* \subset \mathbb{R}^{m+n},$$

такая,что $z \in U$. Рассмотрим множество K_z гладких кривых $\gamma : (a, b) \to M$ таких, что $0 \in (a, b), \gamma(0) = z \in M$, проходящих через точку z. Введем отношение эквивалентности $\sim$ на K_z. Две кривые γ_1 и γ_2 назовем эквивалентными, если выполняется следующее условие:

$$\frac{d(h^i \circ \gamma_1)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(h^i \circ \gamma_2)}{dt}\Big|_{t=0}, \ \frac{d^2(h^i \circ \gamma_1)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{d^2(h^i \circ \gamma_2)}{dt^2}\Big|_{t=0}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{3}$$

где, в случае необходимости, область определения кривых предполагается уменьшенной так, чтобы композиции $h^i \circ \gamma_1$ и $h^i \circ \gamma_2$ были определены. Всякий класс *эквивалентности* $X = [\gamma]^2$ из фактор-множества $K_z/\sim$ называется трансверсальным вектором второго порядка на многообразии M в точке z.

Числа

$$\frac{d(h^i \circ \gamma)}{dt}\Big|_{t=0} = \dot{x}^i, \quad \frac{d^2(h^i \circ \gamma)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \ddot{x}^i, \quad i = \overline{1, m},$$

называются координатами трансверсального вектора второго порядка $[\gamma]^2$ в карте (U, h). При переходе от карты (U, h) к другой карте (U', h'), $h' : U' \ni x \mapsto x^{i'} = h^{i'}(x) \in \mathbb{R}^{m+n}$, такой, что $U' \ni z$, координаты трансверсальных векторов второго порядка преобразуются следующим образом:

$$\dot{x}^{i'} = \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^i}\dot{x}^i, \quad \ddot{x}^{i'} = \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i, \tag{4}$$

где $x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i)$ — преобразования координат $h^{i'} \circ h^{-1}$ на пересечении $U \cap U'$ областей определения карт. Из формулы (**??**) так же следует, что введенное отношение эквивалентности на множестве K_z гладких кривых не зависит от выбора карты (U, h) на M такой, что $z \in U$.

Множество $K_z/\sim$ называется трансверсальным пространством второго порядка к M в точке z. Для обозначения этого множества используется символ $T^2_{tr\,z}M$. Обозначим через $T^2_{tr}M$ объединение всех трансверсальных пространств второго порядка $T^2_{tr}M = \bigcup_{z \in M} T^2_{tr\,z}M$ и введем отображение $\pi : T^2_{tr}M \ni [\gamma]^2 \mapsto \gamma(0) \in M$. На $T^2_{tr}M$ естественным образом вводится структура гладкого 3m+n-мерного многообразия. Каждой карте

$$h : U \ni z \mapsto \{x^i, y^\alpha\} \in U^* \subset \mathbb{R}^{m+n} \tag{5}$$

из атласа на M соответствует карта

$$h^2_{tr} : \pi^{-1}(U) \ni v_z \mapsto \{x^i, y^\alpha, \dot{x}^i, \ddot{x}^i\} \in \mathcal{U}^* \times \mathbb{R}^{m+n} \tag{6}$$

на $T^2_{tr}M$, где $\dot{x}^i$ и $\ddot{x}^i$ — координаты вектора v_z в карте h. При этом функциям склейки $h' \circ h^{-1}$ на M, имеющим вид $x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i)$, на $T_{tr}M$ соответствуют функции склейки $(h^2_{tr})' \circ (h^2_{tr})^{-1}$, имеющие вид

$$x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i),\ y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha),\ \dot{x}^{i'} = \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^{j'}}\dot{x}^j,\ \ddot{x}^{i'} = \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i. \tag{7}$$

Многообразие $T^2_{tr}M$ называется *трансверсальным расслоением второго порядка* слоеного многообразия M, гладкое отображение π — *проекцией* $T^2_{tr}M$ на M. Карта (**??**) на $T^2_{tr}M$ называется продолжением карты (**??**) слоеного многообразия M. Пространства $T^2_{trz}M = \pi^{-1}(z)$ называются *слоями* трансверсального расслоения второго порядка $T^2_{tr}M$. Четверка $(T^2_{tr}M, M, \pi, \mathbb{R}^{2m})$ является локально тривиальным расслоением [**?**]. Слоеное многообразие M является базой этого расслоения, а пространство $\mathbb{R}^{2m}$ — стандартным слоем.

Сечения трансверсального расслоения второго порядка называются трансверсальными полями второго порядка на слоеном многообразии M.

Из уравнений (**??**) следует, что $T^2_{tr}M$ несет на себе каноническое слоение, слои которого определяются в локальных картах уравнениями $x^i = x^i_0 = const$, $\dot{x}^i = \dot{x}^i_0 = const$, $\ddot{x}^i = \ddot{x}^i_0 = const$. Это слоение называется поднятым слоением.

Морфизм слоений $f : M \mapsto M'$ относит всякой гладкой кривой $\gamma : (a, b) \to M$ из K_z гладкую кривую $\gamma' = f \circ \gamma : (a, b) \to M'$ такую, что $\gamma'(0) = z' = f(z) \in M'$. Таким образом, возникает отображение $\tilde{f} : K_z \to K_{z'}$. При этом эквивалентные кривые переходят в эквивалентные. В результате возникает отображение

$$T^2_{tr\,z}f : T^2_{tr\,z}M \ni [\gamma]^2 \mapsto [f \circ \gamma]^2 \in T^2_{tr\,z'}M'. \tag{8}$$

Если отображение $f : M \to M'$ в расслоенных картах $\{x^i, y^\alpha\}$ на M и $\{x^{i'}, y^{\alpha'}\}$ на M' задается уравнениями (**??**), то отображение (**??**) задается уравнениями

$$\dot{x}^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i}\dot{x}^i, \quad \ddot{x}^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i. \tag{9}$$

Из (**??**) и (**??**) следует, что морфизм слоений $f : M \to M'$ индуцирует гладкое отображение трансверсальных расслоений второго порядка

$$T^2_{tr}f : T^2_{tr}M \mapsto T^2_{tr}M', \tag{10}$$

которое в локальных координатах определяется уравнениями

$$\begin{gathered} x^{i'} = f^{i'}(x^i), \quad y^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^i, y^\alpha), \\ \dot{x}^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i}\dot{x}^i, \quad \ddot{x}^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i. \end{gathered} \tag{11}$$

Отображение (**??**) называется *продолжением морфизма* f.

Требуя, что бы в (**??**), совпадали в нуле только первые производные $d(h^i \circ \gamma_1)/dt|_0 = d(h^i \circ \gamma_2)/dt|_0$, получим новое отношение эквивалентности $\sim^1$ на множестве кривых на M. Отношение эквивалентности $\sim^1$ не зависит от выбора карты (U, h) на M. Мы будем называть класс $[\gamma]$ трансверсальным вектором в точке $z \in M$.

Пусть $T_{tr}M$ - множество трансверсальных векторов к M в точке x. На множестве $T_{tr}M = \bigcup_{x \in M} T_{trx}$ всех трансверсальных векторов к M индуцируется структура гладкого $(2m + n)$-мерного многообразия, расслоенного над M, называемого трансверсальным расслоением многообразия

M. Эта структура задается следующим образом. Пусть $\pi : T_{tr}M \to M$ — отображение, относящее трансверсальному вектору $X \in T_{tr}M$ точку $x \in M$. Карта (U, h) из атласа на M индуцирует карту

$$h^1_{tr} : (\pi^1_0)^{-1}(U) \ni X \mapsto \{x^i, \dot{x}^i, y^\alpha\} \in U^* \times \mathbb{R}^{2m+n}$$

на $T_{tr}M$, где $\dot{x} = d(h^i \circ \gamma)/dt|_0$. Преобразование координат $h' \circ h^{-1}$ на пересечении областей определения $U \cap U'$ карт (U, h) и (U', h') на M, имеющим вид $x^{i'} = f^{i'}(x^i)$, на $T_{tr}M$ соответствуют преобразования $h^{1\,\prime}_{tr} \circ (h^1_{tr})^{-1}$, имеющие вид:

$$x^{i'} = f^{i'}(x^i), \quad \dot{x}^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i}\dot{x}^i, \quad y^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^i, y^\alpha). \tag{12}$$

Каноническая проекция $\pi^1_0 : T_{tr}M \to M$ является гладким отображением. Из уравнений (**??**) следует, что расслоение $T_{tr}M$ является локально тривиальным расслоением над M со стандартным слоем $\mathbb{R}^m$. Имеется еще одна каноническая проекция $\pi^2_1 : T^2_{tr}M \to T_{tr}M$, также являющаяся гладким отображением. Проекция π^2_1 определяет локально тривиальное расслоение $T^2_{tr}M$ над TM со стандартным слоем $\mathbb{R}^m$ и функциями склейки (см. **??**). Кроме того, расслоение $\pi^2_1 : T^2_tM \to T_{tr}M$ является аффинным расслоением, то есть $\pi^2_1 : T^2_tM \to T_{tr}M$ является расслоением со структурной группой — группой аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^{n+m}$. На каждом слое этого расслоения при этом возникает естественная структура аффинного пространства. Ассоциированное векторное расслоение изоморфно векторному касательному расслоению $V^2_1T^2_{tr}M$, то есть расслоению касательных векторов к слоям расслоения $\pi^2_1 : T^2_tM \to T_{tr}M$

Трансверсальное расслоение $T_{tr}M$ несет на себе структуру $m+n$-мерного гладкого многообразия над алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D}$, то есть алгеброй размерности два над $\mathbb{R}$, элементы которой имеют вид $a + b\varepsilon$, $a, b \in \mathbb{R}$, а умножение определяется условием $\varepsilon^2 = 0$.

4 Структура многообразия над алгеброй триальных чисел на трансверсальном расслоении второго порядка

Алгеброй триальных чисел называется трехмерная ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей $\mathbb{D}^2$ над полем $\mathbb{R}$, операция умножения в которой в стандартном базисе $\{1 = e_1, \varepsilon = e_2, \varepsilon^2 = e_3\}$ определяется соотношением $\varepsilon^3 = 0$, а элементы имеют вид $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$.

Обозначим символом $(\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$ $\mathbb{D}^2$-модуль, элементами которого являются строки $\{X^i, y^\alpha\}$, состоящие из m элементов $X^i = x^i + \dot{x}^i\varepsilon + \ddot{x}^i\varepsilon^2$ алгебры $\mathbb{D}^2$ и n вещественных чисел y^α. Операция умножения элемента из $(\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$ на элемент из $\mathbb{D}^2$ определяется следующим образом:

$$(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)\{X^i, y^\alpha\} = \{(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)X^i, ay^\alpha\}.$$

Определение 1. *Линейное отображение*

$$\phi : (\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n \to (\mathbb{D}^2)^{m'} \oplus \mathbb{R}^{n'} \tag{13}$$

называется $\mathbb{D}^2$*-линейным, если* $\Phi(\varepsilon v) = \varepsilon\Phi(v)$*, где* $v = \{V^i, v^\alpha\}$.

Произвольное линейное отображение (**??**) можно записать в следующем матричном виде (с вещественными координатами):

$$\begin{pmatrix} w^{j'} \\ \dot{w}^{j'} \\ \ddot{w}^{j'} \\ w^{\beta'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^{j'} & b_i^{j'} & c_i^{j'} & d_\alpha^{j'} \\ \hat{a}_i^{j'} & \hat{b}_i^{j'} & \hat{c}_i^{j'} & \hat{d}_\alpha^{j'} \\ \hat{\hat{a}}_i^{j'} & \hat{\hat{b}}_i^{j'} & \hat{\hat{c}}_i^{j'} & \hat{\hat{d}}_\alpha^{j'} \\ e_i^{\beta'} & f_i^{\beta'} & g_i^{\beta'} & h_\alpha^{\beta'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^i \\ \dot{v}^i \\ \ddot{v}^i \\ v^\alpha \end{pmatrix} \tag{14}$$

Это отображение будет $\mathbb{D}^2$-линейным тогда и только тогда, когда выполняются следующие два пункта:

$$\varepsilon \begin{pmatrix} a_i^{j'} & b_i^{j'} & c_i^{j'} & d_\alpha^{j'} \\ \hat{a}_i^{j'} & \hat{b}_i^{j'} & \hat{c}_i^{j'} & \hat{d}_\alpha^{j'} \\ \hat{\hat{a}}_i^{j'} & \hat{\hat{b}}_i^{j'} & \hat{\hat{c}}_i^{j'} & \hat{\hat{d}}_\alpha^{j'} \\ e_i^{\beta'} & f_i^{\beta'} & g_i^{\beta'} & h_\alpha^{\beta'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^i \\ \dot{v}^i \\ \ddot{v}^i \\ v^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^{j'} & b_i^{j'} & c_i^{j'} & d_\alpha^{j'} \\ \hat{a}_i^{j'} & \hat{b}_i^{j'} & \hat{c}_i^{j'} & \hat{d}_\alpha^{j'} \\ \hat{\hat{a}}_i^{j'} & \hat{\hat{b}}_i^{j'} & \hat{\hat{c}}_i^{j'} & \hat{\hat{d}}_\alpha^{j'} \\ e_i^{\beta'} & f_i^{\beta'} & g_i^{\beta'} & h_\alpha^{\beta'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v^i \\ \dot{v}^i \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a_i^{j'} v^i + b_i^{j'} \dot{v}^i + c_i^{j'} \ddot{v}^i + d_\alpha^{j'} v^\beta \\ \hat{a}_i^{j'} v^i + \hat{b}_i^{j'} \dot{v}^i + \hat{c}_i^{j'} \ddot{v}^i + \hat{d}_\alpha^{j'} v^\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_i^{j'} v^i + c_i^{j'} \dot{v}^i \\ \hat{b}_i^{j'} v^i + \hat{c}_i^{j'} \dot{v}^i \\ \hat{\hat{b}}_i^{j'} v^i + \hat{\hat{c}}_i^{j'} \dot{v}^i \\ f_i^{\beta'} v^i + g_i^{\beta'} \dot{v}^i \end{pmatrix} \tag{15}$$

Условия (**??**) эквивалентны следующим:

$$a_i^{j'} v^i = \hat{b}_i^{j'} v^i, \quad b_i^{j'} \dot{v}^i = \hat{c}_i^{j'} \dot{v}^i, \quad \hat{a}_i^{j'} v^i = \hat{\hat{b}}_i^{j'} v^i, \quad \hat{b}_i^{j'} \dot{v}^i = \hat{\hat{c}}_i^{j'} \dot{v}^i,$$

$$f_i^{\beta'} v^i = 0, \quad g_i^{\beta'} \dot{v}^i = 0, \quad b_i^{j'} v^i = 0, \quad c_i^{j'} \dot{v}^i = 0,$$

$$c_i^{j'} \ddot{v}^i = 0, \quad d_\alpha^{j'} v^\beta = 0, \quad \hat{c}_i^{j'} \ddot{v}^i = 0, \quad \hat{d}_\alpha^{j'} v^\beta = 0,$$

В силу того, что вектор v в последних соотношениях произволен, получаем следующие необходимые и достаточные условия $\mathbb{R}(\varepsilon)$-линейности отображения (**??**):

$$a_i^{j'} = \hat{b}_i^{j'} = \hat{\hat{c}}_i^{j'}, \quad \hat{a}_i^{j'} = \hat{\hat{b}}_i^{j'},$$
$$f_i^{\beta'} = g_i^{\beta'} = b_i^{j'} = c_i^{j'} = d_\alpha^{j'} = \hat{c}_i^{j'} = \hat{d}_\alpha^{j'} = 0. \tag{16}$$

Из условий (**??**) следует, что линейный оператор $\mathbb{D}^2$-линейного отображения (**??**) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_i^{j'} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\hat{b}}_i^{j'} & a_i^{j'} & 0 & 0 \\ \hat{\hat{a}}_i^{j'} & \hat{\hat{b}}_i^{j'} & a_i^{j'} & \hat{\hat{d}}_\alpha^{j'} \\ e_i^{\beta'} & 0 & 0 & h_\alpha^{\beta'} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Для удобства записи переобозначим компоненты матрицы (**??**) следующим образом $\hat{\hat{b}}_i^{j'} = b_i^{j'}$, $\hat{\hat{d}}_\alpha^{j'} = d_\alpha^{j'}$, $\hat{\hat{a}}_i^{j'} = c_i^{j'}$. Тогда $\mathbb{D}^2$-линейное отображение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} w^{j'} \\ \dot{w}^{j'} \\ \ddot{w}^{j'} \\ w^{\beta'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^{j'} & 0 & 0 & 0 \\ b_i^{j'} & a_i^{j'} & 0 & 0 \\ c_i^{j'} & b_i^{j'} & a_i^{j'} & d_\alpha^{j'} \\ e_i^{\beta'} & 0 & 0 & h_\alpha^{\beta'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^i \\ \dot{v}^i \\ \ddot{v}^i \\ v^\alpha \end{pmatrix} \tag{18}$$

Найдем выражения для $\mathbb{D}^2$-линейного отображения (**??**) в координатах $\{V^i, v^\alpha\} \in (\mathbb{D}^2)^n \oplus \mathbb{R}^m$ и $\{W^i, w^\alpha\} \in (\mathbb{D}^2)^{n'} \oplus \mathbb{R}^{m'}$. Имеем:

$$\begin{aligned} W^{i'} &= w^{i'} + \varepsilon \dot{w}^{i'} + \varepsilon^2 \ddot{w}^{i'} = \\ &= a_i^{j'} v^i + \varepsilon(b_i^{j'} v^i + a_i^{j'} \dot{v}^i) + \varepsilon^2(c_i^{j'} v^i + b_i^{j'} \dot{v}^i + a_i^{j'} \ddot{v}^i + d_\alpha^{j'} v^\alpha) = \\ &= (a_i^{j'} + \varepsilon b_i^{j'} + \varepsilon^2 c_i^{j'})(v^i + \varepsilon \dot{v}^i + \varepsilon^2 \ddot{v}^i) + \varepsilon^2 d_\alpha^{j'} v^\alpha = \\ &= A_i^{j'} V^i + \varepsilon^2 d_\alpha^{j'} v^\alpha, \end{aligned}$$

$$w^{\beta'} = e_i^{\beta'} v^i + h_\alpha^{\beta'} v^\alpha.$$

Подведем итог вышеизложенному в следующем предложении.

