ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 517.9

А.И. КОРОТКИЙ

ВОССТАНОВЛЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ И ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Работа посвящена исследованию обратной задачи динамики о восстановлении априори неизвестных управлений и параметров динамических систем в условиях неполной информации о текущих фазовых положениях системы по наблюдению за информационными множествами, содержащими априори неизвестные текущие фазовые состояния системы. Хорошо известно, что эта задача является некорректной. Предлагаются динамические позиционные регуляризирующие алгоритмы решения задачи, обладающие свойством физической осуществимости и способные работать в режиме реального времени. В основе построений лежат результаты работ [1]–[3], опирающиеся на методы теории позиционного управления [4]–[8] и методы теории некорректных задач [9]–[12].

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую динамическую систему, текущие состояния которой описываются фазовым вектором $x = x(t) \in R^n$, изменяющимся во времени t в соответствии с дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t_0 \le t \le \vartheta, \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.1}$$

Здесь $f(t,x,u)$ — заданная вектор-функция, отражающая динамические свойства системы; u — вектор управляющих воздействий на систему (короче — управление, параметр), допустимые текущие в момент времени t значения $u = u(t)$ которого подчинены заданным геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P \subset R^m, \tag{1.2}$$

отражающим возможности управления или характеризующим известные оценки допустимого изменения параметра.

С содержательной точки зрения изучаемая задача состоит в следующем. Допустим, что за управляемой динамической системой (1.1) осуществляется наблюдение на промежутке времени $T = [t_0, \vartheta]$ $(-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty)$. При наблюдении за движением системы наблюдатель получает некоторую информацию, которая позволяет ему только оценивать (вообще говоря, не малые) области $G(t)$ в фазовом пространстве R^n, содержащие текущие значения $x(t)$ фазового вектора x системы, но эта информация недостаточна ни для точного вычисления значения $x(t)$, ни для его удовлетворительного статистического описания в пределах этой информационной области $G(t)$. Вопрос о том, как формируются области $G(t)$ на основе того или иного способа наблюдения за системой (1.1), оставим в стороне. Примем просто, что информация, поступающая наблюдателю к моменту времени $t \in T$, позволяет ему при помощи каких-то операций определить область $G(t)$, причем у него нет возможности уточнить эти данные в момент t так,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 96-01-00846, 97-01-01060).

чтобы найти меньшую подобласть области $G(t)$. Некоторые из способов построения таких операций наблюдения описаны, например, в [4], [5], [8]. Задача восстановления состоит в том, чтобы найти ту реализацию $u = u(t)$, $t \in T$, управляющего воздействия (параметра), которая отвечает наблюдению за движением системы (1.1), имея в качестве исходной информации для решения задачи множества $G(t)$, $t \in T$. Предполагается, что наблюдателю, стремящемуся к решению задачи восстановления, известны также функция f и множество P.

Будем стремиться к такому методу решения задачи, который осуществлял бы восстановление искомого управляющего воздействия в динамике (синхронно с развитием процесса во времени или, как еще говорят, в темпе реального времени). При восстановлении искомой величины может учитываться только та информация об объекте, которая поступила по ходу процесса в соответствующий текущий момент времени. Сам процесс восстановления должен быть одноразовым и его невозможно было бы повторить, не вернувшись во времени назад. Чтобы такое динамическое решение задачи восстановления имело практическую ценность, представляется естественным строить соответствующие разрешающие операции (операторы) в классе операций (операторов), удовлетворяющих условию физической осуществимости, которое иногда еще называют условием наследственности или условием причинности [6], [7], [13]. Суть этого условия состоит в том, что результаты операций (выходы) совпадают во времени до тех пор, пока совпадают во времени аргументы (входы). Соответствующие мотивировки и различные примеры содержательных задач, в которых важно получить динамическое решение обратной задачи восстановления или реконструкции управлений (параметров), приведены, например, в [1]–[3], [14].

