И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 9 (460)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.7

С.Г. ЛЕЙКО, А.В. ВИННИК

ПОВОРОТНО-КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В двумерном римановом пространстве (M^2, g) гауссовой кривизны $K \neq 0$ кривые, геодезическая кривизна которых удовлетворяет условию $k_g = cK$, $c = \mathrm{const}$, являются изопериметрическими экстремалями поворота (ИЭП). Преобразования пространства или его части, переводящие геодезические кривые в ИЭП, названы поворотными. Аналогично, если локальное инфинитезимальное преобразование $\widetilde{x}^h = x^h + \varepsilon X^h(x)$ переводит каждую геодезическую в кривую, которая в главном (относительно параметра ε) является ИЭП, то оно называется инфинитезимальным поворотным преобразованием [1]–[3]. Геодезические преобразования являются тривиальными поворотными преобразованиями.

Пусть векторное поле X определяет инфинитезимальное конформное преобразование, т. е.

$$L_X g_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 2\varphi g_{ij}. \tag{1}$$

Это преобразование будет поворотным только в случае, когда соответствующая функция конформности $\varphi(x)$ порождает специальное конциркулярное ковекторное поле $\varphi_i = \partial_i \varphi$:

$$\nabla_j \varphi_i = \varphi_i \partial_j \ln|K| + (C - \varphi) K g_{ij}, \quad C \text{ — const}. \tag{2}$$

При $\varphi = C$ преобразование будет гомотетическим и, следовательно, геодезическим (т. е. тривиальным поворотным преобразованием). Если φ отлична от константы, пространство (M^2, g) является локально изометричным поверхности вращения $x = r\cos v$, $y = r\sin v$, $z = f(r)$,

$$(g_{ij}) = \mathrm{diag}\left(1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2,\ r^2\right).$$

Интегрирование (1), (2) на поверхности вращения дает

$$C = 0, \quad \varphi = \frac{c_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2}}, \quad X^h = \left(\frac{c_1 r}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2}},\ c_2\right), \quad c_1,\, c_2 \text{ — константы.}$$

В частности, на псевдосфере радиуса R, где локально реализуется плоскость Лобачевского $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$,

$$\frac{df}{dr} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}, \quad X^h = \left(\frac{c_1 r^2}{R},\ c_2\right), \quad K = -\frac{1}{R^2}.$$

Векторные поля $\underset{1}{X}^h = (\frac{r^2}{R}, 0)$, $\underset{2}{X}^h = (0, 1)$ являются базисом операторов двучленной группы локальных преобразований псевдосферы: $\widetilde{v} = v + \tau$, $\widetilde{r} = \frac{Rr}{R - rt}$. Эти преобразования будут поворотными. Действительно, как было показано в [1], функция конформности $e^{\psi(\widetilde{r})} : dl^2 = e^{2\psi(\widetilde{r})} d\widetilde{l}^2$

в общих по отображению координатах $\widetilde{r}$, $\widetilde{v}$ должна иметь вид

$$e^{\psi(\widetilde{r})} = -\frac{\sqrt{1+\left(\frac{df}{d\widetilde{r}}\right)^2}}{A\left(B+\sqrt{1+\left(\frac{df}{d\widetilde{r}}\right)^2}\right)}, \quad A\neq 0, \quad B \text{ — const}, \quad \text{или} \quad e^{\psi(\widetilde{r})} = B\sqrt{1+\left(\frac{df}{d\widetilde{r}}\right)^2}, \quad B \text{ — const}.$$

Непосредственная проверка показывает, что здесь имеет место первый случай при $A=-1$, $B=t$.