Предложение 1. *Произвольное $\mathbb{D}^2$-линейное отображение (**??**) имеет вид:*

$$\begin{cases} W^{i'} = A_i^{j'} V^i + \varepsilon^2 a_\alpha^{j'} v^\alpha \\ w^{\beta'} = b_i^{\beta'} v^i + b_\alpha^{\beta'} v^\alpha, \end{cases} \tag{19}$$

где $(A_i^{j'})$ *— матрица с элементами из* $\mathbb{D}^2$*, а* $a_\alpha^{j'}$*,* $b_i^{\beta'}$ *и* $b_\alpha^{\beta'}$ *— матрицы с элементами из* $\mathbb{R}$*.*

Определение 2. *Пусть* $U \subset (\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$*,* $U' \subset (\mathbb{D}^2)^{m'} \oplus \mathbb{R}^{n'}$ *— открытые подмножества. Гладкое отображение* $F : U \to U'$ *называется* $\mathbb{D}^2$*-гладким, если касательное отображение* T_zF *является* $\mathbb{D}^2$*-линейным для любой точки* $z \in U$*.*

Матрица касательного отображения T_zF для произвольного отображения $F : U \to U'$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} & \frac{\partial x^{j'}}{\partial \dot{x}^i} & \frac{\partial x^{j'}}{\partial \ddot{x}^i} & \frac{\partial x^{j'}}{\partial y^\alpha} \\ \frac{\partial \dot{x}^{j'}}{\partial x^i} & \frac{\partial \dot{x}^{j'}}{\partial \dot{x}^i} & \frac{\partial \dot{x}^{j'}}{\partial \ddot{x}^i} & \frac{\partial \dot{x}^{j'}}{\partial \dot{y}^\alpha} \\ \frac{\partial \ddot{x}^{j'}}{\partial x^i} & \frac{\partial \ddot{x}^{j'}}{\partial \dot{x}^i} & \frac{\partial \ddot{x}^{j'}}{\partial \ddot{x}^i} & \frac{\partial \ddot{x}^{j'}}{\partial \dot{y}^\alpha} \\ \frac{\partial y^{\beta'}}{\partial x^i} & \frac{\partial y^{\beta'}}{\partial \dot{x}^i} & \frac{\partial y^{\beta'}}{\partial \ddot{x}^i} & \frac{\partial y^{\beta'}}{\partial \dot{y}^\alpha} \end{pmatrix}$$

Из условий (**??**) тогда следует, что матрица касательного отображения T_zF к $\mathbb{D}^2$-гладкому отображению имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{x}^{j'}}{\partial x^i} & \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{x}^{j'}}{\partial x^i} & \frac{\partial \dot{x}^{j'}}{\partial x^i} & \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} & \frac{\partial \ddot{x}^{j'}}{\partial \dot{y}^\alpha} \\ \frac{\partial y^{\beta'}}{\partial x^i} & 0 & 0 & \frac{\partial y^{\beta'}}{\partial \dot{y}^\alpha} \end{pmatrix}$$

Таким образом отображение $F : U \to U'$ является $\mathbb{D}^2$-гладким тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} = \frac{\partial \dot{x}^{j'}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \ddot{x}^{j'}}{\partial \ddot{x}^i}, \quad \frac{\partial \dot{x}^{j'}}{\partial x^i} = \frac{\partial \ddot{x}^{j'}}{\partial \dot{x}^i}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad \frac{\partial x^{j'}}{\partial \ddot{x}^i} = 0, \quad \frac{\partial x^{j'}}{\partial y^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}^{j'}}{\partial \ddot{x}^i} = 0,$$

$$\frac{\partial \dot{x}^{j'}}{\partial \dot{y}^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \ddot{x}^{j'}}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad \frac{\partial \ddot{x}^{j'}}{\partial \ddot{x}^i} = 0.$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (**??**), получаем следующие выражения для $\mathbb{D}^2$-гладкого отображения в некоторой кубической относительно системы координат в U окрестности:

$$x^{i'} = f^{i'}(x^j), \quad \dot{x}^{i'} = \frac{\partial f^{i'}(x^j)}{\partial x^j}\dot{x}^j + G^{i'}(x^j), \tag{21}$$

$$\ddot{x}^{i'} = \ddot{x}^i \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\dot{x}^i\dot{x}^j \frac{\partial^2 f^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} + \dot{x}^i \frac{\partial G^{i'}}{\partial x^j} + H^{i'}(x^j, y^\alpha), \quad y^{\alpha'} = g^{\alpha'}(x^j, y^\beta).$$

Как итог проведенных рассуждений получаем следующее предложение.

Предложение 2. *Всякое $\mathbb{D}^2$-гладкое отображение $F : U \to U'$ между открытыми подмножествами $U \subset (\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$ и $U' \subset (\mathbb{D}^2)^{m'} \oplus \mathbb{R}^{n'}$ локально имеет вид (**??**).*

Каждой карте (**??**) на $T^2_{tr}M$ можно сопоставить карту

$$\tilde{H} : \pi^{-1}(U) \ni [\gamma]^2 \mapsto \{X^i = x^i + \varepsilon\dot{x}^i + \varepsilon^2\ddot{x}^i, y^\alpha, \} \in (\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n \qquad (22)$$

со значениями в модуле $(\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$. При этом функции склейки $\tilde{H}' \circ \tilde{H}^{-1}$ примут вид

$$X^{i'} = \varphi^{i'}(x^i) + \varepsilon \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^{j'}}\dot{x}^j + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i \right), \; y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha). \qquad (23)$$

Из уравнений (**??**) следует, что функции склейки (**??**) являются $\mathbb{D}^2$-гладкими, и атлас на $T^2_{tr}M$, состоящий из карт вида (**??**), задает на $T^2_{tr}M$ структуру многообразия над алгеброй триальных чисел, моделируемого $\mathbb{D}^2$-модулем $(\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$. При этом отображение (**??**), определяемое в локальных картах уравнениями (**??**), является $\mathbb{D}^2$-гладким отображением.

5 Категория трансверсальных расслоений второго порядка

Приведем предварительно описание понятия категории общего вида и категории локально тривиальных расслоений.

Категория $\mathcal{C}$ определяется следующим набором данных:

1. Класс (или множество) $Ob(\mathcal{C})$, элементы которого называются *объектами* категории.
2. Для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ задано отображение множество $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$, элементы которого называются морфизмами из X в Y и обозначаются $X \to Y$ или $f : X \to Y$.
3. Для каждой упорядоченной тройки объектов $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ задано отображение
$$Mor_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to Mor_{\mathcal{C}}(X, Z),$$
сопоставляющие паре морфизмов (f, g) морфизм gf, или $g \circ f$, называемый их композицией, или произведением.

Должны выполняться следующие условия:

1. Композиция морфизмов ассоциативна.

2. Для каждого объекта X существует тождественный морфизм $id_X \in Mor_{\mathcal{C}}(X, X)$ такой, что $f \circ id_X = f, id_X \circ f = f$ для всякого морфизма $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Нетрудно видеть, что такой морфизм единствен: если id'_X — другой морфизм с тем же свойством, то $id'_X = id'_X \circ id_X = id'_X$. Морфизм $f : X \to Y$ называется изоморфизмом, если существует такой морфизм $g : Y \to X$, что $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_X$

$Mor_{\mathcal{C}}$ есть несвязное объединение $\bigcup Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ по всем упорядоченным парам $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$.

Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — две категории. Функтором Φ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ называется задание двух отображений: $\Phi = \Phi_{Ob} : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$ и $\Phi = \Phi_{Mor} : Mor_{\mathcal{C}} \to Mor_{\mathcal{D}}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. если $f \in Mor_C(X, Y)$,то $\Phi(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(\Phi(X), \Phi(Y))$;

2. для всех X из $Ob(\mathcal{C})$ выполняется $\Phi(id_X) = id_{\Phi(X)}$;

3. $\Phi(g \circ f) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$, когда определена композиция.

Слоеные многообразия образуют категорию $\mathcal{F}ol$. Объектами категории $\mathcal{F}ol$ являются слоеные многообразия, а морфизмами — морфизмы слоений $f : M \to M'$.

Локально тривиальным расслоением называется четверка вида (E, M, π, F), где E, M, F — гладкие многообразия, называемые соответственно (тотальным) пространством расслоения, базой расслоения и стандартным слоем, а $\pi : E \to M$ — гладкое отображение пространства E на базу M такое, что для каждой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \ni x$ и диффеоморфизм $\varphi : U \times F \to \pi^{-1}(U)$ такой, что $\pi \circ \varphi = pr_1$, где $pr_1 : U \times F \to U$ — естественная проекция произведения многообразий на первый сомножитель, $pr_1(x, y) = x$. Кратко локально тривиальное расслоение обозначается следующим образом: $(E, M), \pi : E \to M$ или E. Локально тривиальные расслоения образуют категорию $\mathcal{B}un$, морфизмами из $\pi : E \to M$ в $\pi' : E' \to M'$ в которой являются пары гладких отображений $(f, F), f : M \to M', F : E \to E'$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M' \end{tikzcd} \tag{24}$$

Если $\pi'' : E'' \to M''$ — третье расслоение и (f', F') — морфизм из $\pi' : E' \to M'$ в $\pi'' : E'' \to M''$, то композицией морфизмов (f, F) и (f', F') является пара $(f' \circ f, F' \circ F)$. Действительно, из коммутативности каждого из квадратов в диаграмме

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi'"'] & E'' \arrow[d, "\pi''"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \arrow[r, "f'"] & M'' \end{tikzcd}$$

следует, что

$$(f' \circ f) \circ \pi = f' \circ (f \circ \pi) = f' \circ (\pi \circ F) = \\ (f' \circ \pi') \circ F = (\pi'' \circ F') \circ F = \pi'' \circ (F' \circ F),$$

то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F' \circ F"] \arrow[d, "\pi"'] & E'' \arrow[d, "\pi''"] \\ M \arrow[r, "f' \circ f"'] & M'' \end{tikzcd}$$

Ассоциативность композиции следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "\pi'"'] & E'' \arrow[r, "F''"] \arrow[d, "\pi''"'] & E''' \arrow[d, "\pi'''"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \arrow[r, "f'"] & M'' \arrow[r, "f''"] & M''' \end{tikzcd}$$

Тождественным морфизмом в категории $\mathcal{B}un$ из $\pi : E \to M$ в $\pi : R \to M$ является пара $(f = id_M, F = id_E)$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "id_E"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "id_M"'] & M \end{tikzcd}$$

Из уравнений (7) следует, что соответствие, относящее слоеному многообразию M его трансверсальное расслоение второго порядка π_0^2 :

$T^2_{tr}M \to M$, а морфизму слоений $f : M \to M'$ гладкая пара отображений $(f, T^2_{tr}f)$, является функтором $T^2_{tr} : \mathcal{F}ol^2 \to \mathcal{B}un$ из категории слоеных многообразий в категорию локально тривиальных расслоений. Действительно, из (7) следует, что $T^2_{tr}(f' \circ f) = T^2_{tr}f' \circ T^2_{tr}f$ и $T^2_{tr}(id_M) = id_{T^2_{tr}M}$.

6 Специальные автоморфизмы трансверсального расслоения второго порядка

Введем подкатегорию $\mathcal{T}r^2{-}\mathcal{B}un$ категории локально тривиальных расслоений, объектами которой являются трансверсальные расслоения второго порядка: $\pi^2_0 : T^2_{tr}M \to M$ слоеных многообразий, а морфизмами $\mathbb{D}^2$-гладкие отображения $F^2 : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M'$. Из (**??**) следует, что $\mathbb{D}^2$-гладкое отображение $F^2 : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M'$ определяет $\mathbb{D}$-гладкое отображение $F^1 : T_{tr}M \to T_{tr}M'$ и морфизм слоений $f : M \to M'$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T^2_{tr}M \arrow[rr, "F^2"] \arrow[dr, "\pi^2_1"] \arrow[dd, "\pi^2_0"'] & & T^2_{tr}M' \arrow[dl, "'\pi^2_1"'] \arrow[dd, "'\pi^2_0"] \\
& T_{tr}M \arrow[r, "F^1"] \arrow[dl, "\pi^1_0"] & T_{tr}M' \arrow[dr, "'\pi^1_0"] & \\
M \arrow[rr, "f"] & & M'
\end{tikzcd} \tag{25}$$

В локальных координатах $(x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, y^\alpha)$ на $T^2_{tr}M$ и $(x^{i'}, \dot{x}^{i'}, \ddot{x}^{i'}, y^{\beta'})$ на $T^2_{tr}M'$ морфизм $F^2 : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M'$ в категории $\mathcal{T}r^2{-}\mathcal{B}un$ задается уравнениями

$$x^{i'} = f^{i'}(x^j), \quad \dot{x}^{i'} = \frac{\partial f^{i'}(x^j)}{\partial x^j}\dot{x}^j + G^{i'}(x^j),$$
$$\ddot{x}^{i'} = \ddot{x}^i\frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\dot{x}^i\dot{x}^j\frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} + \dot{x}^i\frac{\partial G^{i'}}{\partial x^j} + H^{i'}(x^j, y^\alpha),$$
$$y^{\alpha'} = g^{\alpha'}(x^j, y^\beta).$$

Корректность определения категории $\mathcal{T}r^2{-}\mathcal{B}un$ следует из того, что композиция $'F^2 \circ F^2$ $\mathbb{D}^2$-гладких отображений $F^2 : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M'$ и $'F^2 : T^2_{tr}M' \to T^2_{tr}M''$ является $\mathbb{D}^2$-гладким отображением $'F^2 \circ F^2 : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M''$.

В построенной категории трансверсальных расслоений $\mathcal{T}r^2{-}\mathcal{B}un$ слоеных многообразий можно выделить специального типа автоморфизмы $'F^2 : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M$.

Специальные автоморфизмы первого типа характеризуются тем, что f является тождественным отображением:

$$\begin{tikzcd}
T^2_{tr}M \arrow[rr, "F^2"] \arrow[dr, "\pi^2_1"] \arrow[dd, "\pi^2_0"'] & & T^2_{tr}M \arrow[dl, "\pi^2_1"'] \arrow[dd, "\pi^2_0"] \\
& T_{tr}M \arrow[r, "F^1"] \arrow[dl, "\pi^1_0"] & T_{tr}M \arrow[dr, "\pi^1_0"] \\
M \arrow[rr, "id"] & & M
\end{tikzcd} \tag{26}$$

В этом случае $\mathbb{D}$-диффеоморфизм F^2 в локальных координатах записывается следующим образом:

$$'x^i = x^i, \quad 'y^\alpha = y^\alpha, \quad '\dot{x}^i = \dot{x}^i + g^i(x^j),$$
$$'\ddot{x}^i = \ddot{x}^i + \frac{\partial g^i(x^j)}{\partial x^j}\dot{x}^j + h^i(x^j, y^\alpha). \tag{27}$$

Выясним закон преобразования функций g^i и h^i при переходе к другой карте (U', h') на слоеном многообразии M. Если преобразование координат на $h' \circ h^{-1}$ на M имеет вид $x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i)$, $y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha)$, то соответствующее преобразование координат на $H' \circ H^{-1}$ на $T^2_{tr}M$, имеет вид (**??**):

$$x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i),\ y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha),\ \dot{x}^{i'} = \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^j}\dot{x}^j,\ \ddot{x}^{i'} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i. \tag{28}$$

Уравнение (**??**) в карте $(\pi^{-1}(U'), H')$ имеет вид

$$'x^{i'} = x^{i'},\ 'y^{\alpha'} = y^{\alpha'},\ '\dot{x}^{i'} = \dot{x}^{i'} + g^{i'}(x^j),\ \ '\ddot{x}^{i'} = \ddot{x}^{i'} + \frac{\partial g^{i'}(x^j)}{\partial x^{j'}}\dot{x}^{j'} + h^{i'}(x^j, y^\alpha)$$

Подставляя (**??**) в (**??**), получаем:

$$'x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i),\ \ 'y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha),\ \ '\dot{x}^{i'} = \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^{j'}}(\dot{x}^j + g^i(x^k)),$$

$$'\ddot{x}^{i'} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}(\dot{x}^i + g^i(x^k))(\dot{x}^j + g^j(x^k)) + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^i}(\ddot{x}^i + \frac{\partial g^i(x^i)}{\partial x^j}\dot{x}^j + h^i(x^i, y^\alpha))$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i), \quad y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha),$$
$$\dot{x}^{i'} + g^{i'}(x^j) = \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^{j'}}(\dot{x}^j + g^i(x^k)) = \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^{j'}}\dot{x}^j + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^{j'}}g^i(x^k),$$

$$\ddot{x}^{i'} + \frac{\partial g^{i'}(x^j)}{\partial x^{j'}}\dot{x}^{j'} + h^{i'}(x^j, y^\alpha) =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}(\dot{x}^i + g^i(x^k))(\dot{x}^j + g^j(x^k)) + \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}(\ddot{x}^i + \frac{\partial g^i(x^i)}{\partial x^j}\dot{x}^j + h^i(x^i, y^\alpha)) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}(\dot{x}^i\dot{x}^j + \dot{x}^j g^i(x^k) + \dot{x}^i g^j(x^k) + (g^j(x^k))^2) +$$
$$+ \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i + \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial g^i(x^i)}{\partial x^j}\dot{x}^j + \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}h^i(x^i, y^\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^j g^i(x^k) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i g^j(x^k) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}g^j(x^k)g^i(x^k) +$$
$$+ \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i + \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial g^i(x^i)}{\partial x^j}\dot{x}^j + \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}h^i(x^i, y^\alpha) =$$

$$= \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial g^i(x^i)}{\partial x^j}\dot{x}^j + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^j g^i(x^k) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i g^j(x^k) +$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}g^j(x^k)g^i(x^k) + \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}h^i(x^i, y^\alpha)$$

Сравнивая полученные выражения, получаем

$$g^{i'} = \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}g^i, \quad h^{i'} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}g^j(x^k)g^i(x^k) + \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}h^i. \tag{29}$$

Из уравнений (**??**) следует, что набор $\{g^i\}$ является набором координат некоторого проектируемого [**?**] сечения $g : M \to T_{tr}M$ трансверсального расслоения.