Отметим еще одну важную особенность рассматриваемой задачи. Эта особенность состоит в том, что задача является, вообще говоря, некорректной по отношению к малым погрешностям в определении (измерении) информационных областей $G(t)$. Это обстоятельство заставляет рассматривать задачу под углом зрения теории некорректных задач и при построении решения использовать аппарат регуляризирующих операторов [9]–[12]. Кроме того, в расчете на возможность практического решения задачи с помощью ЭВМ, будем стремиться к решению задачи в дискретной по времени схеме.

Оговорим характер изменения множеств $G(t)$ со временем. Примем, что каковы бы ни были моменты времени $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \le t_2$, найдется некоторая допустимая реализация управляющего воздействия $u = u(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, под действием которой управляемая система переходит из точек множества $G(t_1)$, как из начальных для момента времени t_1, на точки множества $G(t_2)$ в момент времени t_2 согласно закону (1.1). При таком характере деформаций информационных множеств исходную задачу можно было бы рассматривать так же, как задачу динамического определения той реализации управляющего воздействия, которая порождает наблюдаемое движение сечений $G(t)$, $t \in T$, пучка (ансамбля) траекторий управляемой динамической системы (1.1), вышедшего в момент времени t_0 из начального множества $G(t_0)$. Отметим, что нахождение управляющего воздействия, порождающего наблюдаемое движение пучка траекторий системы (1.1), это нечто большее, чем нахождение управления, порождающего индивидуальную траекторию $x_* = x_*(t)$, $t \in T$, системы (1.1), для которой $x_*(t) \in G(t)$, $t \in T$. Дело в том, что в первом случае речь идет о построении управления, универсального по начальным состояниям системы (1.1): построенное управление окажется таковым, что траектория $x = x(t)$, $t \in T$, системы (1.1), выходящая под действием этого управления из любого начального состояния $x(t_0) \in G(t_0)$, будет удовлетворять условию $x(t) \in G(t)$, $t \in T$.

Уточним теперь содержательную постановку задачи. Введем предварительно некоторые обозначения. Пусть U обозначает множество всех возможных допустимых управлений системы (1.1)

$$U = \{u(\cdot) \in L^2(T; R^m) : u(t) \in P \text{ п. в. } t \in T\};$$

$x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u)$ — абсолютно непрерывное решение на T дифференциального уравнения (1.1) (движение системы, траектория), соответствующее начальному условию $x(t_0) = x_0 \in X_0$

и управлению $u \in U$, X_0 — некоторое множество начальных состояний. Существование абсолютно непрерывных решений на T обеспечивают, к примеру, известные условия непрерывности, локальной липшицевости и подлинейного роста функции f [6], [7], [13]. Пусть $X(\cdot; t_0, X_0, u)$ — многозначное отображение $T \ni t \to X(t) \in \mathrm{sub}(R^n)$, где

$$X(t) = X(t; t_0, X_0, u) = \{x(t; t_0, x_0, u) : x_0 \in X_0\},$$

$\mathrm{sub}(R^n)$ — множество всех непустых подмножеств из R^n;

$$X(\cdot; t_0, X_0, U) = \{X(\cdot; t_0, x_0, u) : u \in U\};$$

для многозначного отображения $X(\cdot) \in X(\cdot; t_0, X_0, U)$ пусть $U[X(\cdot)]$ обозначает множество всех управлений $u \in U$, для которых $X(\cdot) = X(\cdot; t_0, X_0, u)$, т. е.

$$U[X(\cdot)] = \{u \in U : X(\cdot; t_0, X_0, u) = X(\cdot)\};$$

$U_*[X(\cdot)]$ — подмножество множества $U[X(\cdot)]$, состоящее из элементов, которые удовлетворяют некоторому критерию отбора управлений, задаваемому функционалом $\omega : U \to R$,

$$U_*[X(\cdot)] = \{u \in U[X(\cdot)] : \omega(u) \le \omega_*\};$$

$Z[h, X(\cdot)]$ — множество всех многозначных отображений $Z(\cdot) : T \to \mathrm{sub}(R^n)$, значения которых при каждом $t \in T$ отличаются от значения $X(t)$ на заданную величину, не превосходящую числа $h > 0$, согласно некоторому критерию аппроксимации $\nu : \mathrm{sub}(R^n) \times \mathrm{sub}(R^n) \to R$,

$$Z[h, X(\cdot)] = \{Z(\cdot) \in (T \to \mathrm{sub}(R^n)) : \nu(Z(t), X(t)) \le h,\ t \in T\}.$$

