ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 3 (442)

УДК 517.91

И.В. ШИРОКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ТРАНЗИТИВНУЮ ГРУППУ СИММЕТРИИ

1. Основные определения

В данной работе рассмотрены системы дифференциальных уравнений, допускающие определенную группу симметрии. Хорошо известно (см., напр., [1]), что система n дифференциальных уравнений на n-мерном многообразии интегрируема в квадратурах, если она допускает n-мерную разрешимую группу симметрии, транзитивно действующую на этом многообразии. Основной результат данной статьи заключается в следующем: существует класс динамических систем, которые, с одной стороны, не интегрируются в квадратурах, но с другой стороны, наличие у них определенной группы симметрии позволяет исследовать устойчивость их решений (традиционное же использование разрешимых подалгебр симметрии для понижения размерности этих систем ведет к потере информации об устойчивости). К такому классу систем дифференциальных уравнений относятся уравнения интегральных траекторий неавтономных правоинвариантных векторных полей на компактных группах Ли.

Пусть M — дифференцируемое класса C^∞ n-мерное риманово многообразие с метрикой g_{ij}, $d(p,q)$ — расстояние между двумя точками $p,q \in M$ (длина кратчайшей кривой, соединяющей эти точки), набор карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ составляет атлас на M, $x_\alpha(p)$ — локальные координаты точки p в карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Если не важно, о какой карте идет речь, индекс α у координат будем опускать и писать просто $x(p)$. В евклидовом пространстве выберем норму $\|x\|_\infty = \max\limits_i\{|x^i|\}$.

Пусть на многообразии M действует локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов $h_t : M \to M$; $t \geq t_0$; $h_{t_0} = \mathrm{id}$. Для этой локальной группы диффеоморфизмов существует векторное поле $v^{(t)}(q) \in T_qM$, которое в общем случае может зависеть от параметра t,

$$\frac{dh_t(q)}{dt} = v^{(t)}(h_t(q)), \quad h_{t_0}(q) = q. \tag{1.1}$$

Решение уравнения (1.1) будем также обозначать через $q_t \equiv h_t(q)$. В локальных координатах уравнение (1.1) имеет вид

$$\frac{dx_t^i}{dt} = v^i(t, x_t), \quad x_t^i|_{t=t_0} = x^i(q).$$

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим соответствующую систему уравнений в вариациях

$$\frac{dw_t}{dt} = v_*^{(t)}(q_t)w_t, \quad w_t|_{t=t_0} = w_0. \tag{1.2}$$

Здесь $v_*^{(t)}(q_t) : T_{q_t}M \to T_{q_t}M$, $w_t \in T_{q_t}M$. В локальных координатах (x,y) касательного расслоения TM уравнение (1.2) имеет вид

$$\frac{dy_t^i}{dt} = \frac{\partial v^i(t,x_t)}{\partial x_t^j} y_t^j, \quad y_t^j|_{t=t_0} = y^j(w_0).$$

При фиксированном решении q_t системы (1.1) вектору $w_0 \in T_q M$ можно сопоставить вещественное число — показатель экспоненциального роста (показатель Ляпунова) $\chi(w_0) \equiv \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|w_t\|$, где w_t — решение линейной задачи (1.2), $\|w_t\| \equiv \sqrt{(w_t, w_t)}$ — норма вектора $w_t \in T_{q_t} M$.

Поскольку любые два решения уравнения (1.2), которые имеют различные показатели, линейно независимы, то каждой траектории q_t сопоставляется не более n различных показателей экспоненциального роста χ. Наиболее важную роль в теории устойчивости играет максимальный показатель (старший показатель) $\lambda \equiv \sup\limits_{w_0 \in T_q M} \chi(w_0)$. Согласно известным теоремам Ляпунова [2]–[4] траектория q_t устойчива, если старший показатель отрицателен $\lambda < 0$ (точнее, для устойчивости необходима отрицательность генерального показателя) и не устойчива, если он положителен $\lambda > 0$. Отметим, что если траектория q_t лежит в ограниченной области, то положительность показателя Ляпунова (экспоненциальная расходимость близких траекторий) может быть положена в определение динамического хаоса ([5], с. 31). Такой случай, в частности, имеет место для геодезического потока в компактных пространствах отрицательной кривизны ([6], с. 275). При $\lambda = 0$ траектория может быть как устойчивой, так и не устойчивой.

