ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 7 (482)

УДК 517.982

Е.М. СЕМЕНОВ, К. ФРАНКЕТТИ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ПЕРЕСТАНОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Введение

Структура подпространств перестановочно-инвариантных (r. i.) пространств изучалась многими авторами ([1]–[3]). Возможно, простейшим подпространством коразмерности 1 является подпространство

$$Q = \left\{ x : \int_0^1 x(t)\,dt = 0 \right\}. \tag{1}$$

В [4] и [5] было доказано, что Q 1-дополняемо в r. i. пространстве E тогда и только тогда, когда $E = L_2$. Более общий результат для сепарабельных r. i. пространств содержится в [4].

В данной статье рассматриваются свойства $\|1 + x\|_E$, где $x \in E \cap Q$, найдено характеристическое свойство L_2 в классе r. i. пространств, введена новая характеристика

$$\gamma(E) = \inf \|1 + x\|_E, \tag{2}$$

где inf берется по всем $x \in E \cap Q$, $\|x\|_E = 1$. Легко вычислить $\gamma(L_p)$ для $p = 1, 2, \infty$. Для остальных значений p найдется двусторонняя оценка $\gamma(L_p)$. Если E — равномерно выпуклое пространство, то $\gamma(E) > 1$. Однако равномерная выпуклость не является необходимым условием для того, чтобы $\gamma(E) > 1$. Доказывается, что в классе пространств Лоренца $\gamma(\Lambda(\varphi)) > 1$, если $\Lambda(\varphi) \neq L_\infty, L_1$ с точностью до эквивалентности. Задача об изучении $\gamma(E)$ связана с константой Юнга [6] и чебышевскими центрами.

1. Определения и понятия

Банахово функциональное пространство E на $[0,1]$ с мерой Лебега называется перестановочно-инвариантным (r. i.) или симметричным, если условия $x^*(t) \le y^*(t)$ для всех $t \in [0,1]$ и $y \in E$ влекут $x \in E$ и $\|x\|_E \le \|y\|_E$, где $x^*(t)$ обозначает убывающую перестановку $|x(t)|$. Будем предполагать, что E сепарабельно или изометрично сопряженному пространству. Из теоремы Кальдерона–Митягина вытекает, что E интерполяционно с константой 1 относительно L_1, L_∞. Каждое r. i. пространство имеет так называемое свойство Фату: если $0 \le x \in E$ и $x_n(t) \uparrow x(t)$ почти везде, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_E = \|x\|_E$.

Для каждого r. i. пространства E

$$L_\infty \subset E \subset L_1. \tag{3}$$

Первый автор был частично поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, грант 98-01-00044 и фондом "Университеты России", грант 3667. Он благодарит факультет прикладной математики и институт "Дж. Сансоне" за гостеприимство и поддержку его визита в университет Флоренции в октябре–ноябре 1999 года.

Для определенности будем предполагать, что $\|\varkappa_{[0,1]}\|_E = 1$, где через $\varkappa_e(t)$ обозначена характеристическая функция измеримого множества $e \subset [0,1]$. Тогда

$$\|x\|_{L_1} \le \|x\|_E \le \|x\|_{L_\infty} \tag{4}$$

для всех $x \in L_\infty$ (левое неравенство справедливо для всех $x \in E$).

Будем рассматривать двойственное пространство E' всех измеримых функций $x(t)$ таких, что $\int_0^1 x(t)y(t)\,dt < \infty$ для всех $y \in E$ с нормой

$$\|x\|_{E'} = \sup\left\{ \int_0^1 x(t)y(t)\,dt : \|y\|_E \le 1\right\}.$$

Для каждого r. i. пространства E вложение $E \subset E''$ изометрично. Если E сепарабельно, то $E' = E^*$. Здесь и далее равенство $E = F$ двух r. i. пространств означает, что множества E, F совпадают и $\|x\|_E = \|x\|_F$ для всех $x \in E$. Если нормы E и F эквивалентны, будем писать $E \cong F$.