Пусть $\rho : U \times U \to R$ обозначает некоторый критерий близости управлений; M — некоторое подмножество множества $\mathrm{sub}(R^n)$, из которого могут браться начальные состояния для пучков движений. Информационные области $G(t) = X(t)$, $t \in T$, будем называть "идеальными" наблюдениями, а множества $Z(t)$, $t \in T$, будем называть h-возмущениями "идеальных" наблюдений.

Задачу восстановления теперь можно сформулировать так.

Задача 1.1. Требуется построить оператор восстановления $D : (0, \infty) \times (T \to \mathrm{sub}(R^n)) \to U$ со свойствами

1) для любых фиксированных $X_0 \in M$, $X(\cdot) \in X(\cdot; t_0, X_0, U)$ имеет место сходимость

$$\sup\{\rho(D(h, Z(\cdot)), U_*[X(\cdot)]) : Z(\cdot) \in Z[h, X(\cdot)]\} \to 0, \quad h \to 0$$

(свойство устойчивости или регуляризируемости оператора D);

2) $u_1(t) = u_2(t)$, $t_0 \le t \le \tau$, если только $u_1 = D(h, Z_1(\cdot))$, $u_2 = D(h, Z_2(\cdot))$, $Z_1(\cdot) = Z_2(\cdot)$, $t_0 \le t \le \tau$, $t_0 \le \tau \le \vartheta$, $h > 0$ (свойство физической осуществимости оператора D).

Оператор D, решающий задачу 1.1, иногда будем также называть методом или алгоритмом реконструкции искомого управления. Элемент $u_h = D(h, Z(\cdot))$ может быть принят в качестве близкого к априори неизвестному множеству управлений $U_*[X(\cdot)]$, элементы u которого, с одной стороны, порождают пучок движений $X(\cdot; t_0, \vartheta, X_0, u) = \{x(\cdot; t_0, x_0, u) : x_0 \in X_0\}$, сечения $X(t; t_0, \vartheta, X_0, u) = \{x(t; t_0, x_0, u) : x_0 \in X_0\}$ которого в моменты времени $t \in T$ совпадают с наблюдаемыми множествами $X(t)$, с другой стороны, они удовлетворяют критерию отбора управлений $\omega(u) \le \omega_*$. В некоторых случаях множество $U_*[X(\cdot)]$ может состоять из одного элемента $u_* \in U$, тогда в таких случаях $\rho(u_h, u_*) \to 0$, $h \to 0$. Алгоритм реконструкции D будем искать в виде подходящей стратегии V управления некоторой вспомогательной системой-моделью в соответствии с тем способом, который кратко опишем ниже.

2. Метод решения задачи

Опишем неформально метод решения задачи. Будем следовать тому способу решения рассматриваемой проблемы, который сводит ее к задаче позиционного управления подходящей вспомогательной управляемой системой-моделью. В идейном плане этот способ восходит к работам [1]–[3]. Сначала строится некоторая подходящая управляемая система-модель