Будем предполагать далее, что уравнение (1.1) допускает s-параметрическую группу симметрии G, причем группа G действует на многообразии M транзитивно, g_a — элемент группы G, лежащий в окрестности единицы группы $g_a \in V_e \subset G$, $a = (a^1, \dots, a^s)$ — локальные координаты в окрестности V_e, $g_a|_{a=0} = e$. Действие элемента группы g_a на точку многообразия q будем обозначать через $g_a^{(t)}(q)$ (т. к. действие может зависеть от параметра t, то мы его указываем в явном виде). Из определения группы симметрии следует соотношение

$$g_a^{(t)} \circ h_t = h_t \circ g_a^{(t_0)}. \tag{1.3}$$

Обозначим через $\xi_\mu^{(t)}$ генераторы группы преобразований

$$\xi_\mu^{(t)} \psi(q) \equiv \frac{\partial}{\partial a^\mu} \psi(g_a^{(t)}(q))|_{a=0},$$

где $\psi(q)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция на многообразии M. В локальных координатах имеем

$$\xi_\mu^{(t)} = \xi_\mu^i(t,x)\partial_{x^i}, \quad \xi_\mu^i(t,x) \equiv \frac{\partial}{\partial a^\mu}(g_a^{(t)}(x))^i|_{a=0}; \quad \mu = 1, \dots, s.$$

Условие однородности многообразия M эквивалентно равенству

$$\operatorname{rank} \|\xi_\mu^i(t_0, x)\| = n. \tag{1.4}$$

Дифференцируя уравнение (1.3) по переменной a^μ в точке $a = 0$ и по переменной t при $t = t_0$, получим инфинитезимальный аналог этого соотношения

$$\frac{\partial \xi_\mu^{(t)}}{\partial t} = [\xi_\mu^{(t)}, v^{(t)}]. \tag{1.5}$$

Это уравнение является определяющим для нахождения алгебры симметрии уравнения (1.1).

2. Показатели Ляпунова

Введем обозначение $q_t(a) = g_a^{(t)}(h_t(q))$. Из (1.3) следует, что если q_t — решение уравнения (1.1) с начальным значением $q_t|_{t=t_0} = q$, то $q_t(a)$ — также решение этого уравнения с начальным условием $q_t(a)|_{t=t_0} = q(a) = g_a^{(t_0)}(q)$, т. е.

$$\frac{d}{dt} q_t(a) = v^{(t)}(q_t(a)), \quad q_{t_0}(a) = g_a^{(t_0)}(q). \tag{2.1}$$

Дифференцируя (2.1) по a^μ в точке $a = 0$, получим

$$\frac{d}{dt}\xi_\mu^{(t)}(q_t) = v_*^{(t)}(q_t)\xi_\mu^{(t)}(q_t), \tag{2.2}$$

что непосредственно следует также и из уравнения (1.5). Таким образом, векторы $\xi_\mu^{(t)}(q_t)$ являются решениями линейной системы (1.2) и в силу транзитивности действия группы (1.4) порождают всё касательное пространство $T_{q_t}M$. Иначе говоря, решение уравнения (1.2) представляется в виде $w_t = \sum\limits_\mu C^\mu \xi_\mu^{(t)}(q_t)$, $C^\mu = \mathrm{const}$. Из этого соотношения следует

Теорема 1. *Векторные поля $\xi_\mu^{(t)}(q_t)$ — генераторы группы симметрии уравнения* (1.1) *— определяют спектр показателей экспоненциального роста системы* (1.2)

$$\chi(w_0) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln\|C_0^\mu \xi_\mu^{(t)}(q_t)\|,$$

и, в частности, старший показатель может быть вычислен по формуле

$$\lambda = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln\big(\max_t \|\xi_\mu^{(t)}(q_t)\|\big).$$

Рассмотрим достаточно распространенный случай, когда интересующая нас траектория q_t лежит в замкнутой ограниченной области $D \subset M$. Такая ситуация характерна для систем уравнений, описывающих нелинейные колебания. Нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Следствие 1. Если траектория q_t лежит в замкнутой ограниченной области $D \subset M$, и в этой области векторные поля $\xi_\mu^{(t)}(q)$ ограничены и зависят от параметра t не более, чем экспоненциальным образом, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $B_\varepsilon < \infty$, что $\max\limits_\mu \sup\limits_{q\in D,\, t\geq t_0} \|\xi_\mu^{(t)}(q)\| \leq B_\varepsilon e^{t\varepsilon}$, то все показатели Ляпунова этой траектории неположительны.