Предложение 3. *Пусть $g^i : M \to T^1_{tr}M$ — сечение трансверсального расслоения $T^1_{tr}M$ слоеного многообразия M, имеющее в локальных координатах $\dot{x} = g^i(x^k)$. Тогда :*

$$\dot{x} = g^i(x^k), \quad \ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^i}{\partial x^l}\dot{x}^l = \frac{1}{2}\frac{\partial g^i}{\partial x^l}g^l \tag{30}$$

задается сечение $g^2 : M \to T^2_{tr}M$ трансверсального расслоения второго порядка слоеного многообразия M.

Доказательство: Для доказательства предложения **??**, достаточно подставить (**??**) в (**??**) . После чего видно, что уравнениями (**??**) для любого $x \in M$ задается не зависящий от выбора системы координат на M элемент расслоения $T^2_{tr}M$. С другой стороны, если $x^i = \varphi^i(t)$ — траектория потока векторного поля g, то $\frac{d\varphi^i}{dt} = g^i$ и $\frac{d^2\varphi^i}{dt^2} = g^k\partial_k g^i$.

Так же в построенной категории трансверсальных расслоений $\mathcal{T}r^2{-}\mathcal{B}un$ слоеных многообразий можно выделить специального типа автоморфизмы $'F^2 : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M$.

Специальные автоморфизмы второго типа характеризуются тем, что не только f является тождественным отображением, но и F^1 является тождественным отображением, тогда диаграмма (**??**) имеет вид:

$$\begin{tikzcd}
T^2_{tr}M \arrow[rr, "F^2"] \arrow[dr, "\pi^2_1"] \arrow[dd, "\pi^2_0"'] & & T^2_{tr}M \arrow[dl, "\pi^2_1"'] \arrow[dd, "\pi^2_0"] \\
& T_{tr}M \arrow[r, "id"] \arrow[dl, "\pi^1_0"'] & T_{tr}M \arrow[dr, "\pi^1_0"] \\
M \arrow[rr, "id"] & & M
\end{tikzcd} \tag{31}$$

$\mathbb{D}^2$-диффеоморфизм F^2 в локальных координатах записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}
'x^i = x^i, \quad 'y^\alpha = y^\alpha, \quad '\dot{x}^i = \dot{x}^i, \\
'\ddot{x}^i = \ddot{x}^i + h^i(x^j, y^\alpha).
\end{gathered} \tag{32}$$

Найдем как преобразуются функции h^i при переходе к другой карте (U', h') на слоеном многообразии M. Если преобразование координат на $h' \circ h^{-1}$ на M имеет вид $x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i)$, $y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha)$, то соответствующее преобразование координат на $H' \circ H^{-1}$ на $T^2_{tr}M$, имеет вид (**??**):

$$\begin{gathered}
x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i), \qquad y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha), \\
\dot{x}^{i'} = \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^{j'}}\dot{x}^j, \qquad \ddot{x}^{i'} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i.
\end{gathered} \tag{33}$$

Уравнение (**??**) в карте $(\pi^{-1}(U'), H')$ имеет вид

$$'x^{i'} = x^{i'}, \quad 'y^{\alpha'} = y^{\alpha'}, \quad '\dot{x}^{i'} = \dot{x}^{i'}, \quad '\ddot{x}^{i'} = \ddot{x}^{i'} + h^{i'}(x^j, y^\alpha)$$

Подставляя (**??**) в (**??**), получаем:

$$'x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i), \quad 'y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha), \quad '\dot{x}^{i'} = \frac{\partial \varphi^{i'}}{\partial x^{j'}}\dot{x}^j,$$

$$'\ddot{x}^{i'} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i}(\ddot{x}^i + h^i(x^i, y^\alpha))$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i), \quad y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha),$$

$$\dot{x}^{i'} = \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^{j'}}\dot{x}^j,$$

$$\ddot{x}^{i'} + h^{i'}(x^j, y^\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}(\ddot{x}^i + h^i(x^i, y^\alpha)) =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i + \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}h^i(x^i, y^\alpha)$$

Сравнивая полученные выражения, имеем:

$$h^{i'} = \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}h^i \tag{34}$$

Из уравнений (**??**) следует, что набор $\{h^i\}$ является набором координат некоторого сечения $h : T^2_{tr}M \to V^2_1 T^2_{tr}M$ на многообразии M.

А изоморфизм вида (**??**) представляет собой сдвиг слоев трансверсального расслоения второго порядка $T^2_{tr}M$ на h.

Предложение 4. *Изоморфизм трансверсального расслоения второго порядка $T^2_{tr}M$ на себя вида (**??**) представляет собой послойный сдвиг $T^2_{tr}M$ на некоторое сечение h, заданное на базовом слоеном многообразии M.*

7 Касательное расслоение слоеного многообразия M.

Пусть $(M, \mathcal{F})$ — слоеное многообразие, а TM — касательное расслоение [**?**] многообразия M. Карта (**??**) на M индуцирует карту Th на TM, которая относит касательному вектору $v_z \in T_zM$ координаты $\{x^i, y^\alpha, v^i, v^\alpha\}$ Функции склейки касательного расслоения имеют вид

$$x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i), \quad v^{i'} = \frac{\partial\varphi^{i'}}{\partial x^i}v^i, \quad y^{\alpha'} = \varphi^\alpha(x^i, y^\alpha), \quad v^{\alpha'} = \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}v^i + \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial y^\beta}v^\beta \tag{35}$$

Из (**??**) следует, что TM является слоеным многообразием со слоением $T\mathcal{F}$ слои которого определяются уравнениями : $x^i = const$, $v^i = const$.

Векторным полем на многообразии M называется сечение касательного расслоения, то есть отображение

$$v : M \to TM \tag{36}$$

касательного расслоения, то есть такое отображение, что $\pi \circ v = id : M \to M$, где $\pi : TM \ni v_z \mapsto z \in M$ — каноническая проекция. В локальных координатах векторное поле задается уравнениями

$$v^i = v^i(x^i, y^\beta), \quad v^\alpha = v^\alpha(x^i, y^\beta). \tag{37}$$

Векторное поле v на слоеном многообразии M называется слоеным или проектируемым векторным полем, если (**??**) является морфизмом слоений. Из (**??**) следует, что векторное поле v является слоеным тогда и только тогда, когда локально (в кубической координатной окрестности) $v^i = v^i(x^i)$ в (**??**).

Применяя функтор T^2_{tr} к слоеному векторному полю получаем отображение $V : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}TM$, имеющее вид:

$$v^i = v^i(x^i),\ \dot{v}^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\dot{x}^k,\ \ddot{v}^i = \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial v^i}{\partial x^i}\ddot{x}^i,\ v^\alpha = v^\alpha(x^i, y^\beta) \tag{38}$$

Предложение 5. *Уравнения (**??**) можно рассматривать как уравнения векторного поля на трансверсальном расслоении второго порядка, то есть как сечение*

$$T^2_{tr}M \to TT^2_{tr}M$$

касательного расслоения над $T^2_{tr}M$.

Доказательство. Покажем, что расслоения $TT^2_{tr}M$ и $T^2_{tr}TM$ эквивалентны, а переменные v^i, $\dot{v}^i$, $\ddot{v}^i$, v^α можно рассматривать как координаты касательного вектора к $T^2_{tr}M$. Карта (**??**) на M индуцирует карту $\{x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, y^\alpha\}$ на $T^2_{tr}M$ и карты $\{x^i, y^\alpha, v^i, v^\alpha\} \sim \{x^i, v^i, y^\alpha, v^\alpha\}$ на TM, которые индуцируют карты $\{x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, y^\alpha, v^i, \dot{v}^i, \ddot{v}^i, v^\alpha\}$ на $TT^2_{tr}M$ и $\{x^i, v^i, \dot{x}^i, \dot{v}^i, \ddot{x}^i, \ddot{v}^i, y^\alpha, v^\alpha\}$ на $T^2_{tr}TM$. Поскольку, функции склейки, отражающие зависимость $\{\dot{x}^i, \ddot{x}^i, v^i, \dot{v}^i, \ddot{v}^i, v^\alpha\}$ от $\{\dot{x}^i, v^i, \dot{v}^i, \ddot{x}^i, \ddot{v}^i, v^\alpha\}$ у расслоений $TT^2_{tr}M$ и $T^2_{tr}TM$ одинаковые, эти расслоения эквивалентны.

Касательное расслоение $TT^2_{tr}M$ над $T^2_{tr}M$ несет на себе структуру гладкого многообразия над $\mathbb{D}^2$, моделируемого $\mathbb{D}^2$-модулем $\mathbb{D}^{2m} \oplus \mathbb{R}^{2n}$ с координатами

$$X^i = x^i + \varepsilon\dot{x}^i + \varepsilon^2\ddot{x}^i,\ y^\alpha, \quad V^i = v^i + \varepsilon\dot{v}^i + \varepsilon^2\ddot{v}^i,\ v^\alpha. \tag{39}$$

Преобразование координат на M индуцирует следующее преобразование координат на $TT^2_{tr}M$:

$$\begin{cases} V^{i'} = X^i_i V^i \\ v^{\alpha'} = y^{\alpha'}_i v^i + y^{\alpha'}_\alpha v^\alpha, \end{cases} \tag{40}$$

где используется отображение $X_i^i = \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^i}$, $y_i^{\alpha'} = \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial x^i}$, $y_\alpha^{\alpha'} = \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha}$, такого рода обозначения в дальнейшем используются без специальных оговорок.

По отношению к этой структуре векторное поле (**??**) является $\mathbb{D}^2$-гладким векторным полем на $T^2_{tr}TM$ и задается уравнениями

$$V^i = v^i + \varepsilon \dot{v}^i + \varepsilon^2 \ddot{v}^i = v^i(x^i) + \varepsilon \partial_k v^i \dot{x}^k + \varepsilon^2 \left(\partial^2_{kj} v^i \dot{x}^k \dot{x}^j + \partial_j v^i \dot{x}^j \right), \qquad v^\alpha = v^\alpha(x^i, y^\beta). \quad (41)$$

Векторное поле V на $T^2_{tr}TM$, заданное уравнениями (**??**), будем называть $\mathbb{D}^2$-продолжением проектируемого векторного поля v, заданного на слоеном многообразии M и имеющего уравнения $v^i = v^i(x^i)$, $v^\alpha = v^\alpha(x^i, y^\beta)$.

Произвольное $\mathbb{D}^2$-гладкое векторное поле $V : T^2_{tr}M \to TT^2_{tr}M$ задается уравнениями вида

$$V^i = v^i + \varepsilon \dot{v}^i + \varepsilon^2 \ddot{v}^i = \\ = v^i(x^i) + \varepsilon \left(\partial_k v^i \dot{x}^k + \hat{v}^i(x^i) \right) + \\ \varepsilon^2 \left(\partial^2_{kl} v^i \dot{x}^k \dot{x}^l + \partial_k v^i \ddot{x}^k + \partial_k \hat{v}^i \dot{x}^k + \hat{\hat{v}}^i(x^i, y^\alpha) \right), \\ v^\alpha = v^\alpha(x^i, y^\beta). \quad (42)$$

8 Соответствия между векторными полями на $T^2_{tr}M$ при автоморфизмах $T^2_{tr}M$ с тождественным отображением F^1

Преобразование координат $\mathbb{D}^2$-гладкого векторного поля V на пересечении областей определения двух карт на $T^2_{tr}M$ имеет вид (см. (**??**))

$$V^{i'} = (\partial X^{i'}/\partial X^i) V^i, \quad v^{\alpha'} = \partial_i y^{\alpha'} v^i + \partial_\alpha y^{\alpha'} v^\alpha.$$

Записывая первые соотношения подробно, получаем

$$v^{i'} + \varepsilon \left(\partial_k v^{i'} \dot{x}^k + \hat{v}^{i'} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \partial^2_{kl} v^{i'} \dot{x}^k \dot{x}^l + \partial_k v^{i'} \ddot{x}^k + \partial_k \hat{v}^{i'} \dot{x}^k + \hat{\hat{v}}^{i'} \right) = \\ = \left(x_i^{i'} + \varepsilon x_{ki}^{i'} \dot{x}^k + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} x_{ipj}^{i'} \dot{x}^p \dot{x}^j + x_{pi}^{i'} \ddot{x}^p \right) \right) \times \\ \left(v^i + \varepsilon \left(\partial_k v^i \dot{x}^k + \hat{v}^i \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \partial^2_{kl} v^i \dot{x}^k \dot{x}^l + \partial_k v^i \ddot{x}^k + \partial_k \hat{v}^i \dot{x}^k + \hat{\hat{v}}^i \right) \right)$$

Раскрывая скобки в правой части, получаем

$$\left(x_i^{i'} + \varepsilon x_{ki}^{i'}\dot{x}^k + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}x_{ipj}^{i'}\dot{x}^p\dot{x}^j + x_{pi}^{i'}\ddot{x}^p\right)\right)\cdot$$
$$\left(v^i + \varepsilon\left(\partial_k v^i\dot{x}^k + \hat{v}^i\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\partial_{kl}^2 v^i\dot{x}^k\dot{x}^l + \partial_k v^i\ddot{x}^k + \partial_k\hat{v}^i\dot{x}^k + \hat{\hat{v}}^i\right)\right) =$$

$$= x_i^{i'}\left(v^i + \varepsilon\left(\partial_k v^i\dot{x}^k + \hat{v}^i\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\partial_{kl}^2 v^i\dot{x}^k\dot{x}^l + \partial_k v^i\ddot{x}^k + \partial_k\hat{v}^i\dot{x}^k + \hat{\hat{v}}^i\right)\right) +$$
$$+\varepsilon x_{ki}^{i'}\dot{x}^k\left(v^i + \varepsilon\left(\partial_k v^i\dot{x}^k + \hat{v}^i\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\partial_{kl} v^i\dot{x}^k\dot{x}^l + \partial_k v^i\ddot{x}^k + \partial_k\hat{v}^i\dot{x}^k + \hat{\hat{v}}^i\right)\right) +$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}x_{ipj}^{i'}\dot{x}^p\dot{x}^j + x_{pi}^{i'}\ddot{x}^p\right)\times$$
$$\left(v^i + \varepsilon\left(\partial_k v^i\dot{x}^k + \hat{v}^i\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\partial_{kl}^2 v^i\dot{x}^k\dot{x}^l + \partial_k v^i\ddot{x}^k + \partial_k\hat{v}^i\dot{x}^k + \hat{\hat{v}}^i\right)\right)$$

$$= x_i^{i'}v^i + \varepsilon\left(x_i^{i'}\partial_k v^i\dot{x}^k + x_i^{i'}\hat{v}^i\right) +$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}x_i^{i'}\partial_{kl}^2 v^i\dot{x}^k\dot{x}^l + x_i^{i'}\partial_k v^i\ddot{x}^k + \frac{1}{2}x_i^{i'}\partial_k\hat{v}^i\dot{x}^k + x_i^{i'}\hat{\hat{v}}^i\right) +$$
$$+\varepsilon x_{ki}^{i'}\dot{x}^k v^i + \varepsilon^2\left(\partial_k v^i x_{li}^{i'}\dot{x}^k\dot{x}^l + x_{ki}^{i'}\dot{x}^k\hat{v}^i\right) +$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}x_{ipj}^{i'}v^i\dot{x}^p\dot{x}^j + x_{pi}^{i'}v^i\ddot{x}^p\right)$$

$$= x_i^{i'}v^i + \varepsilon\left(x_i^{i'}\partial_k v^i\dot{x}^k + x_i^{i'}\hat{v}^i + x_{ki}^{i'}v^i\dot{x}^k\right) +$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}x_i^{i'}\partial_{kl}^2 v^i\dot{x}^k\dot{x}^l + x_i^{i'}\partial_k v^i\ddot{x}^k + \frac{1}{2}x_i^{i'}\partial_k\hat{v}^i\dot{x}^k + x_i^{i'}\hat{\hat{v}}^i\right) +$$
$$+\varepsilon^2\left(\partial_k v^i x_{li}^{i'}\dot{x}^k\dot{x}^l + x_{ki}^{i'}\dot{x}^k\hat{v}^i + \frac{1}{2}x_{ipj}^{i'}v^i\dot{x}^p\dot{x}^j + x_{pi}^{i'}v^i\ddot{x}^p\right)$$

Сравнение вещественных частей в полученных формулах дает

$$v^{i'} = x_i^{i'}v^i, \quad v^{\alpha'} = y_i^{\alpha'}v^i + y_\alpha^{\alpha'}v^\alpha. \tag{43}$$

Для $\mathbb{D}^2$-продолжения $\widetilde{V}$ векторного поля v полученные выше формулы принимают вид

$$v^{i'} + \varepsilon\dot{v}^{i'} + \varepsilon^2\ddot{v}^{i'} = v^{i'} + \varepsilon\left(\partial_k v^{i'}\dot{x}^k\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\partial_{kl}^2 v^{i'}\dot{x}^k\dot{x}^l + \partial_k v^{i'}\ddot{x}^k\right) =$$

$$= \left(x_i^{i'} + \varepsilon x_{ki}^{i'} \dot{x}^k + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} x_{ipj}^{i'} \dot{x}^p \dot{x}^j + x_{pi}^{i'} \ddot{x}^p \right) \right) \cdot$$

$$\left(v^i + \varepsilon \left(\partial_k v^i \dot{x}^k \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \partial_{kl}^2 v^i \dot{x}^k \dot{x}^l + \partial_k v^i \ddot{x}^k \right) \right)$$

$$= x_i^{i'} v^i + \varepsilon \left(x_i^{i'} \partial_k v^i \dot{x}^k + x_{ki}^{i'} \dot{x}^k v^i \right)$$

$$+ \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} x_i^{i'} \partial_{kl}^2 v^i \dot{x}^k \dot{x}^l + x_i^{i'} \partial_k v^i \ddot{x}^k + x_{ki}^{i'} \dot{x}^k \partial_k v^i \dot{x}^k \right) +$$

$$+ \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} x_{ipj}^{i'} \dot{x}^p \dot{x}^j v^i + x_{pi}^{i'} \ddot{x}^p v^i \right).$$

Сравнивая с формулами преобразования координат произвольного $\mathbb{D}^2$-гладкого векторного поля, получаем преобразование компонент $\hat{v}^{i'}$ и $\hat{\hat{v}}^{i'}$. Эти преобразования имеют вид

$$\hat{v}^{i'} = x_i^{i'} \hat{v}^i, \quad \hat{\hat{v}}^{i'} = \frac{1}{2} x_i^{i'} \partial_k \hat{v}^i \dot{x}^k + x_i^{i'} \hat{\hat{v}}^i. \tag{44}$$

Полученный результат можно сформулировать следующим предложением.