Будем писать $x \prec y$, если

$$\int_0^\tau x^*(t)\,dt \le \int_0^\tau y^*(t)\,dt$$

для всех $\tau \in [0,1]$. В этом случае

$$\|x\|_E \le \|y\|_E \tag{5}$$

для любого r. i. пространства E.

Функция $\varphi_E(s) = \|\varkappa\|_E$, где $\operatorname{mes} e = s$, называется фундаментальной функцией E.

Оператор растяжения

$$\sigma_\tau(t) = \begin{cases} x(t/\tau), & \text{если } 0 \le t \le \min(1,\tau); \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0,1] \end{cases}$$

действует в любом r. i. пространстве E и $\|\sigma_\tau\|_E \le \max(1,\tau)$ для всех $\tau > 0$.

Напомним некоторые классические примеры r. i. пространств. Обозначим через Ω множество возрастающих вогнутых функций $\varphi(t)$ на $[0,1]$ таких, что $\varphi(0) = 0$. Каждая $\varphi \in \Omega$ порождает пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ с нормой

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(t)\,d\varphi(t)$$

и пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ с нормой

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{0<\tau\le 1} \frac{1}{\varphi(\tau)} \int_0^\tau x^*(t)\,dt.$$

Для всякой $\varphi \in \Omega$ $(\Lambda(\varphi))' = M(\varphi)$. Если φ непрерывна в 0, то $\Lambda(\varphi)$ сеперабельно и $(\Lambda(\varphi))^* = M(\varphi)$. Предположение $\|\varkappa_{[0,1]}\|_{\Lambda(\varphi)} = 1$ означает, что $\varphi(1) = 1$.

Напомним, что модуль непрерывности $\delta_E(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \le 2$, банахова пространства E определяется следующим образом:

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2},\ x, y \in E,\ \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| = \varepsilon\right\}.$$

Известно, что

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2},\ x, y \in E,\ \|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1,\ \|x-y\| \ge \varepsilon\right\}. \tag{6}$$

Если $\delta_E(\varepsilon) > 0$ для каждого $\varepsilon > 0$, то E называется равномерно выпуклым. Все упомянутые выше свойства r. i. пространств содержатся в [1]–[3].

2. Характеристическое свойство L_2

В силу (3) множество $E \cap Q$ (Q определено в (1)) замкнуто в E для любого r. i. пространства E. Для каждого $x \in E$ существуют $y \in E \cap Q$ и $a \in \mathbb{R}^1$ такие, что $x = a + y$. Действительно, $a = \int_0^1 x(t)\,dt$ и $y = x - a$.

Теорема 1. *Пусть E — r. i. пространство. Следующие условия эквивалентны:*

i) *если $x \in E \cap Q$, то*

$$\|1 + x\|_E^2 \geq 1 + \|x\|_E^2; \tag{7}$$

ii) *если $x \in E \cap Q$, то*

$$\|1 + x\|_E^2 \leq 1 + \|x\|_E^2; \tag{8}$$

iii) *$E = L_2$.*

Доказательство. Так как функции 1 и x ортогональны, то $\|1 + x\|_{L_2}^2 = 1 + \|x\|_{L_2}^2$ для всех $x \in L_2 \cap Q$. Поэтому iii) влечет i) и ii).

i) $\to$ iii). Прежде всего заметим, что (7) влечет $\|a + x\|_E^2 \geq a^2 + \|x\|_E^2$, где $a \in \mathbb{R}^1$ и $x \in E \cap Q$. Отсюда

$$\|a + x\|_E \geq \|x\|_E. \tag{9}$$

Рассмотрим одномерный оператор

$$Px(t) = \int_0^1 x(s)\,ds\,\varkappa_{[0,1]}(t).$$

Ясно, что P — ортогональный проектор на пространство постоянных функций. Неравенство (9) означает

$$\|(I - P)y\|_E \leq \|y\|_E$$

для всех $y \in E$. Поэтому $\|I - P\|_E = 1$. В [5] было доказано, что это равенство влечет $E = L_2$.