Таким образом, для систем с симметриями достаточно проверить ограниченность векторных полей в области, где проходит исследуемая траектория, чтобы установить неотрицательность показателей Ляпунова.

Приведем пример. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений ($M = R^3$):

$$\begin{cases} \dot x^1 = x^2, \\ \dot x^2 = x^2 x^3, \\ \dot x^3 = (x^2)^2\varphi(x^1) + (x^3)^2/2. \end{cases} \tag{2.3}$$

Система (2.3) допускает алгебру Ли симметрии sl(2) с генераторами

$$\begin{aligned} \xi_1^{(t)} &= v = x^2\partial_{x^1} + x^2x^3\partial_{x^2} + [(x^2)^2\varphi(x^1) + (x^3)^2/2]\partial_{x^3}; \\ \xi_2^{(t)} &= tx^2\partial_{x^1} + x^2(1+tx^3)\partial_{x^2} + [t((x^2)^2\varphi(x^1) + (x^3)^2/2) + x^3]\partial_{x^3}; \\ \xi_3^{(t)} &= t^2x^2\partial_{x^1} + tx^2(tx^3+2)\partial_{x^2} + [t^2((x^2)^2\varphi(x^1) + (x^3)^2/2) + 2tx^3 + 2]\partial_{x^3}. \end{aligned}$$

Система (2.3) неинтегрируема в квадратурах. Используя двумерную разрешимую подалгебру в sl(2), ее можно свести к уравнению Риккати, где нелинейность определяется функцией $\varphi(x^1)$. При этом редуцированное уравнение не будет уже допускать никакой группы симметрии.

В силу автономности системы (2.3) без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Кроме того, $\det \xi_j^i(0,x) = 2(x^2)^2$ и, таким образом, группа sl(2) действует транзитивно на трехмерном пространстве, исключая плоскость $x^2 = 0$. Заметим, что в данном случае плоскость $x^2 = 0$ является инвариантным подмногообразием относительно локального потока h_t. Поэтому либо вся траектория x_t лежит в этой плоскости, либо не имеет с ней общих точек. В первом случае система (2.3) легко интегрируется $x^1_t = x^1$, $x^2_t = 0$, $x^3_t = x^3/(1 - tx^3)$. Во втором случае группа симметрии транзитивна, функции $|\xi^i_j(t,x)|$ растут по времени лишь степенным образом и если траектория x_t лежит в ограниченной области (это справедливо, напр., для $\varphi(x^1) = \sin(x^1)$), то согласно следствию 1 старший показатель траектории x_t неположителен (что эквивалентно отсутствию динамического хаоса в этой области).

3. Уравнения на компактных группах Ли

Можно построить класс неинтегрируемых систем дифференциальных уравнений, обладающих достаточно широкой группой симметрии, чтобы судить об их устойчивости. Именно, рассмотрим случай, когда многообразие $M = G$ — компактная группа Ли. Обозначим через ξ_i, η_j соответственно лево- и правоинвариантные векторные поля на группе G. Для любой компактной группы Ли в касательном пространстве к единице T_eG существует Ad_g-инвариантная положительно определенная билинейная форма G_{ij} (метрика в T_eG). Биинвариантную риманову метрику $g_{ij}(q)$ на группе Ли можно получить, действуя левыми сдвигами на G_{ij},

$$g_{ij}(q) = (L_q)^* G_{ij}. \tag{3.1}$$

Скалярное произведение левоинвариантных векторных полей в метрике (3.1) постоянно, т. е. не зависит от точки

$$(\xi_i(q), \xi_j(q)) = (\xi_i(e), \xi_j(e)) = G_{ij}.$$

Будем считать, что связность на многообразии G согласована с метрикой (3.1).