$$\dot{y} = g(t, y, v), \quad t \in T, \quad y(t_0) = y_0, \tag{2.1}$$

текущее состояние которой в момент времени $t \in T$ описывается фазовым вектором $y = y(t) \in R^n$, вектор управляющих воздействий v в текущие моменты времени $t \in T$ стеснен ограничением $v(t) \in P$. Затем строится некоторый подходящий закон управления V системой-моделью (позиционная стратегия или процедура управления с поводырем [6], [7]), который будем отождествлять с функцией $V = V(t, X, Y)$, стесненной в соответствии с условием (1.2) только включением $V(t, X, Y) \in P$ при всех возможных значениях аргументов $t \in T$, $X \in \operatorname{sub}(R^n)$, $Y \in \operatorname{sub}(R^n)$. Зафиксируем какое-либо разбиение Δ отрезка T точками t_i, $t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \vartheta$. Стратегия V порождает на отрезке T пучок движений $Y_\Delta(\cdot; t_0, \vartheta, Y_0, V)$ системы (2.1), выходящий в момент времени t_0 из некоторого множества Y_0, соответствующий разбиению Δ отрезка T и состоящий из траекторий $y_\Delta(\cdot) = y_\Delta(\cdot; t_0, \vartheta, y_0, V)$:

$$\dot{y}_\Delta(t) = g(t, y_\Delta(t), v_i), \quad t_i \le t < t_{i+1}, \quad i = 0, \ldots, m-1,$$
$$y_\Delta(t_0) = y_0 \in Y_0, \quad y_\Delta(t_i) = y_\Delta(t_i - 0), \quad i = 1, \ldots, m-1.$$

Постоянное на промежутке $t_i \le t < t_{i+1}$ управляющее воздействие $v_i = V(t_i, Z(t_i), Y(t_i))$ вырабатывается в момент времени t_i на основании поступивших к этому моменту данных $Z(t_i)$ о системе (1.1) и поступивших к этому моменту данных $Y(t_i)$ о системе-модели (2.1). Здесь $Y(t_i)$ — сечение пучка движений $Y_\Delta(\cdot; t_0, t_i, Y_0, V)$ в момент времени t_i:

$$Y(t_i) = \{y_\Delta(t_i) : y_\Delta(\cdot) \in Y_\Delta(\cdot; t_0, t_i, Y_0, V)\}.$$

Отметим, что пучок движений $Y_\Delta(\cdot; t_0, t_i, Y_0, V)$ совпадает с сужением пучка движений $Y_\Delta(\cdot; t_0, \vartheta, Y_0, V)$ на промежуток $t_0 \le t \le t_i$.

Оказывается, что для достаточно широкого круга задач систему-модель и закон управления ею можно выбрать так, что реализация стратегии управления

$$v_\Delta(\cdot): \ v_\Delta(t) = v_i, \ t_i \le t < t_{i+1}, \ i = 0, \ldots, m-1, \ v_\Delta(\vartheta) = v_{m-1},$$

будет в определенном смысле близка к искомым неизвестным управлениям системы (1.1), если только погрешности в исходных данных и диаметр разбиения Δ достаточно малы и согласованы определенным образом. Разбиение Δ отрезка T будем подчинять величине погрешности h, на которую идеальные информационные множества $G(t) = X(t)$ отличаются от практически найденных множеств $Z(t)$. Тогда алгоритм построения реализации $v_\Delta(\cdot)$ и соответствующий ему оператор

$$D : (0, \infty) \times (T \to \operatorname{sub}(R^n)) \ni (h, Z(\cdot)) \to v_\Delta(\cdot) \in U$$

будет искомым, поскольку будет удовлетворять тем условиям, о которых говорилось выше в условии задачи. Отметим, что переменная состояния вспомогательной системы-модели может рассматриваться как внутренняя переменная алгоритма D, которая физически вполне может быть автономно реализована на ЭВМ. В качестве системы-модели часто можно принять копию исходной системы, возможны и другие варианты выбора системы-модели, в каждом конкретном случае этот вопрос решается индивидуально. Стратегия V строится из тех соображений, чтобы пучок движений системы (2.1), выходящий в момент времени t_0 из множества $Z(t_0)$ под действием этой стратегии, в определенном смысле отслеживал динамику наблюдаемых множеств $G(t)$, $t \in T$. Идея построения такого закона управления системой-моделью заложена в известном способе экстремального сдвига из теории позиционного управления [5]–[7], который локально регуляризируется одним из известных методов регуляризации [9]–[12].