Предложение 6. *Пусть на $T_{tr}^2 M$ задано $\mathbb{D}^2$-гладкое векторное поле V уравнениями (**??**). Тогда наборы функций $\{v^i(x^j)\}$ и $\{\hat{v}^i(x^j)\}$ определяют проектируемые сечения трансверсального расслоения, а набор функций $\{v^i(x^j), v^\alpha(x^i, y^\alpha)\}$ является набором координат некоторого векторного поля v на M.*

Следуя работе [**?**] можно поставить вопрос, при каких условиях одно $\mathbb{D}^2$-гладкое векторное поле на $T_{tr}^2 M$ может быть переведено в другое $\mathbb{D}^2$-гладкое векторное поле специальным автоморфизмом. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением специальных автоморфизмов второго типа.

Определение 3. *Будем называть два векторных поля V и V' на трансверсальном расслоении $T_{tr} M$ эквивалентными, если одно из них может быть переведено в другое автоморфизмом вида (**??**).*

Отметим, что вышеуказанное определение вводит отношение эквивалентности на множестве гладких векторных полей на $T_{tr}^2 M$, поскольку композиция изоморфизмов вида (**??**) и обратный изоморфизм к изоморфизму вида (**??**) снова является изоморфизмом вида (**??**).

Касательное отображение TF^2 к отображению $F^2 : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M$, заданному уравнениями

$$'x^i = x^i, \quad '\dot{x}^i = \dot{x}^i, \quad '\ddot{x}^i = \ddot{x}^i + h^i(x^k, y^\alpha), \quad 'y^\alpha = y^\alpha, \tag{45}$$

имеет вид

$$\begin{gathered} 'x^i = x^i, \quad '\dot{x}^i = \dot{x}^i, \quad '\ddot{x}^i = \ddot{x}^i + h^i(x^k, y^\alpha), \quad 'y^\alpha = y^\alpha, \\ 'v^i = v^i, \quad '\dot{v}^i = \dot{v}^i, \quad '\ddot{v}^i = \ddot{v}^i + \partial_k h^i v^k + \partial_\alpha h^i v^\alpha, \quad 'v^\alpha = v^\alpha. \end{gathered} \tag{46}$$

Обратное отображение $(F^2)^{-1} : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M$ имеет следующий вид:

$$x^i = 'x^i, \quad \dot{x}^i = '\dot{x}^i, \quad \ddot{x}^i = '\ddot{x}^i - h^i(x^k, y^\alpha), \quad y^\alpha = 'y^\alpha. \tag{47}$$

Применяя касательное отображение (**??**) к векторам (произвольного) векторного поля (**??**), получим векторное поле

$$\begin{gathered} 'V^i = v^i + \varepsilon \dot{v}^i + \varepsilon^2 \left(\partial^2_{kl} v^i \dot{x}^k \dot{x}^l + \partial_k v^i \ddot{x}^k + \partial_k \hat{v}^i \dot{x}^k + \hat{\hat{v}}^i + \partial_k h^i v^k + \partial_\alpha h^i v^\alpha \right), \\ 'v^\alpha = v^\alpha. \end{gathered} \tag{48}$$

Уравнения (**??**) задают координаты векторного поля $'V$ в точке $'X = F^2(X)$ как функции координат X^i, y^α точки X. Для получения выражений координат поля $'V$ в точке $'X$ как функций координат $'X^i$, $'y^\alpha$, подставим в (**??**) формулы (**??**). Поскольку $'X$ — это произвольная точка многообразия $T^2_{tr}M$, то штрихи у координат точек в окончательной записи результата убираем.

Итак, векторное поле $'V$, представляющее собой результат применения диффеоморфизма (**??**) к векторному полю (**??**), имеет следующие уравнения:

$$\begin{gathered} 'v^i = v^i(x^k), \ 'v^\alpha = v^\alpha(x^k, y^\beta), \ '\dot{v}^i = \dot{v}^i, \\ '\ddot{v}^i = \partial^2_{kl} v^i \dot{x}^k \dot{x}^l + \partial_k v^i \ddot{x}^k + \partial_k \hat{v}^i \dot{x}^k + \partial_k v^i \dot{x}^k - \partial_k v^i h^k + \\ + \hat{\hat{v}}^i(x^k, y^\beta) + \partial_k h^i v^k + \partial_\alpha h^i v^\alpha. \end{gathered}$$

Отсюда получаем соответствие между компонентами $'\hat{v}^i(x^k)$ и $\hat{v}^i(x^k)$, а также между компонентами $'\hat{\hat{v}}^i(x^k, y^\beta)$ и $\hat{\hat{v}}^i(x^k, y^\beta)$:

$$\begin{gathered} '\hat{\hat{v}}^i(x^k, y^\beta) = \hat{\hat{v}}^i(x^k, y^\beta) - \partial_k v^i h^k + \left(\partial_k h^i v^k + \partial_\alpha h^i v^\alpha \right) \\ '\hat{v}^i(x^k) = \hat{v}^i(x^k). \end{gathered} \tag{49}$$

Вычисления подведенные выше показывают, что два $\mathbb{D}^2$-гладких векторных поля $'V$ и V на расслоении $T^2_{tr}M$ эквивалентны тогда и только тогда, когда разность этих векторных полей $'V - V = W$ является векторным полем следующего вида:

$$W^i = \varepsilon^2 \left((\partial_k v^i) h^k - (\partial_k h^i) v^k - (\partial_\alpha h^i) v^\alpha \right), \quad w^\alpha = 0. \tag{50}$$

Покажем, что векторное поле (**??**), является производной Ли $\mathbb{D}^2$-гладкого векторного поля V в направлении некоторого вертикального векторного поля u, с координатами $\{u^i = 0, u^\alpha = 0, \dot{u}^i = 0, \ddot{u}^i = h^i\}$, то есть принимающего значения в $V^2_1 T T^2_{tr} M$.

Вычислим компоненты производной Ли $\mathcal{L}_u V$. Обозначим для удобства $\mathcal{L}_u V^i = a^i + \varepsilon \dot{a}^i + \varepsilon^2 \ddot{a}^i$ и $\mathcal{L}_u v^\alpha = a^\alpha$. Имеем

$$a^i = u^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + u^\beta \frac{\partial v^i}{\partial y^\beta} + \dot{u}^k \frac{\partial v^i}{\partial \dot{x}^k} + \ddot{u}^k \frac{\partial v^i}{\partial \ddot{x}^k} - \\ - v^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} - v^\beta \frac{\partial u^i}{\partial y^\beta} - \dot{v}^k \frac{\partial u^i}{\partial \dot{x}^k} - \ddot{v}^k \frac{\partial u^i}{\partial \dot{x}^k} = 0,$$

$$\dot{a}^i = u^k \frac{\partial \dot{v}^i}{\partial x^k} + u^\beta \frac{\partial \dot{v}^i}{\partial y^\beta} + \dot{u}^k \frac{\partial \dot{v}^i}{\partial \dot{x}^k} + \ddot{u}^k \frac{\partial \dot{v}^i}{\partial \ddot{x}^k} - \\ - v^k \frac{\partial \dot{u}^i}{\partial x^k} - v^\beta \frac{\partial \dot{u}^i}{\partial y^\beta} - \dot{v}^k \frac{\partial \dot{u}^i}{\partial \dot{x}^k} - \ddot{v}^k \frac{\partial \dot{u}^i}{\partial \dot{x}^k} = 0,$$

$$\ddot{a}^i = u^k \frac{\partial \ddot{v}^i}{\partial x^k} + u^\beta \frac{\partial \ddot{v}^i}{\partial y^\beta} + \dot{u}^k \frac{\partial \ddot{v}^i}{\partial \dot{x}^k} \ddot{u}^k \frac{\partial \ddot{v}^i}{\partial \ddot{x}^k} - v^k \frac{\partial \ddot{u}^i}{\partial x^k} - v^\beta \frac{\partial \ddot{u}^i}{\partial y^\beta} - \dot{v}^k \frac{\partial \ddot{u}^i}{\partial \dot{x}^k} = \\ = \ddot{u}^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \left(v^k \frac{\partial \ddot{u}^i}{\partial x^k} + v^\beta \frac{\partial \ddot{u}^i}{\partial y^\beta} \right).$$

$$a^\alpha = u^k \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^k} + u^\beta \frac{\partial v^\alpha}{\partial y^\beta} + \dot{u}^k \frac{\partial v^\alpha}{\partial \dot{x}^k} + \ddot{u}^k \frac{\partial v^\alpha}{\partial \ddot{x}^k} - \\ - v^k \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^k} - v^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial y^\beta} - \dot{v}^k \frac{\partial u^\alpha}{\partial \dot{x}^k} - \ddot{v}^k \frac{\partial u^\alpha}{\partial \dot{x}^k} = 0,$$

Подведем итог проведенным рассуждениям.

Предложение 7. *Два $\mathbb{D}^2$-гладких векторных поля $'V$ и V на расслоении $T^2_{tr}M$ эквивалентны тогда и только тогда, когда разность этих векторных полей равна производной Ли векторного поля V в направлении некоторого векторного поля u, принимающего значения в $V^2_1 T T^2_{tr} M$.*

Как следствие предложения **??**, получаем следующее предложение.

Предложение 8. *$\mathbb{D}^2$-гладкое векторное поле (**??**) на расслоении $T^2_{tr}M$ эквивалентно $\mathbb{D}^2$-продолжению проектируемого векторного поля $v^i(x^j)$, $v^\alpha(x^j, y^\beta)$, заданного на M, тогда и только тогда, когда*

$$\hat{v}^i = 0, \quad \hat{\hat{v}}^i = (\partial_k v^i)h^k - (\partial_k h^i)v^k - (\partial_\alpha h^i)v^\alpha.$$

9 Связность в главном расслоении

Пусть (P, M, G, π) — локально тривиальное расслоение, где стандартный слой G является группой Ли, и пусть Σ — правое действие G на R, то есть:

$$\Sigma : G \times P \ni (a, X) \mapsto Xa = R_a(X) \in P.$$

Определение 4. *Набор (P, M, G, π, Σ) называется главным расслоением над M со структурной группой G, если выполняется следующие условия:*

(i) *Σ — свободное действие, то есть $Xa = X$ хотя бы для одного $X \in P$ влечет $a = e$.*

(ii)*Σ — послойное действие, то есть $\pi \circ R_a = \pi$.*

(iii) *Для любого $x \in M$ существует открытое множество $x \in U$ такое, что $\pi^{-1}(U)$ диффеоморфно $U \times G$ и существует эквивариантный послойный диффеоморфизм $\varphi : \pi^{-1} \to U \times G$, то есть такой что для любого $a \in G$ коммутативна диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "R_a"'] & U \times G \arrow[d, "R_a"] \\ \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"'] & U \times G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "R_a"'] & (x, b) \arrow[d, "R_a"] \\ Xa \arrow[r, "\varphi"'] & (x, ba) \end{tikzcd} \tag{51}$$

где G действие на $U \times G$ справа умножением на второй элемент пары $R_a(x, b) = (x, ba)$. Иными словами, $\varphi(x) = (x, b)$ влечет $\varphi(x_a) = (x, ba)$

Атлас главного расслоения задается отображениями $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U \times G$, для некоторого покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия M.

Пусть M является n-мерным многообразием. Обозначим через $P^1_x = P^1_x(M)$ множество базисов $\{e_a\}_x$ в T_xM и $P^1 = P^1(M) = \bigcup_{x \in M} P^1_x$. Определим проекцию $\pi : P^1M \ni \pi\{e_a\}_x \mapsto x \in M$. (U, h) — карта на M, такая что $h : U \to U^* \subset \mathbb{R}^n$, тогда в T_xM возникает натуральный базис $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Определим на $\pi^{-1}(U)$ карту $h^P : \pi^{-1}(U) \to U^* \times G^1_n \subset \mathbb{R}^{n^2}$,

где $G^1_n = GL(n,\mathbb{R})$ — множество невырожденных $n \times n$ матриц. Эта карта определяется следующим образом:

$$h^P : \{\overline{e}_a\}_x \mapsto \{x^i, x^i_a\}, \tag{52}$$

где $\overline{e}_a = x^i_a \partial_i$. Для (U,h) и (U',h') с $U \cap U' \neq \emptyset$ на $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(U')$ функции склейки имеют следующий вид:

$$x^{i'} = f^{i'}(x^i), \quad x^{i'}_a = \frac{\partial f^i}{\partial x^i} x^i_a. \tag{53}$$

Можно заметить, что h^P переносит базу топологии с $U^* \times G^1_n$ на $\pi^{-1}(U)$. Функции (**??**) гарантируют, что объединение таких баз, взятое по всем (U,h) из некоторого атласа дает базу топологии на P^1. Тогда (**??**) задает на P^1 структуру гладкого многообразия. (P^1, M, G^1_n, π) — локально тривиальное расслоение, где G^1_n естественное правое действие на многообразии P^1M, имеющее вид:

$$P^1M \times G^1_n : (\{e_a\}_x, A^b_c) \mapsto \{e_b A^b_f\} \in P^1M, \tag{54}$$

а гомоморфизмы тривиализации имеют вид:

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \ni \{e_a\}_x \mapsto \{x, x^i_a\} \in U \times G^1_n,$$

и очевидно, являющийся эквивариантным относительно действия G^1_n. Репер $\{e_a\} \in T_xM$ определяет отображение (обозначим его тем же самым символом, что и репер)

$$\{e_a\}_x : \mathbb{R}^n \to T_xM,$$

относящее набору $\{v^a\} \in \mathbb{R}^n$ вектор $v^a e_a \in T_xM$, поскольку e_a является образом точки (0...1...0) (где единица стоит на a-ом месте) при отображении $\{e_a\}_x$. Поэтому расслоение реперов P^1M можно эквивалентным образом определить как множество линейных изоморфизмов из $\mathbb{R}^n$ в касательное пространство к M.