ii) $\to$ iii). Из (8) вытекает

$$\|s + x\|_E \leq \left(s^2 + \|x\|_E^2\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Функция $F_x(s) = \|s + x\|_E$ выпукла и $F_x(0) = \|x\|$. В силу (10) $\frac{d}{ds}F_x(s)|_{s=0} = 0$. Отсюда $F_x(s) \geq \|x\|_E$. Другими словами, справедливо (9). Выше было показано, что (9) влечет равенство $E = L_2$. $\square$

В доказательстве импликации i) $\to$ iii) вместо (7) можем использовать более слабое неравенство $\|1 + x\|_E \geq \|x\|_E$.

Для заданного r. i. пространства E определим

$$\beta(E) = \inf\left\{\|x + y\|_E :\ x, y \in E,\ \|x\|_E \geq 1,\ \|y\|_E \geq 1,\ xy \in L_1,\ \int_0^1 xy\,dt = 0\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть E — r. i. пространство. Тогда $\beta(E) > 0$ справедливо в том и только том случае, когда $E \cong L_2$.*

Доказательство. Ясно, $\beta(L_2) = \sqrt{2}$. Поэтому требуется доказать, что $\beta(E) = 0$ для любого r. i. пространства E, которое не совпадает с L_2 с точностью до эквивалентности.

Предположим $E \subset L_2$ и $E \neq L_2$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $u \in E$ такой, что $\|u\|_E = 1$, $\|u\|_{L_2} \leq \varepsilon$ и $\operatorname{supp} u \subset (1/2, 1)$. Положим

$$x(t) = \sqrt{2}\|u\|_{L_2}\varkappa_{(0,\frac{1}{2})}(t) + u(t), \quad y(t) = \sqrt{2}\|u\|_{L_2}\varkappa_{(0,\frac{1}{2})}(t) - u(t).$$

Тогда

$$\|x\|_E = \|y\|_E \geq \|u\|_E = 1, \quad \int_0^1 x(t)y(t)\,dt = 2\|u\|^2_{L_2}\frac{1}{2} - \int_{1/2}^1 u^2(t)\,dt = 0$$

и

$$\|x+y\|_E = 2\sqrt{2}\|u\|_{L_2}\|\varkappa_{(0,\frac{1}{2})}\|_E \leq 2\sqrt{2}\varepsilon.$$

Эти оценки доказывают наше утверждение в первом случае.

Пусть E — несепарабельное r. i. пространство, $E \neq L_\infty$. Обозначим через E_0 замыкание L_∞ в E. Тогда E_0 есть сепарабельное подпространство E. Если $E_0 \subset L_2$, то и $E \subset L_2$. Действительно,

$$\|x\|_{L_2} \leq C\|x\|_E$$

для некоторого $C > 0$ и всех $x \in E_0$. Если $y \in E$ и y_n — соответствующая последовательность срезок, то $\|y_n\|_{L_2} \leq C\|y_n\|_E$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ Устремляя n к бесконечности, в силу свойства Фату получаем

$$\|y\|_{L_2} \leq C\|y\|_E.$$

Это означает, что $E \subset L_2$.

Теперь рассмотрим случай $E \not\subset L_2$. Сделанное выше замечание показывает, что $E_0 \not\subset L_2$. Следовательно, достаточно доказать равенство $\beta(E) = 0$ при дополнительном предположении, что E сепарабельно.

Выберем $y \in E \setminus L_2$, $y = y^*$, $\|y\|_E = 1$. Сепарабельность E влечет абсолютную непрерывность нормы ([3], теорема 1.4.1). Поэтому существует последовательность $t_n \downarrow 0$ такая, что

$$\|y\varkappa_{0,t_n)}\|_E < 1/n$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$ Так как $y \notin L_2$, то

$$\lim_{s\to 0}\|y\varkappa_{(s,t_n)}\|_{L_2} = \infty.$$

Используя это равенство, можем найти $s_n \in (0, t_n)$ такое, что

$$\int_{s_n}^{t_n} y^2(t)\,dt = \int_{t_n}^1 y^2(t)\,dt.$$

В силу свойства Фату

$$\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \|y\varkappa_{(s_n,1)}\|_E$$