Рассмотрим далее две конкретизации сформулированной задачи восстановления. Первая из них осуществляется для линейных динамических систем с выпуклыми геометрическими ограничениями на управления и выпуклыми информационными множествами. Детальная математическая формализация задачи в этом случае основывается на взаимнооднозначном соответствии между выпуклыми компактами в R^n и их опорными функциями и достигается путем погружения исходной задачи в более общую задачу восстановления в подходящем функциональном пространстве. Вторая из конкретизаций осуществляется для некоторого класса нелинейных динамических систем с информационными множествами, состоящими из упорядоченного набора конечного числа точек фазового пространства. С содержательной точки зрения такая ситуация может представиться при наблюдении несколькими наблюдателями за одним или несколькими объектами. Основная идея, которая используется при решении задачи в этом случае, состоит в выборе вспомогательной системы-модели в виде декартова произведения определенного числа экземпляров исходной системы.

3. Линейная модель

Пусть управляемая система (1.1) имеет следующий вид

$$\dot{x} = f(t,x,u) = A(t)x + B(t)u + F(t), \quad t_0 \le t \le \vartheta, \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ — непрерывные на T матрицы размерностей $n\times n$, $n\times m$, $n\times 1$ соответственно. Пусть множество P является выпуклым компактом в R^m. Множество всех непустых выпуклых компактов в R^k далее будем обозначать символом $\mathrm{cc}(R^k)$. При $X_0 \in \mathrm{cc}(R^n)$ динамика выпуклых компактов $X(t) = X(t;t_0,X_0,u)$ с помощью опорных функций может быть описана равенством

$$\varphi(l;K(\vartheta,t)X(t)) = \varphi(l;K(\vartheta,t_0)X(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \langle K(\vartheta,\tau)[B(\tau)u(\tau)+F(\tau)],l\rangle d\tau,$$

где $K(\cdot,\cdot)$ — матрица Коши линейной системы (3.1)

$$\partial K(t,\tau)/\partial t = A(t)K(t,\tau), \quad K(\tau,\tau) = E,$$

$\varphi(l;N) = \sup\{\langle l,x\rangle : x \in N\}$ — опорная функция множества $N \subset R^n$, $l \in S = \{l \in R^n : \|l\| \le 1\}$ — замкнутый единичный шар в R^n, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в R^n соответственно. Пусть далее критерий близости управлений ρ является метрикой пространства $L^p(T;R^m)$, $1 \le p < \infty$; критерий отбора управлений ω является нормой пространства $L^2(T;R^m)$ и $\omega_* = \inf\{\omega(u) : u \in U[X(\cdot)]\}$; $M = \mathrm{cc}(R^n)$; критерий аппроксимации множеств ν определяется равенством

$$\nu(N_1,N_2) = \|\varphi(\cdot;N_1) - \varphi(\cdot;N_2)\|_*,$$

где $\|\cdot\|_*$ — норма в пространстве $L^2(S;R)$ (скалярное произведение в этом пространстве обозначим символом $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$). Отметим, что метрика ν на $\mathrm{cc}(R^n)$ слабее метрики Хаусдорфа. В качестве системы-модели выберем копию системы (3.1): $g = f$.

Перейдем теперь к описанию алгоритма D. Зафиксируем произвольные элементы $X_0 \in \mathrm{cc}(R^n)$, $X(\cdot) \in X(\cdot;t_0,X_0,U)$, $h > 0$, $Z(\cdot) \in Z[h,X(\cdot)]$, разбиение Δ отрезка T точками t_i, $t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \vartheta$, зависимость $m = m(h)$ и константу $C > 0$ такие, что

$$d(h) = \max\{t_{i+1} - t_i : i = 0,\ldots,m-1\} \le C\,h. \tag{3.2}$$

Рассмотрим управление $u_h \in U$, сформированное по правилу

$$u_h(t) = v_i, \;\; t_i \le t < t_{i+1}, \;\; i = 0,\ldots,m-1, \;\; u_h(\vartheta) = v_{m-1}, \tag{3.3}$$