Определение 5. *Связностью в главном расслоении (P, M, G, π) [**?**] называется горизонтальное распределение на P, инвариантное относительно правых сдвигов на P, то есть такое распределение $\{H_X\}$, что $TR_a(H_X) = H_{Xa}$ и $T_X\pi\Big|_{H_X} : H_X \to T_xM$ — изоморфизм, где $x = \pi(X)$.*

Рассмотрим базис $\{e_i, e^a_i\}$, где $\{e^a_i\}$ совпадает с векторами натурального базиса ∂^a_i, а e_i лежит в горизонтальной площадке и проектируется в вектор ∂_i на M. Такой базис имеет вид:

$$\begin{cases} e_i = \partial_i - \Gamma^k_{ia}\partial^a_k, \\ e^a_i = \partial^a_i. \end{cases}$$

Рассмотрим сопряженный к нему базис $\{e^i, e^i_b\}$. Имеем:

$$\begin{cases} e^i = \mu^i_l dx^i + \lambda^{ib}_l dx^l_b, \\ e^i_b = \gamma^i_{bl} dx^l + \gamma^{ic}_{bl} dx^l_c. \end{cases} \tag{55}$$

Учитывая то, что

$$e^i(e_k) = \delta^i_k, \quad e^i_b(e_k) = 0,$$
$$e^i(\partial^j_i) = 0, \quad e^i_b(\partial^j) = \delta^a_b \delta^i_j,$$

находим коэффициенты в формуле (**??**). Имеем:

$$e^i(e_i) = \mu^i_l dx^i(\partial_k - \Gamma^j_{ak}\partial^a_j) + \lambda^{ib}_l dx^l_b(\partial_k - \Gamma^j_{ak}\partial^a_j) =$$
$$= \mu^i_l \delta^l_k - \lambda^{ib}_l \Gamma^j_{ak}\delta^l_j \delta^a_b = \mu^i_k - \lambda^{ib}_l \Gamma^l_{bk} = \delta^i_k,$$

$$e^i(\partial a_j) = \mu^i_l dx^i(\partial a_j) + \lambda^{ib}_l dx^l_b(\partial a_j) = \lambda^{ib}_l \delta^l_j \delta^a_b = \lambda^{ia}_j = 0.$$

Откуда следует, что $\mu^i_k = 1$ и $\lambda^{ib}_l = 0$.

$$e^i_b(e_k) = \gamma^i_{bl} dx^l(\partial_k - \Gamma^j_{ak}\partial^a_j) + \lambda^{ic}_{bl} dx^l_c(\partial_k - \Gamma^j_{ak}\partial^a_j) =$$
$$= \gamma^i_{bl}\delta^l_k - \gamma^{ic}_{bl}\Gamma^j_{ak}\delta^l_j\delta^a_b = \gamma^i_{bk} - \gamma^{ic}_{bj}\Gamma^j_{ck} = 0,$$

$$e^i(\partial a_j) = \gamma^i_{bl} dx^l(\partial a_j) + \gamma^{ic}_{bl} dx^l_c(\partial a_j) = \gamma^{ic}_{bl}\delta^l_j\delta^a_c = \gamma^{ia}_{bj} = \delta^a_b\delta^i_j.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} e^i = dx^i, \\ e^a_i = dx^i_a + \Gamma^i_{ka} dx^k. \end{cases}$$

Горизонтальная площадка в точке X с координатами (x^i, x^a_b) задается уравнениями следующего вида:

$$dx^i_\alpha + \Gamma^i_{\alpha j}(x^k, x^k_\gamma) dx^j = 0. \tag{56}$$

В частности, в точке $X_0 = (x^k, \delta^k_\gamma)$, принадлежащей натуральному сечению

$$dx^i_\alpha + \Gamma^i_{\alpha j}(x^k, \delta^k_m) dx^j = 0.$$

Обозначим $\Gamma^i_{\alpha j}(x^k, \delta^k_m)$ через $\Gamma^i_{\alpha j}(x^k)$, тогда уравнение (**??**) записывается следующим образом:

$$dx^i_\alpha + \Gamma^i_{mj}(x^k) dx^j = 0.$$

Действуем на элемент dx^i_β правым действием A^α_β:

$$dx^i_\beta = (dx^i_\alpha)A^\alpha_\beta = (-\Gamma^i_{\alpha j}(x^k)dx^j)A^\alpha_\beta = -\Gamma^i_{mj} dx^j x^m_\beta.$$

Откуда получаем уравнение горизонтальной площадки после правого сдвига:

$$dx^i_\beta + \Gamma^i_{mj}(x^k) x^m_\beta dx^j = 0. \tag{57}$$

10 Линейные связности на слоеном многообразии

Пусть $(M, \mathcal{F})$ — $(m+n)$-мерное многообразие со слоением $\mathcal{F}$ коразмерности m и (U, h) — карта слоения на M, где

$$h : U \ni z \mapsto \{x^i = h^i(z), y^\alpha = h^\alpha(z)\} \in U^* \subset \mathbb{R}^{m+n}, \tag{58}$$

Для $z \in U$ обозначим через VT_zM подпространство в касательном пространстве T_zM, состоящее из касательных векторов к слою слоения, проходящему через z. В терминах карты (**??**), пространство VT_zM натянуто на векторы $\{\partial_\alpha\}$, $\alpha = m+1, \ldots, m+n$. Репер $\{e_j, e_\beta\}$, где $j = 1, \ldots, m$, $\beta = m+1, \ldots, m+n$ на (M, F) назовем *адаптированным к слоению* или *слоеным* репером, если $e_\beta \in VT_zM$. Обозначим символом $P^1_{fol\,z}(M)$ множество слоеных реперов на M в точке z, а символом $P^1_{fol}M = \bigcup_{z\in M} P^1_{fol\,z}(M)$. Имеется естественная проекция $\pi : P_{fol}M \ni \{e_j, e_\beta\}_z \mapsto z \in M$. Карта (**??**) на M определяет карту

$$h^P : \pi^{-1}(U) \ni \{e_j, e_\beta\}_z \mapsto \{x^i, y^\alpha, x^i_j, y^\alpha_j, y^\alpha_\beta\} \in U^* \times G^1_{m,n}, \tag{59}$$

где $x^i = h^i(z)$, $y^\alpha = h^\alpha(z)$, $(e_j, e_\beta) = (x^i_j\partial_i + y^\alpha_j\partial_\alpha, y^\alpha_\beta\partial_\alpha)$, а G^1_{mn} — множество невырожденных $(n+m)\times(n+m)$ матриц следующего вида

$$\begin{pmatrix} a^i_j & 0 \\ a^\alpha_j & a^\alpha_\beta \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Операция умножения элементов группы G^1_{mn} имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a^i_j & 0 \\ a^\alpha_j & a^\alpha_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^j_{j'} & 0 \\ a^\alpha_{j'} & a^\alpha_{\alpha'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^i_j a^j_{j'} & 0 \\ a^\alpha_j a^j_{j'} + a^\alpha_\alpha a^\alpha_{j'} & a^\alpha_\alpha a^\alpha_{\alpha'} \end{pmatrix}.$$

Если (U, h) и (U', h') — две слоеные карты на M, такие что $U \cap U' \neq \varnothing$, то $\partial_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\partial_{i'} + \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha}\partial_{\alpha'}$, $\partial_\alpha = \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha}\partial_{\alpha'}$. Откуда следует, что координаты (**??**) на $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(U')$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{gathered} x^{i'} = x^{i'}(x^i(x^j)), \quad y^{\alpha'} = y^{\alpha'}(y^\alpha(x^j, y^\beta)), \\ x^{i'}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}x^i_j, \quad y^{\alpha'}_j = \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha}y^\alpha_j + \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial x^i}x^i_j, \quad y^{\alpha'}_\beta = \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha}y^\alpha_\beta. \end{gathered} \tag{61}$$

Откуда следует, что набор карт $\{(\pi^{-1}(U), h^P)\}$ при (U, h), пробегающими атлас слоения на (M, F), задает атлас гладкого многообразия на $P^1_{fol}M$.

$(P^1_{fol}M, M, G^1_{mn}, \pi)$ — локально тривиальное расслоение. G^1_{mn} группа матриц вида (**??**), определяющее правое действие на множестве $P^1_{fol}M$, имеющее вид:

$$P^1_{fol}M \times G^1_{m,n} : (\{e_j, e_\beta\}_z, A) \mapsto (\{e_j, e_\beta\}A) \in P^1_{fol}M, \tag{62}$$

где $A = \begin{pmatrix} a^i_j & 0 \\ a^\alpha_j & a^\alpha_\beta \end{pmatrix}$.

Правый сдвиг имеет вид:

$$\begin{pmatrix} {}'x^i_j & 0 \\ {}'y^\alpha_j & {}'y^\alpha_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i_j & 0 \\ y^\alpha_j & y^\alpha_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^j_{j'} & 0 \\ a^\alpha_{j'} & a^\alpha_{\beta'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i_j a^j_{j'} & 0 \\ y^\alpha_j a^j_{j'} + y^\alpha_\alpha a^\alpha_{j'} & y^\alpha_\alpha a^\alpha_{\beta'} \end{pmatrix}.$$

Что эквивалентно:

$$\begin{cases} {}'x^i_j = x^i_j a^j_{j'}, \\ {}'y^\alpha_j = y^\alpha_j a^j_{j'} + y^\alpha_\beta a^\beta_{j'}, \\ {}'y^\alpha_\alpha = y^\alpha_\alpha a^\alpha_{\beta'}. \end{cases}$$

Действие правого сдвига на касательных пространствах имеет вид

$$d'x^i_{j'} = (dx^i_j)a^j_{j'} = -(\Gamma^i_{jp}dx^p + \Gamma^i_{j\beta}dy^\beta)a^j_{j'},$$

$$d'y^\alpha_{j'} = dy^\alpha_j a^j_{j'} + dy^\alpha_\beta a^\beta_{j'} = -(\Gamma^\alpha_{jp}dx^p + \Gamma^\alpha_{j\beta}dy^\beta)a^j_{j'} - (\Gamma^\alpha_{\beta p}dx^p + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}dy^\gamma)a^\beta_{j'},$$

$$d'y^\alpha_{\beta'} = dy^\alpha_\beta a^\beta_{\beta'} = dy^\alpha_\beta y^\beta_{\beta'} = -(\Gamma^\alpha_{\beta p}dx^p + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}dy^\gamma)a^\beta_{\beta'}.$$

Рассматриваем случай применения правого сдвига к натуральному реперу:

$$\begin{pmatrix} {}'x^i_j & 0 \\ {}'y^\alpha_j & {}'y^\alpha_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^i_j & 0 \\ 0 & \delta^\alpha_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^j_{j'} & 0 \\ a^\beta_{j'} & a^\beta_{\beta'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^i_j a^j_{j'} & 0 \\ \delta^\alpha_\beta a^\beta_{j'} & \delta^\alpha_\beta a^\beta_{\beta'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^i_{j'} & 0 \\ a^\alpha_{j'} & a^\alpha_{\beta'} \end{pmatrix}.$$

что эквивалентно:

$$\begin{cases} {}'x^i_j = a^i_{j'}, \\ {}'y^\alpha_j = a^\alpha_{j'}, \\ {}'y^\alpha_\beta = a^\alpha_{j'}. \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$d'x^i_{j'} = -(\Gamma^i_{jp}dx^p + \Gamma^i_{j\gamma}dy^\gamma)x^j_{j'},$$

$$d'y^\alpha_{j'} = -(\Gamma^\alpha_{jp}dx^p + \Gamma^\alpha_{j\gamma}dy^\gamma)x^j_{j'} - (\Gamma^\alpha_{\beta p}dx^p + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}dy^\gamma)y^\beta_{j'},$$

$$d'y^\alpha_{\beta'} = -(\Gamma^\alpha_{\beta p}dx^p + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}dy^\gamma)y^\beta_{\beta'},$$

где $\Gamma^A_{BC} = \Gamma^A_{BC}(x^i, y^\alpha)$.

Связность в расслоении $P^1_{fol}M$ имеет уравнения:

$$\begin{cases} dx^i_j + \Gamma^i_{kp}x^k_j dx^p + \Gamma^i_{k\gamma}x^k_j dy^\gamma = 0, \\ \\ dy^\alpha_j + \Gamma^\alpha_{kp}x^k_j dx^p + \Gamma^\alpha_{k\gamma}x^k_j dy^\gamma + \Gamma^\alpha_{\gamma p}y^\gamma_j dx^p + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}y^\gamma_j dy^\beta = 0, \\ \\ dy^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha_{\gamma j}y^\gamma_\beta dx^j + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}y^\gamma_\beta dy^\sigma = 0. \end{cases}$$

Найдем преобразование коэффициентов линейной связности при замене карты слоения на многообразии.

Рассмотрим первое уравнение:

$$dx^{i'}_j + \Gamma^{i'}_{j'k'} x^{j'}_j dx^{k'} + \Gamma^{i'}_{j'\beta'} x^{j'}_j dy^{\beta'} = 0.$$

Подставляя $x^{i'}_j = x^{i'}_i x^i_j$, получаем (напомним, что в наших обозначениях $x^{i'}_i$ — элементы матрицы Якоби преобразования координат, а $x^{i'}_j$ и x^i_j — координаты репера по отношению к двум системам координат)

$$d(x^{i'}_i x^i_j) + \Gamma^{i'}_{j'k'} x^{j'}_j x^j_j dx^k x^{k'}_k + \Gamma^{i'}_{j'\beta'} x^{j'}_j x^j_j (dy^\beta y^{\beta'}_\beta + dx^k y^{\beta'}_k) = 0,$$

откуда

$$x^{i'}_{ik} dx^k x^i_j + x^{i'}_i dx^i_j + \Gamma^{i'}_{k'j'} x^{j'}_j x^j_j dx^k x^{k'}_k + \Gamma^{i'}_{k'\beta'} x^{j'}_j x^j_j (dy^\beta y^{\beta'}_\beta + dx^k y^{\beta'}_k) = 0$$

Свертывая с $x^{i'}_i$ и переобозначая индексы, получаем

$$dx^i_j + (x^{i'}_{pk} x^i_{i'} + \Gamma^{i'}_{k'j'} x^i_{i'} x^{j'}_p x^{k'}_k + \Gamma^{i'}_{k'\beta'} x^i_{i'} x^{j'}_p y^{\beta'}_k) x^p_j dx^k + \\ + (\Gamma^{i'}_{k'\beta'} x^i_{i'} x^{j'}_p y^{\beta'}_\beta) x^p_j dy^\beta = 0$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$dy^{\alpha'}_j + \Gamma^{\alpha'}_{j'k'} x^{j'}_j dx^{k'} + \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'} x^{j'}_j dy^{\beta'} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'k'} y^{\gamma'}_j dx^{k'} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\gamma'}_j dy^{\beta'} = 0$$

Подставляя $y^{\alpha'}_j = y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_j + y^{\alpha'}_i x^i_j$, получаем (напомним, что в наших обозначениях $y^{\alpha'}_\alpha$ — элементы матрицы Якоби преобразования координат, а $y^{\alpha'}_j$ и y^α_j — координаты репера по отношению к двум системам координат)

$$d(y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_j + y^{\alpha'}_i x^i_j) + \Gamma^{\alpha'}_{j'k'} x^{j'}_p x^p_j dx^k x^{k'}_k + \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'} x^{j'}_p x^p_j (dy^\beta y^{\beta'}_\beta + dx^k y^{\beta'}_k) + \\ + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'k'} (y^{\gamma'}_\gamma y^\gamma_j + y^{\gamma'}_i x^i_j) dx^j x^{j'}_j + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} (y^{\gamma'}_\gamma y^\gamma_j + y^{\gamma'}_i x^i_j)(dy^\beta y^{\beta'}_\beta + dx^k y^{\beta'}_k) = 0.$$

Откуда

$$y^{\alpha'}_{\alpha k} y^\alpha_j dx^k + y^{\alpha'}_{\alpha\beta} y^\alpha_j dy^\beta + y^{\alpha'}_\alpha dy^\alpha_j + y^{\alpha'}_{ik} x^i_j dx^k + y^{\alpha'}_{i\beta} x^i_j dy^\beta + y^{\alpha'}_i dx^i_j + \\ + \Gamma^{\alpha'}_{j'k'} x^{j'}_p x^p_j dx^k x^{k'}_k + \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'} x^{j'}_p x^p_j dy^\beta y^{\beta'}_\beta + \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'} x^{j'}_p x^p_j dx^k y^{\beta'}_k + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'k'} y^{\gamma'}_\gamma y^\gamma_j dx^p x^{j'}_j + \\ + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'k'} y^{\gamma'}_i x^i_p dx^p x^{j'}_j + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\gamma'}_\gamma y^\gamma_j dy^\beta y^{\beta'}_\beta + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\gamma'}_i x^i_j dy^\beta y^{\beta'}_\beta + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\gamma'}_\gamma y^\gamma_j dx^k y^{\beta'}_k + \\ + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\gamma'}_i x^i_j dx^k y^{\beta'}_k = 0.$$

Свертывая с $y^{\alpha}_{\alpha'}$ и переобозначая индексы, получаем

$$dy^{\alpha}_{j} + (y^{\alpha'}_{i} y^{\alpha}_{\alpha'} \Gamma^{i'}_{k'j'} x^{i}_{i'} x^{j'}_{p} x^{k'}_{k} + y^{\alpha'}_{i} y^{\alpha}_{\alpha'} \Gamma^{i'}_{k'\beta'} x^{i}_{i'} x^{j'}_{p} y^{\beta'}_{k} +$$
$$+ y^{\alpha'}_{ik} y^{\alpha}_{\alpha'} + \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} x^{j'}_{p} y^{\beta'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\gamma'}_{i} y^{\beta'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'k'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\gamma'}_{i} x^{j'}_{j} + \Gamma^{\alpha'}_{j'k'} y^{\alpha}_{\alpha'} x^{j'}_{j} x^{k'}_{k}) x^{i}_{j} dx^{k} +$$
$$+ (y^{\alpha'}_{i\beta} y^{\alpha}_{\alpha'} + \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} x^{j'}_{p} y^{\beta'}_{\beta} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\gamma'}_{i} y^{\beta'}_{\beta} + y^{\alpha'}_{i} y^{\alpha}_{\alpha'} \Gamma^{i'}_{k'\beta'} x^{i}_{i'} x^{j'}_{p} y^{\beta'}_{\beta}) x^{i}_{j} dy^{\beta} +$$
$$+ (y^{\alpha'}_{\alpha k} y^{\alpha}_{\alpha'} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\gamma'}_{\gamma} y^{\beta'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'k'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\gamma'}_{\gamma} x^{j'}_{j}) y^{\alpha}_{j} dx^{k} +$$
$$+ (y^{\alpha'}_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{\alpha'} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\gamma'}_{\gamma} y^{\beta'}_{\beta}) y^{\gamma}_{j} dy^{\beta} = 0.$$

Рассмотрим третье уравнение системы:

$$dy^{\alpha'}_{\sigma} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'k'} y^{\gamma'}_{\sigma} dx^{k'} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\gamma'}_{\sigma} dy^{\beta'} = 0$$

Подставляя $y^{\alpha'}_{\sigma} = y^{\alpha'}_{\alpha} y^{\alpha}_{\sigma}$, получаем (напомним, что в наших обозначениях $y^{\alpha'}_{\alpha}$ — элементы матрицы Якоби преобразования координат, а y^{α}_{σ} и $y^{\alpha'}_{\sigma}$ — координаты репера по отношению к двум системам координат)

$$d(y^{\alpha'}_{\alpha} y^{\alpha}_{\sigma}) + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'k'} y^{\gamma'}_{\gamma} y^{\gamma}_{\sigma} dx^{j} x^{j'}_{j} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\gamma'}_{\gamma} y^{\gamma}_{\sigma} (dy^{\beta} y^{\beta'}_{\beta} + dx^{k} y^{\beta'}_{k}) = 0.$$