Аналогично, интегрирование уравнений (1), (2) в полуплоскости Пуанкаре: $x^1{=}x$, $x^2{=}y{>}0$, $g_{ij}=\frac{1}{y^2}\delta_{ij}$, дает $C=0$,

$$\varphi = \frac{1}{y}\left[\frac{a_0}{2}x^2 + a_1x + c_1\right] + \frac{a_0}{2}y,$$
$$X^h = \left(y(a_0x+a_1) + \frac{k}{2}(x^2-y^2) + k_1x + k_0,\ y\left(\frac{a_0}{2}y + kx + k_1\right) - \frac{a_0}{2}x^2 - a_1x - c_1\right),$$
$$a_0,\ a_1,\ k_0,\ k_1,\ k,\ c_1 \text{ — константы.}$$

Векторные поля

$$\underset{1}{X} = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{y^2-x^2}{2}\end{pmatrix}, \quad \underset{2}{X} = \begin{pmatrix} y \\ -x\end{pmatrix}, \quad \underset{3}{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1\end{pmatrix},$$
$$\underset{4}{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}, \qquad \underset{5}{X} = \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}, \qquad \underset{6}{X} = \begin{pmatrix} \frac{x^2-y^2}{2} \\ xy\end{pmatrix}$$

являются базисом операторов группы поворотно-конформных преобразований плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре. Как известно ([4], с. 33), группа конформных преобразований Мебиуса $\widetilde{z} = \frac{az+b}{cz+d}$, $z = x+iy$, где a, b, c, d — комплексные постоянные, имеет следующие базисные операторы:

$$\underset{1}{I} = \begin{pmatrix} \frac{1-x^2+y^2}{2} \\ -xy\end{pmatrix}, \quad \underset{2}{I} = \begin{pmatrix} \frac{-1-x^2+y^2}{2} \\ -xy\end{pmatrix}, \quad \underset{3}{I} = \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix},$$
$$\underset{4}{I} = \begin{pmatrix} -xy \\ \frac{1+x^2-y^2}{2}\end{pmatrix}, \quad \underset{5}{I} = \begin{pmatrix} -xy \\ \frac{-1+x^2-y^2}{2}\end{pmatrix}, \quad \underset{6}{I} = \begin{pmatrix} y \\ -x\end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\underset{1}{X} = -\frac{1}{2}(\underset{4}{I}+\underset{5}{I}), \quad \underset{2}{X} = \underset{6}{I}, \quad \underset{3}{X} = \underset{5}{I} - \underset{4}{I},$$
$$\underset{4}{X} = \underset{1}{I} - \underset{2}{I}, \qquad \underset{5}{X} = \underset{3}{I}, \quad \underset{6}{X} = -\frac{1}{2}(\underset{1}{I}+\underset{2}{I}).$$

Таким образом, операторы $\underset{1}{X}$, $\underset{2}{X}$, $\underset{3}{X}$, $\underset{4}{X}$, $\underset{5}{X}$, $\underset{6}{X}$ также образуют базис указанной группы конформных преобразований Мебиуса в плоскости Лобачевского. Отсюда вытекает

Теорема. *Группа поворотно-конформных преобразований плоскости Лобачевского совпадает с группой конформных преобразований Мебиуса этой плоскости.*

Отметим, что операторы $\underset{4}{X}$, $\underset{5}{X}$, $\underset{6}{X}$ определяют движение в плоскости Лобачевского (случай вещественных параметров a, b, c, d). Оставшиеся операторы $\underset{1}{X}$, $\underset{2}{X}$, $\underset{3}{X}$ выделяют группу нетривиальных поворотно-конформных преобразований.

Литература

1. Лейко С.Г. *Поворотные диффеоморфизмы на поверхностях евклидового пространства* // Матем. заметки. – 1990. – № 3. – С. 52–57.
2. Лейко С.Г. *Инфинитезимальные поворотные преобразования и деформации поверхностей евклидового пространства* // Докл. РАН. – 1995. – Т. 344. – № 2. – С. 162–164.
3. Лейко С.Г. *Поворотные преобразования поверхностей* // Матем. физика, анализ, геометрия. – 1998. – Т.5. – № 3/4. – С. 203–211.
4. Широков А.П. *Неевклидовы пространства.* Учеб. пособие. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1997. – 49 с.
5. Букреев Б.Я. *Планиметрия Лобачевского в аналитическом изложении.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. – 127 с.

Одесский государственный университет

Поступили
первый вариант 10.03.1999
окончательный вариант 07.02.2000