где $v_i = V(t_i, Z(t_i), Y(t_i))$ — элемент множества P, доставляющий минимум квадратичному функционалу

$$H_i(v) = 2\langle\!\langle \varphi(l;K(\vartheta,t_i)Z(t_i)) - \varphi(l;K(\vartheta,t_i)Y(t_i)),\, \langle K(\vartheta,\tau)B(\tau)v,l\rangle \,\rangle\!\rangle + \alpha(h)\|v\|_m^2$$

(минимизирующий элемент существует и является единственным),

$$\varphi(l; K(\vartheta, t_i)Y(t_i)) = \varphi(l; K(\vartheta, t_{i-1})Y(t_{i-1})) + \\ + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle K(\vartheta,\tau)[B(\tau)v_{i-1} + F(\tau)], l\rangle\, d\tau, \quad Y(t_0) = Z(t_0).$$

Здесь $\|\cdot\|_m$ — норма в R^m, $\alpha(\cdot)$ — положительная функция на $(0,\infty)$ ($\alpha = \alpha(h)$ — параметр регуляризации), удовлетворяющая условию

$$\alpha(h) \to 0, \quad h/\alpha(h) \to 0, \quad h \to 0; \tag{3.4}$$

$Y(t_i)$ — сечение в момент времени t_i пучка движений, вышедшего в момент времени t_{i-1} из множества состояний $Y(t_{i-1})$ под действием управления $v = v_{i-1}$ в силу вспомогательной динамической системы-модели

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v + F(t), \quad t_{i-1} \le t \le t_i, \quad y(t_{i-1}) \in Y(t_{i-1}).$$

Определим теперь алгоритм (оператор) D по правилу

$$D(h, Z(\cdot)) = u_h. \tag{3.5}$$

Теорема 3.1. *Алгоритм* (3.1)–(3.5) *решает задачу* 1.1.

Доказательство. Свойство физической осуществимости алгоритма вытекает из позиционности стратегии V. Для доказательства теоремы достаточно теперь показать, что каковы бы ни были элементы $X_0 \in \mathrm{cc}(R^n)$, $X(\cdot) \in X(\cdot; t_0, X_0, U)$ и последовательности $\{h_k\} \subset (0,\infty)$ $(h_k \to 0)$, $\{Z_k(\cdot)\}$ $(Z_k(\cdot) \in Z[h_k, X(\cdot)]\,)$ для управлений $u_k = D(h_k, Z_k(\cdot))$ будет иметь место сходимость $\rho(u_k, u_*) \to 0$, $k \to \infty$, где u_* — тот единственный элемент, из которого состоит множество $U_*[X(\cdot)]$. Принимая во внимание правило формирования управления u_k, можно получить следующую оценку для функционала Λ_k:

$$\max\{\Lambda_k(t) : t \in T\} \le \gamma h_k, \tag{3.6}$$

где $\gamma > 0$ — некоторая константа, которая не зависит от номера k и определяется по априори известным данным о задаче,

$$\Lambda_k(t) = \|\varphi(\cdot; K(\vartheta, t)X(t)) - \varphi(\cdot; K(\vartheta,t)Y_k(t))\|_*^2 + \alpha(h_k)\int_{t_0}^{t} [\|u_k(\tau)\|_m^2 - \|u_*(\tau)\|_m^2] d\tau.$$

Из полученной оценки функционала Λ_k следует

$$\max\{\|\varphi(\cdot; K(\vartheta,t)X(t)) - \varphi(\cdot; K(\vartheta,t)Y_k(t))\|_*^2 : t \in T\} \le \gamma h_k + 2\alpha(h_k)b(\vartheta - t_0),$$
$$b = \sup\{\|w\|^2 : w \in P\}, \quad \omega(u_k)^2 \le \omega(u_*)^2 + \gamma h_k/\alpha(h_k).$$

Из последних оценок вытекает

$$\omega(u_k) \to \omega(u_*), \;\; u_k \to u_* \;\text{ слабо в }\; L^2(T; R^m).$$