стремится к 1. Положим

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq s_n; \\ y(t)/\lambda_n, & s_n < t < t_n; \\ -y(t)/\lambda_n, & t_n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ясно, $\|x_n\|_E = 1$ и

$$\int_0^1 x_n(t)y(t)\,dt = \frac{1}{\lambda_n}\left(\int_{s_n}^{t_n} y^2(t)\,dt - \int_{t_n}^1 y^2(t)\,dt\right) = 0$$

для каждого $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда

$$\beta(E) \leq \lim_{n\to 0}\|x_n + y\|_E \leq \lim_{n\to\infty}\left(\|y\varkappa_{(0,s_n)}\|_E + \|y\varkappa_{(s_n,t_n)}\|_E\left(\frac{1}{\lambda_n}+1\right) + \right.$$
$$\left. + \|y\varkappa_{(t_n,1)}\|\left(\frac{1}{\lambda_n}-1\right)\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\lambda_n}+1\right)+\frac{1}{\lambda_n}-1\right) = 0. \quad \square$$

Для заданных r. i. пространств E, $x \in E$, рассмотрим функционал

$$F(x) = \inf\left\{\|x+y\|_E : y \in E,\ \|y\|_E \geq 1,\ xy \in L_1,\ \int_0^1 xy\,dt = 0\right\}.$$

В теореме 1 было доказано, что $\inf\{F(x) : \|x\|_E = 1\} = 0$, если $E \subset L_2$, $E \neq L_2$. Однако $F(x) > 0$ для каждого $x \neq 0$. Предполагая противное, можем найти последовательность $y_n \in E$, $\|y_n\|_E \geq 1$, такую, что $\|x + y_n\| \to 0$ и $\int_0^1 xy_n\,dt = 0$. Для каждого $x \in E$ функционал $y \to \int_0^1 xy\,dt$ непрерывен и y_n стремится к $-x$. Отсюда $\int_0^1 -x^2\,dt = 0$. Полученное равенство противоречит предположению $x \neq 0$. Если $E \not\subset L_2$, то $E_0 \not\subset L_2$ и $F(x) = 0$ для каждого $x \in E_0 \setminus L_2$.

3. Характеристика, связанная с ортогональностью

В этом параграфе будет изучена характеристика $\gamma(E)$, определенная в (2).

Лемма 1. *Пусть E — r. i. пространство, тогда*

$$\gamma(E) = \inf_{x \in E \cap Q,\ \|x\| \geq 1} \|1 + x\|_E.$$

Доказательство. Вначале докажем неравенство

$$\gamma(E) \geq 1. \tag{11}$$

Пусть $x \in E \cap Q$, $\|x\|_E = 1$, $\tau \in (0, 1)$. Тогда существует подмножество $e \subset [0, 1]$ такое, что $\operatorname{mes} e = \tau$ и

$$\int_e x(t)\,dt \geq 0.$$

Поэтому

$$\sup_{\operatorname{mes} g = \tau} \int_g |1 + x(t)|\,dt \geq \int_e (1 + x(t))\,dt \geq \tau.$$

Это означает $|1 + x| \succ \varkappa_{[0,1]}$. Используя свойство (5), имеем $\|1 + x\| \geq \|\varkappa_{[0,1]}\|_E = 1$.

Для заданного $x \in E \cap Q$, $\|x\|_E = 1$, рассмотрим функцию

$$f_x(s) = \|1 + sx\|_E.$$

Повторяя использованные выше аргументы, видим, что $f_x(s) \geq 1$ для каждого $s \in \mathbb{R}^1$. Так как $f_x(0) = 1$, то $f_x(s)$ убывает для $s \leq 0$ и возрастает для $s \geq 0$. Следовательно, $f_x(s) \geq f_x(1)$ для каждого $s \geq 1$. $\square$

Теперь можем дать простые примеры вычисления $\gamma(E)$. Так как Q и 1 ортогональны, то $\gamma(L_2) = \sqrt{2}$.