Введем неавтономное правоинвариантное векторное поле

$$v^{(t)} = \sum_i c^i(t)\eta_i, \tag{3.2}$$

где $c^i(t)$ — некоторые произвольные функции от времени. Так как каждое левоинвариантное векторное поле ξ_j коммутирует с любым правоинвариантным векторынм полем η_i, то выполнено условие (1.5) $[\xi_j, v^{(t)}] = 0$. Таким образом, система уравнений (1.1) на компактной группе Ли G с векторным полем (3.2) допускает эту же группу симметрии G с генераторами ξ_j. Причем действие группы симметрии является транзитивным $\det \xi^i_j \neq 0$. Отметим, что в силу произвольности функций $c^i(t)$ в (3.2) система (1.1) в общем случае неинтегрируема, а устойчивость всех ее решений легко следует из теоремы 2.

Теорема 2. *Для любых двух интегральных траекторий $h_t(p)$, $h_t(q)$ неавтономного правоинвариантного векторного поля* (3.2) *на компактной группе Ли справедливо равенство*

$$d(h_t(p), h_t(q)) = d(p, q).$$

Доказательство. Пусть h_t — кривая в группе G, проходящая через единицу группы и удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dh_t}{dt} = v^{(t)}(h_t), \quad h_{t_0} = e.$$

В силу правоинвариантности поля $v^{(t)}$ действие $h_t(q)$ является левым сдвигом на элемент группы h_t: $h_t(q) = h_t q$. Аналогично действие элемента g_a группы симметрии на точку q является правым сдвигом $g_a(q) = qg_a$. Соединим две произвольные точки p, q кратчайшей геодезической. Известно, что все геодезические в компактной группе Ли, проходящие через точку q, получаются действием левого сдвига L_q на однопараметрические подгруппы $q(\alpha) = qg_\alpha$, g_α — однопараметрическая группа, порожденная левоинвариантным векторным полем $\xi = a^i\xi_j$. Геодезическая $g(\alpha)$ является интегральной траекторией левоинвариантного векторного поля ξ

$$\frac{dq(\alpha)}{d\alpha} = \xi(q(\alpha)), \quad q(0) = q.$$

Не теряя общности, будем считать $(\xi,\xi) = 1$, т.е. $\|a\| = \sqrt{a^i a^j G_{ij}} = 1$. Иначе говоря, α — натуральный параметр кривой $q(\alpha)$.

Пусть $p = g_\alpha(a) = qg_\alpha = q(\alpha)$, тогда

$$d(p,q) = d(g_\alpha(q),q) = \int_0^\alpha \sqrt{g_{ij}(x_\alpha)\frac{dx^i_\alpha}{d\alpha}\frac{dx^j_\alpha}{d\alpha}}\,d\alpha = \int_0^\alpha \sqrt{g_{ij}(x_\alpha)\xi^i(x_\alpha)\xi^j(x_\alpha)}\,d\alpha = \int_0^\alpha \sqrt{(\xi,\xi)}\,d\alpha = \alpha,$$

где x_α — координаты точки $q(\alpha)$. В силу произвольности точки q имеем

$$d(h_t(p),h_t(q)) = d(h_t(g_\alpha(q)),h_t(q)) = d(g_\alpha(q_t),q_t) = \alpha. \quad \square$$

Из утверждения и из доказательства теоремы 2 очевидным образом вытекает

Следствие 2. Все показатели экспоненциального роста для интегральных траекторий неавтономных правоинвариантных векторных полей на компактных группах Ли тождественно равны нулю.

Следствие 3. Геодезические компактных групп Ли устойчивы и имеют нулевые показатели Ляпунова.

Это утверждение согласуется с хорошо известным фактом о неотрицательности секционной кривизны компактной группы Ли по любому двумерному направлению. В качестве примера рассмотрим уравнения на группе SU(2). Лево- и правоинвариантные векторные поля на этой группе имеют вид

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{\cos\psi}{\cos\theta}\partial_\varphi + \sin\psi\partial_\theta - \operatorname{tg}\theta\cos\psi\partial_\psi,\\
\xi_2 &= -\frac{\sin\psi}{\cos\theta}\partial_\varphi + \cos\psi\partial_\theta + \operatorname{tg}\theta\sin\psi\partial_\psi,\\
\xi_3 &= \partial_\psi,\\
\eta_1 &= \partial_\varphi,\\
\eta_2 &= \operatorname{tg}\theta\sin\varphi\partial_\varphi + \cos\varphi\partial_\theta - \frac{\sin\varphi}{\cos\theta}\partial_\psi,\\
\eta_3 &= -tg\theta\cos\varphi\partial_\varphi + \sin\varphi\partial_\theta + \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\partial_\psi.
\end{aligned}$$