Откуда

$$y^{\alpha'}_{\alpha k} y^{\alpha}_{\sigma} dx^{k} + y^{\alpha'}_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{\sigma} dy^{\beta} + y^{\alpha'}_{\alpha} dy^{\alpha}_{\sigma} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'k'} y^{\gamma'}_{\gamma} y^{\gamma}_{\sigma} dx^{j} x^{j'}_{j} +$$
$$+ \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\gamma'}_{\gamma} y^{\gamma}_{\sigma} dy^{\beta} y^{\beta'}_{\beta} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\gamma'}_{\gamma} y^{\gamma}_{\sigma} dx^{k} y^{\beta'}_{k} = 0.$$

Свертывая с $y^{\alpha}_{\alpha'}$ и переобозначая индексы, получаем

$$dy^{\alpha}_{\sigma} + (\Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\gamma'}_{\gamma} y^{\beta'}_{k} + y^{\alpha'}_{\alpha k} y^{\alpha}_{\alpha'} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'k'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\gamma'}_{\gamma} x^{j'}_{j}) y^{\gamma}_{\sigma} dx^{j} +$$
$$+ (y^{\alpha'}_{\gamma\beta} y^{\alpha}_{\alpha'} + \Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\gamma'}_{\gamma} y^{\beta'}_{\beta}) y^{\gamma}_{\sigma} dy^{\beta} = 0$$

Предложение 9. *Коэффициенты связности в расслоении $P^{1}_{fol}M$, соответствующие двум разным слоеным картам (U, h) и (U', h') на $(M, \mathcal{F})$ на пересечении областей определения $U \cap U'$ преобразуются следующим образом:*

$$\Gamma^{i}_{jk} = x^{i}_{i'} x^{i'}_{jk} + \Gamma^{i'}_{j'k'} x^{i}_{i'} x^{j'}_{j} x^{k'}_{k} + \Gamma^{i'}_{j'\beta'} x^{i}_{i'} x^{j'}_{j} y^{\beta'}_{k}, \tag{63}$$

$$\Gamma^{i}_{j\beta} = x^{i}_{i'} \Gamma^{i'}_{j'\beta'} x^{j'}_{j} y^{\beta'}_{\beta}, \tag{64}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{jk} = y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{jk} + \Gamma^{i'}_{j'k'} y^{\alpha}_{i'} x^{j'}_{j} x^{k'}_{k} + \Gamma^{i'}_{j'\beta'} y^{\alpha}_{i'} x^{j'}_{j} y^{\beta'}_{k} +$$
$$+ \Gamma^{\alpha'}_{j'k'} y^{\alpha}_{\alpha'} x^{j'}_{j} x^{k'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} x^{j'}_{j} y^{\beta'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'k'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{j} x^{k'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{j} y^{\beta'}_{k}, \tag{65}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta k} = y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{\beta k} + y^{\alpha}_{i'} \Gamma^{i'}_{\alpha'k'} y^{\alpha'}_{\beta} x^{k'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'k'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{\beta} x^{k'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{\beta} y^{\beta'}_{k}, \tag{66}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{j\gamma} \;=\; y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{j\gamma} \;+\; y^{\alpha}_{i'} \Gamma^{i'}_{j'\beta'} x^{j'}_{j} y^{\beta'}_{\gamma} \;+\; \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} x^{j'}_{j} y^{\beta'}_{\gamma} \;+\; \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{j} y^{\beta'}_{\gamma}, \quad (67)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{\beta\gamma} + y^{\alpha}_{\alpha'} \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'\beta'} y^{\alpha'}_{\beta} y^{\beta'}_{\gamma}. \quad (68)$$

В силу того, что компоненты (**??**) преобразуются независимо от других компонент и по линейному закону, то обращение их в нуль носит инвариантный характер. Это позволяет выделить некоторый класс связностей в расслоении $P^1_{fol}M$. В локальных координатах связности указанного класса задаются функциями

$$\Gamma^{i}_{jk}(x^{\ell}), \quad \Gamma^{\alpha}_{\beta k}(x^{\ell}, y^{\sigma}), \quad \Gamma^{\alpha}_{j\gamma}(x^{\ell}, y^{\sigma}), \quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^{\ell}, y^{\sigma}), \quad \Gamma^{\alpha}_{jk}(x^{\ell}, y^{\sigma}). \quad (69)$$

Связности такого типа называются проектируемыми [**?**], поскольку коэффициенты $\Gamma^{i}_{jk}(x^{\ell})$ определяют связность на локальном фактормногообразии с координатами x^i.

Предложение 10. *Коэффициенты проектируемой связности в расслоении $P^1_{fol}M$, соответствующие двум разным слоеным картам (U, h) и (U', h') на (M, F) на пересечении областей определения $U \cap U'$ преобразуются следующим образом:*

$$\Gamma^{i}_{jk} = x^{i}_{i'} x^{i'}_{jk} + \Gamma^{i'}_{j'k'} x^{i}_{i'} x^{j'}_{j} x^{k'}_{k} \quad (70)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{jk} = y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{jk} + \Gamma^{i'}_{j'k'} y^{\alpha}_{i'} x^{j'}_{j} x^{k'}_{k} + \\ + \Gamma^{\alpha'}_{j'k'} y^{\alpha}_{\alpha'} x^{j'}_{j} x^{k'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} x^{j'}_{j} y^{\beta'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'k'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{j} x^{k'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{j} y^{\beta'}_{k}, \quad (71)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta k} = y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{\beta k} + y^{\alpha}_{i'} \Gamma^{i'}_{\alpha'k'} y^{\alpha'}_{\beta} x^{k'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'k'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{\beta} x^{k'}_{k} + \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{\beta} y^{\beta'}_{k}, \quad (72)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{j\gamma} = y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{j\gamma} + \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} x^{j'}_{j} y^{\beta'}_{\gamma} + \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'\beta'} y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{j} y^{\beta'}_{\gamma}, \quad (73)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = y^{\alpha}_{\alpha'} y^{\alpha'}_{\beta\gamma} + y^{\alpha}_{\alpha'} \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'\beta'} y^{\alpha'}_{\beta} y^{\beta'}_{\gamma}. \quad (74)$$

Формулы (**??**)-(**??**) могут рассматриваться как функции склейки локально тривиального расслоения LM над M, если коэффициенты связности рассматривать как элементы из некоторого пространства $\mathbb{R}^N$, образующего стандартный слой этого расслоения. Тотальное пространство этого расслоения LM несет на себе слоение $\mathcal{F}^L$, базовыми координатами которого являются x^i и Γ^{i}_{jk}. Это расслоение называется расслоением объекта слоеной линейной связности на $(M, \mathcal{F})$.

Проектируемые связности в расслоении $P^1_{fol}M$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с сечениями $\Gamma : M \to LM$, являющимися морфизмами слоений.

11 $\mathbb{D}^2$-линейные связности на трансверсальном расслоении второго порядка

Рассмотрим два модуля L_1 и L_2 вида $(\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$. $\mathbb{D}^2$-линейное отображение $f : L_1 \to L_2$ имеет вид (см. **??**):

$$\begin{cases} W^i = X^i_j V^j + \varepsilon^2 x^i_\beta v^\beta, \\ w^\alpha = y^\alpha_i v^i + y^\alpha_\beta v^\beta. \end{cases} \tag{75}$$

Множество $Hom(L_1, L_2)$ $\mathbb{D}^2$-линейных отображений из L_1 в L_2 является векторным пространством и образует $\mathbb{D}^2$-модуль относительно следующим образом определенной операции умножения элемента $V \in Hom(L_1, L_2)$ на элемент алгебры $\alpha \in \mathbb{D}^2$:

$$(\alpha \cdot f)(V) = \alpha \cdot f(V). \tag{76}$$

Для выполнения условия (**??**) для всех $\alpha \in \mathbb{D}^2$ достаточно, чтобы оно выполнялось для $\alpha = \varepsilon$:

$$(\varepsilon f)(V) = \varepsilon f(V). \tag{77}$$

Условие (**??**) в координатах записывается следующим образом:

$$\varepsilon(X^i_j, x^i_\beta, y^\alpha_i, y^\alpha_\beta) = (\varepsilon X^i_j, 0, 0, 0),$$

то есть

$$\begin{cases} W^i = \varepsilon X^i_j V^j, \\ w^\alpha = 0, \end{cases}$$

где координаты $X^i_j \in \mathbb{D}^2$, а $x^i_\beta, y^\alpha_i, y^\alpha_\beta \in \mathbb{R}^m$. Таким образом можно заметить, что модуль $Hom(L_1, L_2)$ имеет такой же вид, что и модули L_1 и L_2, а именно $(\mathbb{D}^2)^M \oplus \mathbb{R}^N$, где $M = mm'$ и $N = nm' + n'm + nn'$.

$\mathbb{D}^2$-линейное отображения вида $\Gamma : A \to Hom(A, B)$ имеет следующие уравнения:

$$\begin{cases} X^i_j = \Gamma^i_{jk} V^k + \varepsilon^2 \Gamma^i_{j\beta} v^\beta, \\ x^i_\beta = \Gamma^i_{\beta k} v^k + \Gamma^i_{\beta\sigma} v^\sigma, \\ y^\alpha_i = \Gamma^\alpha_{ik} v^k + \Gamma^\alpha_{i\sigma} v^\sigma, \\ y^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta k} v^k + \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} v^\sigma. \end{cases} \tag{78}$$

Рассмотрим касательное пространство $T_X T^2_{tr} M$.

Определение 6. *$\mathbb{D}^2$-линейным репером в точке $X \in T^2_{tr} M$ будем называть $\mathbb{D}^2$-линейный изоморфизм $Z : (\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n \to T_X T^2_{tr} M$.*

Множество всех $\mathbb{D}^2$-линейных реперов на $T^2_{tr}M$ образует расслоение $\pi : P^1(\mathbb{D}^2)T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M$ $\mathbb{D}^2$-линейных реперов. Карта слоения на $(M, \mathcal{F})$ индуцирует на $P^1(\mathbb{D}^2)T^2_{tr}M$ координаты

$$\{X^i, y^\alpha, X^i_j, x^i_\beta, y^\alpha_i, y^\alpha_\beta\}.$$

В дальнейшем будем рассматривать $\mathbb{D}^2$-линейные связности. Определим $\mathbb{D}^2$-линейную связность $P^1(\mathbb{D}^2)T^2_{tr}M$. Элементом связности в точке $Z \in P^1(\mathbb{D}^2)T^2_{tr}M$ будем называть $\mathbb{D}^2$-линейное отображение $\Gamma : T_X T^2_{tr}M \to T_Z P^1(\mathbb{D}^2)T^2_{tr}M$, где $\pi(Z) = X$ (см. диаграмму ниже).

$$\begin{tikzcd} T_X T^2_{tr}M \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[dr, "id"'] & T_Z P^1(\mathbb{D}^2)T^2_{tr}M \arrow[d, "T\pi"] \\ & T_X T^2_{tr}M \end{tikzcd} \tag{79}$$

Автоморфизмы модуля $(\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$ образуют группу $G^1_{m,n}(\mathbb{D}^2)$. Выведем формулы для композиции элементов в этой группе. Пусть $g_1, g_2 \in G^1_{m,n}(\mathbb{D}^2)$ и g_3 — их композиция,

$$\begin{tikzcd} & G^1_{m,n}(\mathbb{D}^2) \arrow[dr, "g_2"] & \\ G^1_{m,n}(\mathbb{D}^2) \arrow[ur, "g_1"] \arrow[rr, "g_3 = g_2 \circ g_1"] & & G^1_{m,n}(\mathbb{D}^2) \end{tikzcd} \tag{80}$$

Если g_1 задается уравнениями

$$\begin{cases} W^i = \underset{1}{A}{}^i_j V^j + \varepsilon^2 \underset{1}{a}{}^i_\beta v^\beta, \\ u^\alpha = \underset{1}{b}{}^\alpha_j v^j + \underset{1}{b}{}^\alpha_\beta v^\beta, \end{cases} \tag{81}$$

а g_2 уравнениями

$$\begin{cases} U^k = \underset{2}{A}{}^k_i W^i + \varepsilon^2 \underset{2}{a}{}^k_\alpha v^\alpha, \\ u^\sigma = \underset{2}{b}{}^\sigma_i w^i + \underset{2}{b}{}^\sigma_\alpha v^\alpha, \end{cases} \tag{82}$$

то g_3 определится уравнениями

$$\begin{cases} U^k = \underset{3}{A}{}^k_j V^j + \varepsilon^2 \underset{1}{a}{}^k_\beta v^\beta, \\ u^\sigma = \underset{1}{b}{}^\sigma_j v^j + \underset{1}{b}{}^\sigma_\beta v^\beta, \end{cases} \tag{83}$$

где:

$$\begin{cases} \underset{3}{A}{}^k_j = \underset{2}{A}{}^k_i \underset{1}{A}{}^i_j + \varepsilon^2 \underset{2}{a}{}^k_\alpha \underset{1}{b}{}^\alpha_j, \\ \underset{3}{a}{}^k_\beta = \underset{2}{a}{}^k_i \underset{1}{a}{}^i_\beta + \underset{2}{a}{}^k_\alpha \underset{1}{b}{}^\alpha_\beta, \\ \underset{3}{b}{}^\sigma_j = \underset{2}{b}{}^\sigma_i \underset{1}{a}{}^i_j + \underset{2}{b}{}^\sigma_\alpha \underset{1}{b}{}^\alpha_j, \\ \underset{3}{b}{}^\sigma_\beta = \underset{2}{b}{}^\sigma_\alpha \underset{1}{b}{}^\alpha_\beta. \end{cases} \tag{84}$$

Закон преобразования координат (**??**) на M индуцирует закон преобразования координат на $T^2_{tr}M$:

$$\begin{gathered} X^{i'} = X^{i'}(X^i(x^j)), \quad y^{\alpha'} = y^{\alpha'}(y^\alpha(x^j, y^\beta)), \\ X^{i'}_j = \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^i} X^i_j,\ x^{i'}_\beta = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} x^i_\beta,\ y^{\alpha'}_j = \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha} y^\alpha_j + \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial x^i} x^i_j,\ y^{\alpha'}_\beta = \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha} y^\alpha_\beta. \end{gathered} \tag{85}$$

Правый сдвиг имеет вид:

$$\begin{cases} 'X^k_j = X^k_i A^i_j + \varepsilon^2 {}'x^k_\alpha b^\alpha_j, \\ 'x^k_\beta = x^k_i a^i_\beta + x^k_\alpha b^\alpha_\beta, \\ 'y^\sigma_j = y^\sigma_i a^i_j + y^\sigma_\alpha b^\alpha_j, \\ 'y^\sigma_\beta = y^\sigma_\alpha b^\alpha_\beta. \end{cases} \tag{86}$$

Дифференцируем систему (**??**), проводим подсчет и получаем запись действия правого сдвига на касательных пространствах:

$$\begin{aligned} d'X^k_j = dX^k_i A^i_j + \varepsilon^2 dx^k_\alpha b^\alpha_j = \\ = -(\Gamma^k_{ip} dx^p + \varepsilon^2 \Gamma^k_{i\gamma} dy^\gamma) A^i_j - \varepsilon^2 (\Gamma^k_{\alpha p} dx^p + \Gamma^k_{\alpha\gamma} dy^\gamma) b^\alpha_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'x^k_\beta = dx^k_i a^i_\beta + dx^k_\alpha b^\alpha_\beta = \\ = -(\Gamma^k_{ip} dx^p + \Gamma^k_{i\gamma} dy^\gamma) a^i_\beta - (\Gamma^k_{\alpha p} dx^p + \Gamma^k_{\alpha\gamma} dy^\gamma) b^\alpha_\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'y^\sigma_j = dy^\sigma_i A^i_j + dy^\sigma_\alpha b^\alpha_j = \\ = -(\Gamma^\sigma_{ip} dx^p + \Gamma^\sigma_{i\gamma} dy^\gamma) a^i_j - (\Gamma^\sigma_{\alpha p} dx^p + \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} dy^\gamma) b^\alpha_j, \end{aligned}$$

$$d'y^\sigma_\beta = dx^\sigma_\alpha b^\alpha_\beta = -(\Gamma^\sigma_{\alpha p} dx^p + \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} dy^\gamma) b^\alpha_\beta.$$

Рассмотрим случай применения правого сдвига к натуральному реперу:

$$\begin{cases} 'X^k_j = A^k_j, \\ 'x^k_\beta = a^k_\beta, \\ 'y^\sigma_j = b^\sigma_j, \\ 'y^\sigma_\beta = b^\sigma_\beta \end{cases} . \tag{87}$$

Подставляем полученный результат (**??**) в правый сдвиг касательных

пространств, получаем уравнения горизонтальной площадки:

$$\begin{cases} dX^k_j + \Gamma^k_{ip} dX^p X^i_j + \varepsilon^2 \Gamma^k_{i\gamma} dy^\gamma x^i_j + \varepsilon^2 \Gamma^k_{\alpha p} dx^p y^\alpha_j + \varepsilon^2 \Gamma^k_{\alpha\gamma} dy^\gamma y^\alpha_j = 0, \\ \\ dx^k_\beta + \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} dx^p x^i_\beta + \Gamma^k_{i\gamma} dy^\gamma x^i_\beta + \Gamma^k_{\alpha p} dx^p y^\alpha_\beta + \Gamma^k_{\alpha\gamma} dy^\gamma y^\alpha_\beta = 0, \\ \\ dy^\sigma_j + \Gamma^\sigma_{ip} dx^p x^i_j + \Gamma^\sigma_{i\gamma} dy^\gamma x^i_j + \Gamma^\sigma_{\alpha p} dx^p y^\alpha_j + \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} dy^\gamma y^\alpha_j = 0, \\ \\ dy^\sigma_\beta + \Gamma^\sigma_{\alpha p} dx^p y^\alpha_\beta + \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} dy^\gamma y^\alpha_\beta = 0, \end{cases} \tag{88}$$

где $\overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip}$ — вещественные части $\mathbb{D}^2$-значных коэффициентов Γ^k_{ip}.

Найдем преобразование коэффициентов $\mathbb{D}^2$-линейной связности при замене координат на M.