Положим $r_1(t) = \operatorname{sign} \sin 2\pi t$. Так как $r_1 \in L_1 \cap Q$, $\|r_1\|_{L_1} = \|1 + r_1\|_{L_1} = 1$, то $\gamma(L_1) = 1$.

Рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = -\varkappa_{(0,\frac{1}{n})}(t) + \frac{1}{n-1}\varkappa_{(\frac{1}{n},1)}(t), \quad n = 2, 3, \ldots$$

Ясно, что $x_n \in L_\infty \cap Q$, $\|x_n\|_{L_\infty} = 1$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|1 + x_n\|_{L_\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1.$$

Поэтому $\gamma(L_\infty) = 1$.

Докажем, что $\gamma(M(\varphi)) = 1$ для каждой $\varphi \in \Omega$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\varphi(t)} = 0.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\left(\varkappa_{(0,\frac{1}{2n})}(t) - \varkappa_{(\frac{1}{2n},\frac{1}{n})}(t)\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Имеем $x_n \in M(\varphi) \cap Q$, $\|x_n\|_{M(\varphi)} = 1$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|1 + x_n\|_{M(\varphi)} \le \lim_{n\to\infty} \|1 + |x_n|\,\|_{M(\varphi)} = \lim_{n\to\infty} \max\left(\frac{(n\varphi(\frac{1}{n}) + 1)\frac{1}{n}}{\varphi(\frac{1}{n})},\ n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \max\left(1 + \frac{1}{n\varphi(\frac{1}{n})},\ \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right) = 1.$$

Применяя полученную оценку и (11), получаем $\gamma(M(\varphi)) = 1$. Если $\varphi_0(t) = \operatorname{sign} t$, $\varphi_1(t) = t$, то $M(\varphi_0) = L_1$ и $M(\varphi_1) = L_\infty$. Эти случаи были рассмотрены ранее.

Теорема 3. *Если r. i. пространство E равномерно выпукло, то $\gamma(E) > 1$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $x \in E \cap Q$ такой, что $\|x\|_E = 1$ и $\|1 + x\| \le \gamma(E) + \varepsilon$. Тогда

$$\left\|\frac{\varkappa_{[0,1]}}{\gamma(E) + \varepsilon}\right\| < 1, \quad \left\|\frac{1 + x}{\gamma(E) + \varepsilon}\right\| \le 1.$$

В силу (11) $\left\|1 + \frac{x}{2}\right\| \ge 1$. Отсюда

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\gamma(E) + \varepsilon} + \frac{1 + x}{\gamma(E) + \varepsilon}\right\| \ge \frac{1}{\gamma(E) + \varepsilon}.$$

Используя (6), получаем

$$\delta_E\left(\frac{1}{\gamma(E) + \varepsilon}\right) \le 1 - \frac{1}{\gamma(E) + \varepsilon}.$$

При $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\delta_E\left(\frac{1}{\gamma(E)}\right) \le 1 - \frac{1}{\gamma(E)}.$$

Так как $\gamma(E) \le 2$, то

$$\gamma(E) \ge \frac{1}{1 - \delta_E\left(\frac{1}{\gamma(E)}\right)} \ge \frac{1}{1 - \delta_E\left(\frac{1}{2}\right)} > 1. \quad \square$$

Таким образом, равномерная выпуклость r. i. пространства E — достаточное условие для $\gamma(E) > 1$. Однако оно не является необходимым. Докажем, что $\gamma(\Lambda(\varphi)) > 1$ для широкого подмножества $\varphi \in \Omega$.

Для этого необходимо установить некоторые вспомогательные утверждения. Обозначим через K конус убывающих функций $x(t)$, удовлетворяющий условию $\int_0^1 x(t)\,dt = 0$. Для заданного $x \in L_1$ положим $x_+(t) = \max(x(t), 0)$, $x_-(t) = \max(-x(t), 0)$.