Система (1.1) с векторным полем (3.2) в этом случае выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot\varphi &= c^1(t) + (c^2(t)\sin\varphi - c^3(t)\cos\varphi)\operatorname{tg}\theta,\\
\dot\theta &= c^2(t)\cos\varphi + c^3(t)\sin\varphi,\\
\dot\psi &= (c^3(t)\cos\varphi - c^2(t)\sin\varphi)/\cos\theta.
\end{aligned}$$

Эта система допускает группу симметрии SU(2) с генераторами ξ_i. Совершая замену функций и независимой переменной $c^3(t) = r(t)\cos\beta(t)$, $c^2(t) = r(t)\sin\beta(t)$,

$$c^1(t) = \alpha(t)r(t) - \dot\beta(t), \quad \tau = \int_0^t r(t)dt; \quad \varphi \to \varphi - \beta,$$

получим эквивалентную систему уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{d\tau} &= -\operatorname{tg}\theta\cos\varphi + \alpha(\tau),\\
\frac{d\theta}{d\tau} &= \sin\varphi,\\
\frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.
\end{aligned}$$

В силу произвольности функции $\alpha(\tau)$ эта система не интегрируема в квадратурах, однако, как следует из теоремы 2, все ее решения устойчивы по Ляпунову.

В заключение этого пункта заметим, что если поменять местами слова "право" и "лево", то все вышеприведенные утверждения остаются в силе.

4. Устойчивость решений, лежащих в ограниченной области

Из предыдущих пунктов следует, что группа симметрии системы дифференциальных уравнений, действующая транзитивно, в какой-то степени определяет устойчивость решений этой системы. Однако одного свойства транзитивности действия группы симметрии не достаточно, чтобы утверждать об устойчивости решений. В качестве простейшего контрпримера рассмотрим уравнение на положительной полуоси, все решения которого неустойчивы $\dot{x}_t = x_t$; $x_t > 0$. Это уравнение допускает транзитивную группу симметрии с генератором $\xi = x\partial_x$.

Если же исследуемая траектория и все близкие к ней лежат в ограниченной области, то при некотором ограничении на генераторы транзитивной группы симметрии можно говорить об устойчивости данной траектории. Более точно, имеет место

Теорема 3. *Пусть система* (1.1) *допускает связную группу симметрии G, транзитивно действующую в открытой ограниченной области $D \subseteq M$. Индуцированные векторные поля ξ_μ и все их производные ограничены на D равномерно по t, т. е. существует такая постоянная $B < \infty$, что*

$$\max_{\sigma,i,\mu,\alpha} \sup_{x\in\varphi_\alpha(D\cap U_\alpha),\, t\geq t_0} |\xi_\mu^{i(\sigma)}(t,x)| < B. \tag{4.1}$$

Тогда если существует шар $B_{\delta_1}(q)$ такой, что $h_t(B_{\delta_1}(q)) \subset D$, то траектория $h_t(q)$ устойчива.

В формуле (4.1) $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — мультииндекс, и для произвольной бесконечно дифференцируемой функции f на D $f^{(\sigma)} \equiv \partial_{x_1}^{\sigma_1} \dots \partial_{x_n}^{\sigma_n} f(x)$.

В качестве координат в окрестности единицы группы G удобно взять канонические координаты второго рода, т. е. разложить элемент группы в произведение однопараметрических подгрупп

$$g_a^{(t)} = g_{a^1}^{(t)} \dots g_{a^s}^{(t)}; \tag{4.2}$$

$g_{a^\mu}^{(t)} = \exp(a^\mu \xi_\mu)$ — однопараметрическая подгруппа группы преобразований с генератором ξ_μ. Очевидно, что существует такое положительное число r_1, что разложение (4.2) имеет смысл для всех элементов g_a, $\|a\|_\infty < r_1$, которые образуют некоторую открытую окрестность единицы группы G.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 3, понадобится