Поэтому $u_k \to u_*$ сильно в $L^2(T; R^m)$, а в силу ограниченности множества U в $L^\infty(T; R^m)$ имеем также сходимость $u_k \to u_*$ сильную в $L^p(T; R^m)$, $1 \le p < \infty$. $\square$

4. Нелинейная модель

Пусть управляемая система (1.1) имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x, u) = f_1(t, x) + f_2(t, x)u, \quad t_0 \le t \le \vartheta, \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.1}$$

где f_1 — липшицева функция $T \times R^n \to R^n$, f_2 — матрица размерности $n \times m$ с липшицевыми элементами-функциями $T \times R^n \to R$. Пусть ограничения на допускаемые управления, критерий близости управлений, критерий отбора управлений являются такими же, как в предыдущем параграфе. Примем, что информационное множество состояния системы (4.1) представляет собой упорядоченный набор из l точек пространства R^n, который будем трактовать как элемент пространства $(R^n)^l = R^n \times \cdots (l \text{ раз}) \cdots \times R^n$. Пусть критерий аппроксимации информационных множеств определяется метрикой пространства $(R^n)^l$ и $M = (R^n)^l$. В качестве системы-модели примем декартово произведение из l экземпляров системы (4.1): $g = \overline{f} = f \times \cdots (l \text{ раз}) \cdots \times f$. Стратегию V отождествим с отображением $T \times (R^n)^l \times (R^n)^l \to P$.

Перейдем к описанию алгоритма D. Зафиксируем произвольные $h > 0$, $X_0 \in (R^n)^l$, $X(\cdot) \in X(\cdot; t_0, X_0, U)$, $Z(\cdot) \in Z[h, X(\cdot)]$, разбиение Δ отрезка T, удовлетворяющее условию (3.2). Рассмотрим управление u_h, сформированное по правилу

$$u_h(t) = v_i, \;\; t_i \le t < t_{i+1}, \;\; i = 0, \ldots, m-1, \;\; u_h(\vartheta) = v_{m-1}, \tag{4.2}$$

где $v_i = V(t_i, Z(t_i), Y(t_i))$ — элемент множества P, доставляющий минимум квадратичному функционалу

$$H_i(v) = 2\langle\langle Z(t_i) - Y(t_i), \overline{f}_2(t_i, Z(t_i))v\rangle\rangle_0 + \alpha(h)\|v\|_m^2$$

(минимизирующий элемент существует и является единственным), здесь $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_0$ — скалярное произведение в $(R^n)^l$ ($\|\cdot\|_0$ — норма в этом пространстве); $\alpha = \alpha(h)$ — параметр регуляризации, удовлетворяющий условию (3.4);

$$\begin{gathered}
\overline{f}_2(t, Z(t))v = (f_2(t, z_1(t))v, \ldots, f_2(t, z_l(t))v), \\
Z(t) = (z_1(t), \ldots, z_l(t)), \quad Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_l(t)), \\
y_j(t_i) = y_j(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tau, y_j(\tau), v_{i-1}) d\tau, \\
y_j(t_0) = z_j(t_0), \quad 1 \le j \le l.
\end{gathered}$$

Предпоследнее равенство можно заменить шагом Эйлера

$$y_j(t_i) = y_j(t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1}) f(t_{i-1}, y_j(t_{i-1}), v_{i-1}).$$

Определим теперь алгоритм D, как и в предыдущем случае, равенством

$$D(h, Z(\cdot)) = u_h. \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Алгоритм* (4.1)–(4.3) *решает задачу* 1.1.

Доказательство теоремы 4.1 аналогично доказательству теоремы 3.1. В качестве оценочного функционала Λ_k следует только выбрать функционал

$$\Lambda_k(t) = \|X(t) - Y_k(t)\|_0^2 + \alpha(h_k) \int_{t_0}^{t} [\|u_k(\tau)\|_m^2 - \|u_*(\tau)\|_m^2] d\tau,$$

для которого справедлива оценка вида (3.6).