Очевидно, $\varphi(t) \ge t$ для всех $t \in [0, 1]$, $\varphi \in \Omega$. В частности, $\varphi(1/2) \ge 1/2$.

Лемма 2. *Пусть $\varphi \in \Omega$ и*

$$\mu = \varphi(1/2) - 1/2 > 0.$$

Если $x \in \Lambda(\varphi) \cap K$, то

$$\int_0^1 x(t)\,d\varphi(t) \ge \mu \int_0^1 x_+(t)\,d\varphi(t).$$

Доказательство. Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$. Рассмотрим функционал

$$F(x) = \int_0^1 x(t)\,d\varphi(t)$$

и множество функций

$$y_{a,\alpha,\beta}(t) = a\varkappa_{[0,\alpha]}(t) - b\varkappa_{[\beta,1]}(t),$$

где $a, b > 0$, $0 < \alpha \le \beta < 1$ и $a\alpha = b(1 - \beta)$. Обозначим через $\overline{\varphi}(t)$ функцию, которая совпадает с $\varphi(t)$ в точках $0, 1/2, 1$ и линейна на промежутках $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$. Ясно, $\overline{\varphi} \in \Omega$ и $\overline{\varphi} \le \varphi$, $y_{a,\alpha,\beta} \in K$.

Так как функция $f(t)=\frac{t}{1-t}$ возрастает на $[0,1)$, то $f(\varphi(t))\ge f(\overline{\varphi}(t))$. Простые вычисления показывают, что $f(\overline{\varphi}(t))\ge(1+2\mu)f(t)$. Отсюда $f(\varphi(t))\ge(1+2\mu)f(t)$ и

$$\frac{\varphi(t)}{t}\ge(1+2\mu)\frac{1-\varphi(t)}{1-t}$$

для всех $0<t<1$. Функция $\frac{\varphi(t)}{t}$ убывает, а функция $\frac{1-\varphi(t)}{1-t}$ возрастает на $(0,1)$. Поэтому

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\ge(1+2\mu)\frac{1-\varphi(\beta)}{1-\beta}$$

для всех $0<\alpha<\beta<1$. Отсюда

$$F(y_{a,\alpha,\beta})=a\varphi(+0)+a\varphi(\alpha)-b(1-\varphi(\beta))\ge a\varphi(+0)+a\varphi(\alpha)-\frac{(1-\beta)b\varphi(\alpha)}{\alpha(1+2\mu)}=$$
$$=a\varphi(+0)+a\varphi(\alpha)\left(1-\frac{1}{1+2\mu}\right)=a\varphi(+0)+\frac{2\mu}{1+2\mu}a\varphi(\alpha)\ge\mu\left(a\varphi(+0)+a\varphi(\alpha)\right)=\mu F\left((y_{a,\alpha,\beta})_+\right). \tag{12}$$

Пусть $x(t)$ — ступенчатая функция из K. Обозначим через θ любое число из $(0,1)$ такое, что $x(t)\ge0$ для $t\in(0,\theta)$ и $x(t)\le0$ для $t\in(\theta,1)$. Тогда существует последовательность $\alpha_i\in(0,\theta),\ \beta_i\in(\theta,1)$, $1\le i\le n$, такая, что $x\in\operatorname{conv}\{y_{a,\alpha_i,\beta_i},\ 1\le i\le n\}$, где $a\alpha=\int_0^1 x_+(t)\,dt$. Из (12) вытекает

$$F(x)\ge\mu\int_0^1 x_+(t)\,d\varphi(t). \tag{13}$$

В силу ([2], (2.2.25)) $F(z)\le F(z^*)=\|z\|_{\Lambda(\varphi)}$ для всех $z\in\Lambda(\varphi)$. Это означает, что F есть непрерывный линейный функционал на $\Lambda(\varphi)$. Множество ступенчатых функций из K плотно в K. Поэтому (13) справедливо для всех $x\in\Lambda(\varphi)\cap K$. $\square$

Лемма 3. *Предположим, что $\varphi\in\Omega$, $\varphi(1/2)>1/2$, φ непрерывна в 0, $x\in\Lambda(\varphi)\cap K$, $x(t)\ge-1$. Тогда*

$$\int_0^1 x(t)\,d\varphi(t)\ge\mu\varphi^{-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

где $\lambda=\|x\|_{\Lambda(\varphi)}$.