Рассмотрим первое уравнение системы (**??**)

$$dX^{k'}_j + \Gamma^{k'}_{i'p'} dX^{p'} X^{i'}_j + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{i'\gamma'} dy^{\gamma'} x^{i'}_j + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha' p'} dx^{p'} y^{\alpha'}_j + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'} dy^{\gamma'} y^{\alpha'}_j = 0$$

Подставляя (**??**), получаем (напомним, что в наших обозначениях $X^{i'}_i$ и $y^{\alpha'}_\alpha$ — элементы матрицы Якоби преобразования координат, а $X^{i'}_j$, X^i_j, $x^{i'}_\beta$, x^i_β, $y^{\alpha'}_\beta$, y^α_β, $y^{\alpha'}_j$ и y^α_j — координаты репера по отношению к двум системам координат)

$$\begin{aligned} &d(X^{k'}_i X^i_j) + \Gamma^{k'}_{i'p'} dX^p X^{p'}_p X^{i'}_i X^i_j + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{i'\gamma'} (dy^\gamma y^{\gamma'}_\gamma + dx^p y^{\gamma'}_p) x^{i'}_i x^i_j + \\ &+ \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha' p'} dx^p x^{p'}_p (y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_j + y^{\alpha'}_i x^i_j) + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'} (dy^\gamma y^{\gamma'}_\gamma + dx^p y^{\gamma'}_p)(y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_j + y^{\alpha'}_p x^p_j) = 0 \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} &X^{k'}_{ip} dX^p X^i_j + X^{k'}_k dX^k_j + \Gamma^{k'}_{i'p'} dX^p X^{p'}_p X^{i'}_i X^i_j + \\ &\quad + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{i'\gamma'} dy^\gamma y^{\gamma'}_\gamma x^{i'}_i x^i_j + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{i'\gamma'} dx^p y^{\gamma'}_p x^{i'}_i x^i_j + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha' p'} dx^p x^{p'}_p y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_j + \\ &\quad + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha' p'} dx^p x^{p'}_p y^{\alpha'}_i x^i_j + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'} dy^\gamma y^{\gamma'}_\gamma y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_j + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'} dx^p y^{\gamma'}_p y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_j + \\ &\quad + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'} dy^\gamma y^{\gamma'}_\gamma y^{\alpha'}_i x^i_j + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'} dx^p y^{\gamma'}_p y^{\alpha'}_i x^i_j = 0 \end{aligned}$$

Свертывая с $X^k_{k'}$ и переобозначая индексы, получаем

$$\begin{aligned} &dX^k_j + (X^{k'}_{ip} X^k_{k'} + \Gamma^{k'}_{i'p'} X^k_{k'} X^{p'}_p X^{i'}_i + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{i'\gamma'} X^k_{k'} y^{\gamma'}_p x^{i'}_i + \\ &\quad + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha' p'} X^k_{k'} x^{p'}_p y^{\alpha'}_i x^i_j dx^p + \varepsilon^2 \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'} X^k_{k'} y^{\gamma'}_p y^{\alpha'}_i) X^i_j dx^p + \\ &\quad + \varepsilon^2 (\Gamma^{k'}_{i'\gamma'} X^k_{k'} y^{\gamma'}_\gamma x^{i'}_i + + \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'} X^k_{k'} y^{\gamma'}_\gamma y^{\alpha'}_i) x^i_j dy^\gamma + \\ &\quad + \varepsilon^2 (\Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'} X^k_{k'} y^{\gamma'}_p y^{\alpha'}_\alpha + \Gamma^{k'}_{\alpha' p'} X^k_{k'} x^{p'}_p y^{\alpha'}_\alpha) y^\alpha_j dx^p + \\ &\quad + \varepsilon^2 (\Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'} X^k_{k'} y^{\gamma'}_\gamma y^{\alpha'}_\alpha) y^\alpha_j dy^\gamma = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим вторые уравнения системы (**??**)

$$dx^{k'}_{\beta} \ + \ \overset{0}{\Gamma}{}^{k'}_{i'p'}dx^{p'}x^{i'}_{\beta} \ + \ \Gamma^{k'}_{i'\gamma'}dy^{\gamma'}x^{i'}_{\beta} \ + \ \Gamma^{k'}_{\alpha'p'}dx^{p'}y^{\alpha'}_{\beta} \ + \ \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}dy^{\gamma'}y^{\alpha'}_{\beta} \quad = \quad 0.$$

Подставляем закон преобразования координат (**??**)

$$\begin{aligned}
&d(x^{k'}_{i}x^{i}_{\beta}) + \overset{0}{\Gamma}{}^{k'}_{i'p'}dx^{p}x^{p'}_{p}x^{i'}_{i}x^{i}_{\beta}+\\
&\qquad + \Gamma^{k'}_{i'\gamma'}dy^{\gamma}y^{\gamma'}_{\gamma}(x^{i'}_{i}x^{i}_{\beta} + x^{i'}_{\gamma}y^{\gamma}_{\beta}) + \Gamma^{k'}_{\alpha'p'}dx^{p}x^{p'}_{p}(y^{\alpha'}_{\alpha}y^{\alpha}_{\beta} + y^{\alpha'}_{p}x^{p}_{\beta})+\\
&\qquad\qquad + \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}(dy^{\gamma}y^{\gamma'}_{\gamma} + dx^{p}y^{\gamma'}_{p})(y^{\alpha'}_{\alpha}y^{\alpha}_{\beta} + y^{\alpha'}_{p}x^{p}_{\beta}) = 0.
\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
&dx^{k}_{\beta}+\\
&+x^{k'}_{ip}x^{k}_{k'}x^{i}_{\beta}dx^{p}+\overset{0}{\Gamma}{}^{k'}_{i'p'}x^{k}_{k'}x^{p'}_{p}x^{i'}_{i}x^{i}_{\beta}dx^{p}+\Gamma^{k'}_{i'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{\gamma}x^{i'}_{i}x^{i}_{\beta}dy^{\gamma}+\Gamma^{k'}_{i'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{p}x^{i'}_{i}x^{i}_{\beta}dx^{p}+\\
&\quad + \Gamma^{k'}_{\alpha'p'}x^{k}_{k'}x^{p'}_{p}y^{\alpha'}_{\alpha}y^{\alpha}_{\beta}dx^{p} + \Gamma^{k'}_{\alpha'p'}x^{k}_{k'}x^{p'}_{p}y^{\alpha'}_{i}x^{i}_{\beta}dx^{p} + \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{\gamma}y^{\alpha'}_{\alpha}y^{\alpha}_{\beta}dy^{\gamma}+\\
&\quad + \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{\gamma}y^{\alpha'}_{i}x^{i}_{\beta}dy^{\gamma} + \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{p}y^{\alpha'}_{\alpha}y^{\alpha}_{\beta}dx^{p} + \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{p}y^{\alpha'}_{i}x^{i}_{\beta}dx^{p} = 0.
\end{aligned}$$

Свертывая с $x^{k}_{k'}$ и переобозначая индексы, получаем

$$\begin{aligned}
&dx^{k}_{\beta} + (x^{k'}_{ip}x^{k}_{k'} + \overset{0}{\Gamma}{}^{k'}_{i'p'}x^{k}_{k'}x^{p'}_{p}x^{i'}_{i}+\\
&\qquad + \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{p}y^{\alpha'}_{i} + \Gamma^{k'}_{\alpha'p'}x^{k}_{k'}x^{p'}_{p}y^{\alpha'}_{i} + \Gamma^{k'}_{i'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{p}x^{i'}_{i})x^{i}_{\beta}dx^{p}+\\
&+(\Gamma^{k'}_{i'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{\gamma}x^{i'}_{i}+\Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{\gamma}y^{\alpha'}_{i})x^{i}_{\beta}dy^{\gamma}+(\Gamma^{k'}_{\alpha'p'}x^{k}_{k'}x^{p'}_{p}y^{\alpha'}_{\alpha}+\Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{p}y^{\alpha'}_{\alpha})y^{\alpha}_{\beta}dx^{p}+\\
&\qquad\qquad + (\Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}x^{k}_{k'}y^{\gamma'}_{\gamma}y^{\alpha'}_{\alpha})y^{\alpha}_{\beta}dy^{\gamma} = 0
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующие уравнения системы (**??**)

$$dy^{\sigma'}_{j} + \Gamma^{\sigma'}_{i'p'}dx^{p'}x^{i'}_{j} + \Gamma^{\sigma'}_{i'\gamma'}dy^{\gamma'}x^{i'}_{j} + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'}dx^{p'}y^{\alpha'}_{j} + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}dy^{\gamma'}y^{\alpha'}_{j} = 0$$

Подставляем (**??**), имеем

$$\begin{aligned}
&d(y^{\sigma'}_{\alpha}y^{\alpha}_{j} + y^{\sigma'}_{i}x^{i}_{j}) + \Gamma^{\sigma'}_{i'p'}dx^{p}x^{p'}_{p}x^{i'}_{i}x^{i}_{j}+\\
&\qquad + \Gamma^{\sigma'}_{i'\gamma'}(dy^{\gamma}y^{\gamma'}_{\gamma} + dx^{p}y^{\gamma'}_{p})x^{i'}_{i}x^{i}_{j} + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'}dx^{p}x^{p'}_{p}(y^{\alpha'}_{\alpha}y^{\alpha}_{j} + y^{\alpha'}_{i}x^{i}_{j})+\\
&\qquad\qquad + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}(y^{\alpha'}_{\alpha}y^{\alpha}_{j} + y^{\alpha'}_{i}x^{i}_{j})(dy^{\gamma}y^{\gamma'}_{\gamma} + dx^{p}y^{\gamma'}_{p}) = 0
\end{aligned}$$

Откуда

$$dy^\sigma_j + y^{\sigma'}_k y^\sigma_{\sigma'} \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} x^i_j dx^p + y^{\sigma'}_{\sigma p} y^\sigma_{\sigma'} y^\sigma_j dx^p + y^{\sigma'}_{\sigma\gamma} y^\sigma_{\sigma'} y^\sigma_j dy^\gamma +$$
$$+ y^{\sigma'}_{ip} y^\sigma_{\sigma'} x^i_j dx^p + y^{\sigma'}_{i\gamma} y^\sigma_{\sigma'} x^i_j dy^\gamma +$$
$$+ \Gamma^{\sigma'}_{i'p'} y^\sigma_{\sigma'} x^{p'}_p x^{i'}_i x^i_j dx^p + \Gamma^{\sigma'}_{i'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\gamma'}_\gamma x^{i'}_i x^i_j dy^\gamma +$$
$$+ \Gamma^{\sigma'}_{i'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\gamma'}_p x^{i'}_i x^i_j dx^p + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'} y^\sigma_{\sigma'} x^{p'}_p y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_j dx^p + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'} y^\sigma_{\sigma'} x^{p'}_p y^{\alpha'}_i x^i_j dx^p +$$
$$+ \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\alpha'}_\alpha y^{\gamma'}_\gamma y^\alpha_j dy^\gamma + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\alpha'}_i y^{\gamma'}_\gamma x^i_j dy^\gamma + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\alpha'}_\alpha y^{\gamma'}_p y^\alpha_j dx^p +$$
$$+ \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\alpha'}_i y^{\gamma'}_p x^i_j dx^p = 0.$$

Свертывая с $y^\sigma_{\sigma'}$ и переобозначая индексы, получаем

$$dy^\sigma_j + (y^{\sigma'}_{ip} y^\sigma_{\sigma'} + y^{\sigma'}_k y^\sigma_{\sigma'} \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} + \Gamma^{\sigma'}_{i'p'} y^\sigma_{\sigma'} x^{p'}_p x^{i'}_i +$$
$$+ \Gamma^{\sigma'}_{i'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\gamma'}_p x^{i'}_i + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'} y^\sigma_{\sigma'} x^{p'}_p y^{\alpha'}_i + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\alpha'}_i y^{\gamma'}_p) x^i_j dx^p +$$
$$+ (y^{\sigma'}_{i\gamma} y^\sigma_{\sigma'} + \Gamma^{\sigma'}_{i'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\gamma'}_\gamma x^{i'}_i + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\alpha'}_i y^{\gamma'}_\gamma) x^i_j dy^\gamma +$$
$$+ (y^{\sigma'}_{\sigma p} y^\sigma_{\sigma'} + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'} y^\sigma_{\sigma'} x^{p'}_p y^{\alpha'}_\alpha + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\alpha'}_\alpha y^{\gamma'}_p) y^\sigma_j dx^p +$$
$$+ (y^{\sigma'}_{\sigma\gamma} y^\sigma_{\sigma'} + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\alpha'}_\alpha y^{\gamma'}_\gamma) y^\alpha_j dy^\gamma = 0.$$

Рассмотрим последние уравнения системы (**??**)

$$dy^{\sigma'}_\beta + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'} dx^{p'} y^{\alpha'}_\beta + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} dy^{\gamma'} y^{\alpha'}_\beta = 0.$$

Подставим преобразования координат (**??**)

$$d(y^\sigma_{\sigma'} y^{\sigma'}_\beta) + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'} dx^p x^{p'}_p y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_\beta + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} (dy^\gamma y^{\gamma'}_\gamma + dx^p y^{\gamma'}_p) y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_\beta + = 0.$$

Откуда

$$y^{\sigma'}_{\alpha k} y^\alpha_\beta dx^k + y^{\sigma'}_{\alpha\gamma} y^\alpha_\beta dy^\gamma + y^{\sigma'}_\sigma dy^\sigma_\beta +$$
$$+ \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'} dx^p x^{p'}_p y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_\beta + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} dy^\gamma y^{\gamma'}_\gamma y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_\beta +$$
$$+ \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} dx^p y^{\gamma'}_p y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_\beta = 0.$$

Свертывая с $y^\sigma_{\sigma'}$ и переобозначая индексы, получаем

$$dy^\sigma_\beta + (y^{\sigma'}_i y^\sigma_{\sigma'}) dx^i_\beta +$$
$$+ (y^{\sigma'}_{\alpha p} y^\sigma_{\sigma'} + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\gamma'}_p y^{\alpha'}_\alpha + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'} y^\sigma_{\sigma'} x^{p'}_p y^{\alpha'}_\alpha) y^\alpha_\beta dx^p +$$
$$+ (y^{\sigma'}_{\alpha\gamma} y^\sigma_{\sigma'} + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'} y^\sigma_{\sigma'} y^{\gamma'}_\gamma y^{\alpha'}_\alpha) y^\alpha_\beta dy^\gamma = 0.$$

Сопоставляя (**??**) с полученными соотношениями, имеем следующее предложение.

Предложение 11. *Коэффициенты связности в расслоении $\mathbb{D}^2$-линейных реперов $P^1(\mathbb{D}^2)T^2_{tr}M$, соответствующие двум разным слоеным картам (U,h) и (U',h') на (M,F), на пересечении областей определения $U\cap U'$ преобразуются следующим образом:*

$$\Gamma^k_{ip} = X^{k'}_{ip}X^k_{k'} + \Gamma^{k'}_{i'p'}X^k_{k'}X^{p'}_p X^{i'}_i + \varepsilon^2\Gamma^{k'}_{i'\gamma'}X^k_{k'}y^{\gamma'}_p x^{i'}_i + \\ + \varepsilon^2\Gamma^{k'}_{\alpha'p'}X^k_{k'}x^{p'}_p y^{\alpha'}_i x^i_j dx^p + \varepsilon^2\Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}X^k_{k'}y^{\gamma'}_p, y^{\alpha'}_i, \quad (89)$$

$$\Gamma^k_{i\gamma} = \Gamma^{k'}_{i'\gamma'}x^k_{k'}y^{\gamma'}_\gamma x^{i'}_i + \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}x^k_{k'}y^{\gamma'}_\gamma y^{\alpha'}_i, \quad (90)$$

$$\Gamma^k_{\alpha p} = \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}x^k_{k'}y^{\gamma'}_p y^{\alpha'}_\alpha + \Gamma^{k'}_{\alpha'p'}x^k_{k'}x^{p'}_p y^{\alpha'}_\alpha, \quad (91)$$

$$\Gamma^k_{\alpha\gamma} = \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}x^k_{k'}y^{\gamma'}_\gamma y^{\alpha'}_\alpha, \quad (92)$$

$$\Gamma^\sigma_{ip} = y^{\sigma'}_{ip}y^\sigma_{\sigma'} + \overset{0}{\Gamma}{}^{k'}_{i'p'}y^\sigma_{k'}x^{i'}_i x^{p'}_p + \Gamma^{k'}_{i'\beta'}y^\sigma_{k'}y^{\beta'}_k x^{i'}_i + \Gamma^{\sigma'}_{i'p'}y^\sigma_{\sigma'}x^{p'}_p x^{i'}_i + \\ + \Gamma^{\sigma'}_{i'\gamma'}y^\sigma_{\sigma'}y^{\gamma'}_p x^{i'}_i + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'}y^\sigma_{\sigma'}x^{p'}_p y^{\alpha'}_i + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}y^\sigma_{\sigma'}y^{\alpha'}_i y^{\gamma'}_p, \quad (93)$$

$$\Gamma^\sigma_{i\gamma} = y^{\sigma'}_{i\gamma}y^\sigma_{\sigma'} + \Gamma^{\sigma'}_{i'\gamma'}y^\sigma_{\sigma'}y^{\gamma'}_\gamma x^{i'}_i + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}y^\sigma_{\sigma'}y^{\alpha'}_i y^{\gamma'}_\gamma, \quad (94)$$

$$\Gamma^\sigma_{\alpha p} = y^{\sigma'}_{\sigma p}y^\sigma_{\sigma'} + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'}y^\sigma_{\sigma'}x^{p'}_p y^{\alpha'}_\alpha + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}y^\sigma_{\sigma'}y^{\alpha'}_\alpha y^{\gamma'}_p, \quad (95)$$

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} = y^{\sigma'}_{\sigma\gamma}y^\sigma_{\sigma'} + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}y^\sigma_{\sigma'}y^{\alpha'}_\alpha y^{\gamma'}_\gamma. \quad (96)$$

Из формул (**??**)–(**??**) следует, что обращение в нуль коэффициентов $\Gamma^k_{i\gamma}$, $\Gamma^k_{\gamma i}$ и $\Gamma^k_{\alpha\gamma}$ носит инвариантный характер и выделяет специальный класс связностей. К этому классу принадлежат $\mathbb{D}^2$-продолжения проектируемых связностей в расслоении $P^1_{fol}M$, которые определяются коэффициентами следующего вида:

$$\Gamma^k_{ip} = \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip}X^j + \varepsilon\dot{x}^l\partial_l\overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\dot{x}^l\dot{x}^s\partial_{ls}\overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} + \ddot{x}^l\partial_l\overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip}\right), \quad (97)$$

$$\Gamma^\sigma_{ip} = \Gamma^\sigma_{ip}(x^j,y^\eta),\ \Gamma^\sigma_{i\gamma} = \Gamma^\sigma_{i\gamma}(x^j,y^\eta),\ \Gamma^\sigma_{\alpha p} = \Gamma^\sigma_{\alpha p}(x^j,y^\eta),\ \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} = \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}(x^j,y^\eta),$$

где $\overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} = \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip}(x^j)$, $\Gamma^\sigma_{ip} = \Gamma^\sigma_{ip}(x^j,y^\eta)$, $\Gamma^\sigma_{i\gamma} = \Gamma^\sigma_{i\gamma}(x^j,y^\eta)$, $\Gamma^\sigma_{\alpha p} = \Gamma^\sigma_{\alpha p}(x^j,y^\eta)$, $\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} = \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}(x^j,y^\eta)$ — коэффициенты проектируемой линейной связности Γ, заданной на многообразии M.