Лемма. *Для всех $\|a\|_\infty < \min\{r_1, 1/n^2B\}$, $x \in \varphi(D)$, $t \geq t_0$ справедливо неравенство*

$$\|g_a^{(t)}(x) - x\|_\infty < \frac{1}{n} \ln \frac{1}{1 - n^2 B \|a\|_\infty}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Для функций $f(x,t) = (f^1(x,t), \dots, f^n(x,t))$, ограниченных на $\varphi(D) \times [t_0, \infty)$ и принимающих значения в R^n, определим

$$\|f(x,t)\| \equiv \sup_{x\in\varphi(D),\, t\geq t_0} \|f(x,t)\|_\infty.$$

Введем также обозначения: $\xi_\mu = \xi_\mu^i(t,x)\partial_{x^i}$ — дифференциальный оператор первого порядка, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ — мультииндекс, $\xi^{(\alpha)} \equiv \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_s^{\alpha_s}$ — оператор порядка $|\alpha| \equiv \sum\limits_{\mu=1}^{s} \alpha_\mu$. Используя условие (4.1), по индукции несложно получить

$$\max_{|\alpha|=m} \|\xi^{(\alpha)} x\| < C_m; \quad C_m = n^{m-1} B^m (m-1)\,!.$$

С учетом этого неравенства имеем

$$\|g_a^{(t)}(x)-x\| = \Big\|\sum_{|\alpha|>0}\frac{a^\alpha}{\alpha!}\xi^{(\alpha)}x\Big\| = \Big\|\sum_{m=1}\sum_{|\alpha|=m}\frac{a^\alpha}{\alpha!}\xi^{(\alpha)}x\Big\| \le \sum_{m=1}^{\infty}\|a\|_\infty^m\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\|\xi^{(\alpha)}x\| <$$

$$< \sum_{m=1}^{\infty}\|a\|_\infty^m C_m\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!} = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{1-n^2B\|a\|_\infty}. \quad \square$$

Доказательство теоремы 3. Очевидно, что для любых точек p, q ограниченной области D, принадлежащих одной карте, существуют такие постоянные A_α, что

$$d(p,q) \le A_\alpha\|x_\alpha(p)-x_\alpha(q)\|_\infty, \tag{4.4}$$

где $p,q \in D\cap U_\alpha$. Введем обозначение $A_D = \max\limits_\alpha A_\alpha$. Неравенство (4.4) означает лишь, что в пределах одной карты функции расстояния, индуцированные римановой метрикой и евклидовой нормой, эквивалентны. Для произвольного $\varepsilon>0$ введем числа $r_\varepsilon = (1-e^{-\varepsilon n/A_D})/Bn^2$, $r=\min\{r_1, 1/n^2B, r_\varepsilon\}$. Для точки $q\in D$ и числа r определим область $V_r(q)=\{p\in M \mid p = g_a^{(t_0)}(q),\ \|a\|_\infty<r\}$. В силу транзитивности действия группы область $V_r(q)$ является открытой. Поэтому существует открытый шар $B_{\delta_r}(q)$ такой, что $B_{\delta_r}(q)\subseteq V_r(q)$. Обозначим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_r\}$. Пусть p — произвольная точка из открытого шара $B_\delta(q)$, тогда

$$d(h_t(p),h_t(q)) = d(h_t(g_a^{(t_0)}(q)),h_t(q)) = d(g_a^{(t)}(q_t),q_t) \le \sup_{q\in D,\, t\ge t_0} d(g_a^{(t)}(q),q).$$

При достаточно малых r точки $g_a^{(t)}(q)$ и q лежат в одной карте (U,φ). В силу (4.3) и (4.4) имеем

$$d(p_t,q_t) \le A_D \sup_{x\in\varphi(D),\, t\ge t_0}\|g_a^{(t)}(x)-x\|_\infty < \frac{A_D}{n}\ln\frac{1}{1-n^2Br} \le \varepsilon. \quad \square$$

Литература

1. Олвер П. *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям.* – М.: Мир, 1989 – 639 с.
2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 534 с.
3. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.* – М.: Мир, 1980. – 300 с.
4. Былов Б.Ф., Виноградов Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости.* – М.: Наука, 1966. – 576 с.
5. Шустер Г. *Детерминированный хаос.* – М.: Мир, 1988 – 240 с.
6. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 431 с.

Омский государственный университет

Поступила
19.03.1997