Доказательство. Без ограничения общности можем предполагать, что $x(t)+1$ убывает на $[0,1]$. В силу ([2], 2.4.1)

$$\int_0^\theta x(t)\,dt=\|x_+\|_{L_1}\le\|x_+\|_{\Lambda(\varphi)},$$

где число θ определено в доказательстве леммы 2. Так как

$$\int_0^\theta x\,dt=-\int_\theta^1 x\,dt,$$

то

$$\int_0^1 x_-\,dt\le\|x_+\|_{\Lambda(\varphi)}.$$

Согласно предположению $0\le x_-(t)\le1$ для каждого $t\in[0,1]$. Рассмотрим множество

$$\{z: z\in L_\infty,\ 0\le z\le1,\ \|z\|_{L_1}\le c\},$$

где $0<c<1$. Оно слабо компактно в $\Lambda(\varphi)$. Хорошо известно, что всякая экстремальная точка этого множества содержится в множестве $\{\varkappa_e,\ \operatorname{mes}e\le c\}$. По теореме Крейна-Мильмана $\|x_-\|_{\Lambda(\varphi)}\le\varphi(\|x_+\|_{\Lambda(\varphi)})$. Отсюда

$$\lambda=\|x\|_{\Lambda(\varphi)}\le\|x_+\|_{\Lambda(\varphi)}+\|x_-\|_{\Lambda(\varphi)}\le\|x_+\|_{\Lambda(\varphi)}+\varphi(\|x_+\|_{\Lambda(\varphi)})\le2\varphi(\|x_+\|_{\Lambda(\varphi)})$$

и $\|x_+\|_{\Lambda(\varphi)} \geq \varphi^{-1}(\lambda/2)$. В силу леммы 2

$$\int_0^1 x\,d\varphi \geq \mu\varphi^{-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right). \quad \square$$

Теорема 4. *Предположим, что* $\varphi \in \Omega$, φ *непрерывна в* 0, $\mu = \varphi(1/2) - 1/2 > 0$. *Тогда* $\gamma(\Lambda(\varphi)) > 1$.

Доказательство. Допустим $x \in \Lambda(\varphi)$, $\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = 1$, $\int_0^1 x\,dt = 0$. Положим

$$u(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } x(t) \leq -1; \\ x(t), & \text{если } -1 < x(t) < 0; \\ a, & \text{если } x(t) \geq 0, \end{cases}$$

где a выбрано так, что $\int_0^1 u(t)\,dt = 0$. Положим

$$v(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } x(t) \leq -2; \\ x(t)+1, & \text{если } -2 \leq x(t) < -1; \\ 0, & \text{для остальных } t \in [0,1], \end{cases}$$

$w(t) = x(t) - u(t) - v(t)$, $e = \{t : -1 < x(t) < 0\}$.

Обозначим $\|u\|_{\Lambda(\varphi)} = \lambda$. В силу леммы 3

$$\|1+x\|_{\Lambda(\varphi)} \geq \|1+u\|_{\Lambda(\varphi)} \geq 1 + \mu\varphi^{-1}(\lambda/2). \tag{14}$$

Так как $|v(t)| \leq |u(t)|$ для каждого $t \in [0,1]$, то $\|v\|_{\Lambda(\varphi)} \leq \|u\|_{\Lambda(\varphi)} = \lambda$ и

$$\|w\|_{\Lambda(\varphi)} \geq \|x\|_{\Lambda(\varphi)} - \|u\|_{\Lambda(\varphi)} - \|v\|_{\Lambda(\varphi)} \geq 1 - 2\lambda.$$