5. Вариант задачи с уточнением информации

Полученные результаты можно распространить и на тот случай, когда наблюдатель имеет возможность уточнять по ходу процесса информационную область $G(t)$, располагая в момент времени $t_2 > t_1$ информационной областью $G(t_2)$, являющейся некоторым подмножеством сечения в момент времени t_2 пучка движений системы, вышедшего в момент времени t_1 из множества $G(t_1)$ под действием некоторого допустимого управления. При подобном характере уточнения информации можно считать, что информационная область $G(t)$ представляет собой сечение в момент времени t некоторого пучка движений системы, вышедшего в момент времени t_0 из некоторого множества $G^*(t) \subseteq G(t_0)$ под действием некоторого подходящего допустимого управления. Ясно, что $G^*(t_0) = G(t_0)$ и при $t_2 \geq t_1$ должно выполняться включение $G^*(t_2) \subseteq G^*(t_1)$. Пусть $\Gamma = \Gamma(t, \tau, N)$, $\tau \in T$, $t \in [\tau, \vartheta]$, $N \in \mathrm{sub}(R^n)$, обозначает закон, согласно которому со временем осуществляется уточнение множества начальных состояний N при переходе от момента времени τ к моменту времени t. В качестве основных и естественных требований на закон Γ, при которых остаются справедливыми результаты данной работы, можно предложить следующие требования: 1) $\Gamma(t, t, N) = N$; 2) $\Gamma(t_2, \tau, N) \subseteq \Gamma(t_1, \tau, N)$ при $t_2 \geq t_1$; 3) существует такое число $C > 0$, что для любых $\tau \in T$, $t \in [\tau, \vartheta]$, $N_1 \in M$, $N_2 \in M$ выполняется неравенство

$$\nu(\Gamma(t, \tau, N_1), \Gamma(t, \tau, N_2)) \leq C\, \nu(N_1, N_2).$$

Содержательный смысл последнего условия состоит в том, что при уточнении информации о движении системы соответствующее уточнение множеств начальных состояний должно быть таким, чтобы оно не на много превосходило по критерию ν того рассогласования, которое было в исходный момент времени. Отметим, что для конкретизации задачи из § 4 это условие выполняется заведомо, поскольку число точек в упорядоченном наборе будет уменьшаться.

Для данного варианта задачи все конструкции из предыдущих параграфов сохраняются полностью, следует только иметь в виду, что теперь переход в модели от множества $Y(t_i)$ к множеству $Y(t_{i+1})$ должен осуществляться с учетом уточнения: $Y(t_{i+1})$ есть сечение в момент времени t_{i+1} пучка движений модели, вышедшего в момент времени t_i из множества $\Gamma(t_{i+1}, t_i, Y(t_i))$ под действием управления

$$v = v_i = V(t_i, Z(t_i), Y(t_i)), \quad i = 0, \ldots, m-1.$$

Литература

1. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions.* – London: Gordon and Breach, 1995. – 586 p.
2. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. *О моделировании управления в динамической системе* // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернет. – 1983. – № 2. – С. 51–60.
3. Осипов Ю.С. *Задачи динамического восстановления* // Число и мысль. – М., 1987. – Вып. 10. – С. 7–27.
4. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* – М.: Наука, 1968. – 476 с.
5. Красовский Н.Н. *Игровые задачи о встрече движений.* – М.: Наука, 1970. – 420 с.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* – М.: Наука, 1974. – 456 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* – М.: Наука, 1981. – 287 с.
8. Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* – М.: Наука, 1977. – 392 с.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1979. – 288 с.
10. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.

11. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. *Некорректные задачи математической физики и анализа.* – М.: Наука, 1980. – 288 с.
12. Васин В.В., Агеев А.Л. *Некорректные задачи с априорной информацией.* – Екатеринбург: Уральская издательская фирма "Наука", 1993. – 263 с.
13. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 622 с.
14. Короткий А.И. *Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 101–124.

Институт математики и механики
Уральского Отделения
Российской Академии Наук

Поступила
08.09.1997