12 Соответствия между $\mathbb{D}^2$-гладкими линейными связностями на $T^2_{tr}M$ при автоморфизмах $T^2_{tr}M$ с тождественным отображением F^1

Формулы (**??**), (**??**)-(**??**) могут рассматриваться как функции склейки некоторого локально тривиального расслоения $LT^2_{tr}M$ над $T^2_{tr}M$, если коэффициенты связности рассматривать как элементы из некоторого пространства $(\mathbb{D}^2)^M \oplus \mathbb{R}^N$, образующего стандартный слой этого расслоения (числа M и N легко вычисляются). Тотальное пространство этого расслоения $LT^2_{tr}M$ несет на себе структуру $\mathbb{D}^2$-гладкого многообразия, моделируемого $\mathbb{D}^2$-модулем $(\mathbb{D}^2)^M \oplus \mathbb{R}^N$.

Определение 7. *$\mathbb{D}^2$-линейная связность Γ на $T^2_{tr}M$ называется $\mathbb{D}^2$-гладкой, если сечение $\Gamma : T^2_{tr}M \to LT^2_{tr}M$ является $\mathbb{D}^2$-гладким отображением.*

$\mathbb{D}^2$-гладкой связностью является $\mathbb{D}^2$-продолжение (**??**) проектируемой связности.

Коэффициенты произвольной $\mathbb{D}^2$-гладкой $\mathbb{D}^2$-линейной связности на трансверсальном расслоении второго порядка $T^2_{tr}M$ задаются уравнениями вида:

$$\Gamma^k_{ip} = \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} X^j + \varepsilon(\dot{x}^l \partial_l \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} + G^k_{ip}(x^j) +$$
$$\varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^s \partial_{ls} \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} + \ddot{x}^l \partial_l \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} + \dot{x}^l \partial_l G^k_{ip} + H^k_{ip}(x^j, y^\eta) \right),$$
$$\Gamma^\sigma_{ip} = \Gamma^\sigma_{ip}(x^j, y^\eta), \quad \Gamma^\sigma_{i\gamma} = \Gamma^\sigma_{i\gamma}(x^j, y^\eta),$$
$$\Gamma^\sigma_{\alpha p} = \Gamma^\sigma_{\alpha p}(x^j, y^\eta), \quad \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} = \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}(x^j, y^\eta). \quad (98)$$

Предложение 12. *Пусть на трансверсальном расслоении второго порядка $T^2_{tr}M$ задана $\mathbb{D}^2$-гладкая $\mathbb{D}^2$-линейная связность Γ с коэффициентами (**??**). Тогда функции $\Gamma^k_{ip}(x^j)$, $\Gamma^\sigma_{ip}(x^j, y^\eta)$, $\Gamma^\sigma_{i\gamma}(x^j, y^\eta)$, $\Gamma^\sigma_{\alpha p}(x^j, y^\eta)$, $\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}(x^j, y^\eta)$, являются коэффициентами некоторой линейной связности Γ на M, а функции $G^k_{ip}(x^j)$, задают некоторые тензорные поля G типа $(1, 2)$ на многообразии M.*

Доказательство: Для доказательства предложения **??** достаточно подставить (**??**) и (**??**) в формулы преобразования коэффициентов $\mathbb{D}^2$-линейной связности (**??**)–(**??**) и сравнить вещественные части выражений в левой и правой частях полученных равенств.

Пусть на трансверсальном расслоении второго порядка $T^2_{tr}M$ задана произвольная $\mathbb{D}^2$-линейная связность Γ с коэффициентами (**??**). Рассмотрим преобразование этой связности при автоморфизме $T^2_{tr}M$ вида (**??**). Имеем:

$$
\begin{aligned}
{}'\Gamma^k_{ip} = {} & \left(-\varepsilon^2\frac{\partial^2 h^{k'}}{\partial x^i \partial x^p}\right)\left(\delta^k_{k'} + \varepsilon^2\frac{\partial h^k}{\partial x^{k'}}\right) + \\
& + \Gamma^{k'}_{i'p'}\left(\delta^k_{k'} + \varepsilon^2\frac{\partial h^k}{\partial x^{k'}}\right)\left(\delta^{p'}_p + \varepsilon^2\frac{\partial h^{p'}}{\partial x^p}\right)\left(\delta^{i'}_i + \varepsilon^2\frac{\partial h^{i'}}{\partial x^{i'}}\right) + \\
& + \varepsilon^2\Gamma^{k'}_{i'\gamma'}\left(\delta^k_{k'} + \varepsilon^2\frac{\partial h^k}{\partial x^{k'}}\right)\delta^{\gamma'}_p\delta^{i'}_i + \varepsilon^2\Gamma^{k'}_{\alpha'p'}\left(\delta^k_{k'} + \varepsilon^2\frac{\partial h^k}{\partial x^{k'}}\right)\delta^{p'}_p\delta^{\alpha'}_i + \\
& + \varepsilon^2\Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}\left(\delta^k_{k'} + \varepsilon^2\frac{\partial h^k}{\partial x^{k'}}\right)\delta^{\gamma'}_p\delta^{\alpha'}_i,
\end{aligned}
$$

$$
{}'\Gamma^k_{i\gamma} = \Gamma^{k'}_{i'\gamma'}\delta^k_{k'}\delta^{\gamma'}_\gamma\delta^{i'}_i + \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}\delta^k_{k'}\delta^{\gamma'}_\gamma\delta^{\alpha'}_i, \quad {}'\Gamma^k_{\alpha p} = \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}\delta^k_{k'}\delta^{\gamma'}_p\delta^{\alpha'}_\alpha + \Gamma^{k'}_{\alpha'p'}\delta^k_{k'}\delta^{p'}_p\delta^{\alpha'}_\alpha,
$$

$$
{}'\Gamma^k_{\alpha\gamma} = \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}\delta^k_{k'}\delta^{\gamma'}_\gamma\delta^{\alpha'}_\alpha, \qquad {}'\Gamma^\sigma_{i\gamma} = \Gamma^{\sigma'}_{i'\gamma'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{\gamma'}_\gamma\delta^{i'}_i + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{\alpha'}_i\delta^{\gamma'}_\gamma,
$$

$$
\begin{aligned}
{}'\Gamma^\sigma_{ip} = {} & \delta^{\sigma'}_k\delta^\sigma_{\sigma'}\overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} + \Gamma^{\sigma'}_{i'p'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{p'}_p\delta^{i'}_i + \\
& + \Gamma^{\sigma'}_{i'\gamma'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{\gamma'}_p\delta^{i'}_i + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{p'}_p\delta^{\alpha'}_i + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{\alpha'}_i\delta^{\gamma'}_p,
\end{aligned}
$$

$$
{}'\Gamma^\sigma_{\alpha p} = \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{p'}_p\delta^{\alpha'}_\alpha + \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{\alpha'}_\alpha\delta^{\gamma'}_p, \quad {}'\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} = \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{\alpha'}_\alpha\delta^{\gamma'}_\gamma.
$$

После преобразований уравнения принимают вид:

$$
\begin{aligned}
{}'\Gamma^k_{ip} = {} & \left(-\varepsilon^2\frac{\partial^2 h^{i'}}{\partial x^i \partial x^p}\right)\left(\delta^k_{k'} + \varepsilon^2\frac{\partial h^k}{\partial x^k}\right) + \\
& + \Gamma^{k'}_{i'p'}\left(\delta^k_{k'} + \varepsilon^2\frac{\partial h^k}{\partial x^k}\right)\left(\delta^{p'}_p + \varepsilon^2\frac{\partial h^{p'}}{\partial x^p}\right)\left(\delta^{i'}_i + \varepsilon^2\frac{\partial h^{i'}}{\partial x^i}\right), \\
{}'\Gamma^k_{i\gamma} = \Gamma^{k'}_{i'\gamma'}\delta^k_{k'}\delta^{\gamma'}_\gamma\delta^{i'}_i, \quad & {}'\Gamma^k_{\alpha p} = \Gamma^{k'}_{\alpha'p'}\delta^k_{k'}\delta^{p'}_p\delta^{\alpha'}_\alpha, \quad {}'\Gamma^k_{\alpha\gamma} = \Gamma^{k'}_{\alpha'\gamma'}\delta^k_{k'}\delta^{\gamma'}_\gamma\delta^{\alpha'}_\alpha, \\
{}'\Gamma^\sigma_{ip} = \Gamma^{\sigma'}_{i'p'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{p'}_p\delta^{i'}_i, \quad & {}'\Gamma^\sigma_{i\gamma} = \Gamma^{\sigma'}_{i'\gamma'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{\gamma'}_\gamma\delta^{i'}_i, \quad {}'\Gamma^\sigma_{\alpha p} = \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'p'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{p'}_p\delta^{\alpha'}_\alpha, \\
& {}'\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} = \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}\delta^\sigma_{\sigma'}\delta^{\alpha'}_\alpha\delta^{\gamma'}_\gamma
\end{aligned}
\tag{99}
$$

Определение 8. *Будем называть две связности Γ и ${}'\Gamma$ на трансверсальном расслоении второго порядка $T^2_{tr}M$ эквивалентными, если одна из них может быть переведена в другую автоморфизмом $T^2_{tr}M$ вида (**??**).*

Аналогично случаю векторных полей на $T^2_{tr}M$, вышеуказанное определения вводит класс эквивалентности на множестве $\mathbb{D}^2$-линейных связностей на $T^2_{tr}M$.

Если связность Γ в уравнениях (**??**) является $\mathbb{D}^2$-гладкой и, следовательно, имеет вид (**??**), то связность $'\Gamma$ также является $\mathbb{D}^2$-гладкой имеет вид:

$$\Gamma^k_{ip} = \Gamma^i_{jk} + \varepsilon^2 \left(\Gamma^{k'}_{ip} \frac{\partial h^k}{\partial x^{k'}} - \Gamma^k_{ip'} \frac{\partial h^{p'}}{\partial x^p} - \Gamma^k_{i'p} \frac{\partial h^{i'}}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 h^k}{\partial x^i \partial x^p} \right) +$$
$$+ \varepsilon^2 \left(\dot{x}^l \partial_l \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} + G^k_{ip}(x^j) \right) +$$
$$+ \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^s \partial_{ls} \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} + \ddot{x}^l \partial_l \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} + h^l \partial_l \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} + \dot{x}^l \partial_l G^k_{ip} + H^k_{ip}(x^j, y^\eta) \right),$$
$$\Gamma^\sigma_{ip} = \Gamma^\sigma_{ip}, \quad \Gamma^\sigma_{i\gamma} = \Gamma^\sigma_{i\gamma}, \quad \Gamma^\sigma_{\alpha p} = \Gamma^\sigma_{\alpha p}, \quad \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} = \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}. \quad (100)$$

Уравнения (**??**) задают коэффициенты линейной связности $'\Gamma$ в точке $'X = F^2(X)$ как функции координат X^i, y^α точки X. Для получения выражений коэффициентов связности $'\Gamma$ в точке $'X$ как функций координат $'X^i$, $'y^\alpha$, подставим в (**??**) формулы (**??**). Поскольку $'X$ — это произвольная точка многообразия $T^2_{tr}M$, то штрихи у координат точек в окончательной записи результата убираем. В результате получаем следующее соответствие между компонентами $'G^k_{ip}(x^k)$ и $G^i_{ip}(x^k)$, а также между компонентами $'H^i_{ip}(x^k, y^\beta)$ и $H^i_{ip}(x^k, y^\beta)$:

$$'H^i_{ip} = H^i_{ip} + \varepsilon^2 \left(\Gamma^{k'}_{ip} \frac{\partial h^k}{\partial x^{k'}} + h^l \partial_l \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} - \Gamma^k_{ip'} \frac{\partial h^{p'}}{\partial x^p} - \Gamma^k_{i'p} \frac{\partial h^{i'}}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 h^k}{\partial x^i \partial x^p} \right), \quad (101)$$
$$'G^k_{ip}(x^k) = G^i_{ip}(x^k).$$

Вычисления подведенные выше показывают, что две $\mathbb{D}^2$-гладкие линейные связности $'\Gamma$ и Γ на расслоении $T^2_{tr}M$ эквивалентны тогда и только тогда, когда тензор деформации [**?**] $'\Gamma - \Gamma = T$ имеет следующий вид:

$$T^k_{ip} = \varepsilon^2 \left(h^l \partial_l \Gamma^k_{ip} + \Gamma^{k'}_{ip} \frac{\partial h^k}{\partial x^{k'}} - \Gamma^k_{ip'} \frac{\partial h^{p'}}{\partial x^p} - \Gamma^k_{i'p} \frac{\partial h^{i'}}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 h^k}{\partial x^i \partial x^p} \right), \quad (102)$$
$$T^k_{i\gamma} = 0, \ T^k_{\alpha p} = 0, \ T^k_{\alpha\gamma} = 0, \ T^\sigma_{ip} = 0, \ T^\sigma_{i\gamma} = 0, \ T^\sigma_{\alpha p} = 0, \ T^\sigma_{\alpha\gamma} = 0.$$

Формулами (**??**) определяется производная Ли $\mathbb{D}^2$-гладкой линейной связности Γ в направлении векторного поля v с координатами $\{v^i = 0, v^\alpha = 0, \dot{v}^i = 0, \ddot{v}^i = h^i\}$, то есть принимающего значения в $V^2_1 T T^2_{tr} M$.

Таким образом, имеют место следующие предложения.

Предложение 13. *Две $\mathbb{D}^2$-гладкие связности $'\Gamma$ и Γ на расслоении $T^2_{tr}M$ эквивалентны тогда и только тогда, когда тензор деформации является производной Ли $\mathcal{L}_u\Gamma$ в направлении некоторого вертикального векторного поля v, то есть векторного поля, значения которого принадлежат $V^2_1TT^2_{tr}M$.*

Предложение 14. *$\mathbb{D}^2$-гладкая связность Γ на расслоении $T^2_{tr}M$ эквивалентна $\mathbb{D}^2$-продолжению некоторой проектируемой связности, заданной на M тогда и только тогда, когда*

$$G^k_{ip}(x^k) = 0,$$

$$H^i_{ip} = \overset{0}{\Gamma}{}^q_{ip}\frac{\partial h^k}{\partial x^q} + h^l\partial_l\overset{0}{\Gamma}{}^k_{ip} - \overset{0}{\Gamma}{}^k_{iq}\frac{\partial h^q}{\partial x^p} - \overset{0}{\Gamma}{}^k_{qp}\frac{\partial h^q}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 h^k}{\partial x^i\partial x^p}.$$

Список литературы

[1] Атанасиу Г., Балан В., Брынзей Н., Рахула М., *Дифференциальная геометрия второго порядка и приложения: Теория Мирона-Атанасиу*, Либроком, М., 2010.

[2] Вишневский В.В. *Многообразия над плюральными числами и полукасательные структуры.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ), т. 20. М. 1988, с. 35–75.

[3] Вишневский В.В. *Интегрируемые аффинные структуры и их плюральные интерпретации.* Современная математика и ее приложения (Итоги науки и техники ВИНИТИ), т. 73. М. 2002, с. 5–64.

[4] Гайнуллин Ф.Р., Шурыгин В.В. *Голоморфные тензорные поля и линейные связности на касательном расслоении второго порядка.* Ученые записки Казанского Государственного Университета. Казань. 2009. 36–50 с.

[5] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии* Т.1 М.:Наука, 1981.

[6] Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* М.:Наука, 1976.

[7] Смолякова Л.Б., Шурыгин В.В., *Лифты геометрических объектов на расслоении Вейля $T^{\mu}M$ слоеного многообразия, определяемое эпиморфизмом μ алгебр Вейля*, Изв. вузов. Математика, 2007, №10, 76–89.

[8] Фомин В.Е., Шурыгин В.В., *Очерк научной и педагогической деятельности Ф. П. Широкова*, Ученые записки Казанск. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 150, №1, 2008, 130–152

[9] Широков А.П., *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами*, Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем., 12, 1981, 61–95

[10] Шурыгин В.В. *Многообразия над алгебрами и расслоения Вейля.* Казанский университет. Казань. 2002. 80 с.

[11] Molino P. *Riemannian foliations.* — Birkhäuser, 1988.— 339 p.