Ясно, что $\operatorname{sign} w(t) = \operatorname{sign}(1 + u(t) + v(t))$ для всех $t \in [0,1]$ и $|1 + u(t) + v(t)| \geq 1$ для всех $t \in [0,1] \setminus e$. Отсюда

$$\|1+x\|_{\Lambda(\varphi)} \geq 1 + \|w\|_{\Lambda(\varphi)} - \|u\varkappa_e\|_{\Lambda(\varphi)} \geq 2 - 2\lambda - \lambda = 2 - 3\lambda. \tag{15}$$

Сравнивая (14) и (15), получаем $\|1+x\|_{\Lambda(\varphi)} \geq \min\limits_{0\leq\lambda\leq 1} \max(1 + \mu\varphi^{-1}(\lambda/2), 2 - 3\lambda)$. Для каждого $\mu > 0$ функция $G(\lambda) = \max(1 + \mu\varphi^{-1}(\lambda/2), 2 - 3\lambda)$ непрерывна и строго больше 1 для каждого $\lambda \in [0,1]$. Поэтому

$$\gamma(\Lambda(\varphi)) \geq \min_{0\leq\lambda\leq 1} G(\lambda) > 1. \quad \square$$

Выберем число $\nu \in (0,1)$ так, чтобы $\varphi(\nu) < 1/3$. Легко показать, что $\min\limits_{0\leq\lambda\leq 1} G(\lambda)$ зависит только от μ, ν. Следовательно, если пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ не совпадает с L_1 и L_∞ (с точностью до эквивалентности), то $\gamma(\Lambda(\varphi)) > 1$.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. *Тогда*

$$1 < \gamma(L_p) < \min(2^{\frac{1}{p}}, 2^{\frac{1}{p'}}),$$

где $1/p + 1/p' = 1$.

Доказательство. Левое неравенство вытекает из теоремы 3. Пусть $2 < p < \infty$. В параграфе 2 было отмечено, что $\|I - P\|_{L_p} > 1$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $y \in L_p$ такой, что

$$\left\| y - \int_0^1 y\,ds \right\|_{L_p} \geq (\|I - P\|_{L_p} - \varepsilon)\|y\|_{L_p}.$$

Без ограничения общности можно предполагать, что $\int_0^1 y\,ds = 1$. Тогда $\|y\|_{L_p} > 1$. Положим $y - 1 = z$. Тогда $\int_0^1 z\,dt = 0$ и

$$\|z\|_{L_p} \geq (\|I - P\|_{L_p} - \varepsilon)\|z + 1\|_{L_p}.$$

Выберем $\tau \in (0,1)$ такое, что $\|\sigma_\tau z\|_{L_p} = 1$, и обозначим $\sigma_\tau z = x$. Имеем $\|x\|_{L_p} = 1$, $\operatorname{supp} x \subset [0,\tau]$,

$$\int_0^1 x\,dt = 0,$$

и $\|x + \varkappa_{[0,\tau]}\|_{L_p} \leq (\|I - P\|_{L_p} - \varepsilon)^{-1}\|x\|_{L_p}$. Отсюда

$$\|x + 1\|_{L_p} \leq \left(\|x + \varkappa_{[0,\tau]}\|_{L_p}^p + \|\varkappa_{[\tau,1]}\|_{L_p}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left((\|I - P\|_{L_p} - \varepsilon)^{-p} + 1\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из полученного неравенства вытекает

$$\gamma(L_p) \leq \left(\frac{1}{\|I - P\|_{L_p}^p} + 1\right)^{1/p} < 2^{1/p}.$$

Пусть $1 < p < 2$. Для заданного $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ рассмотрим функцию

$$x_\theta(t) = a\varkappa_{(0,\theta)}(t) - b\varkappa_{(\theta,1)}(t),$$

где $a\theta = b(1-\theta)$ и $a^p\theta + b^p(1-\theta) = 1$. Эти равенства означают

$$\int_0^1 x_\theta\,dt = 0, \quad \|x_\theta\|_{L_p} = 1.$$

Очевидно, $\|1 + x_{1/2}\|_{L_p} = 2^{1-\frac{1}{p}}$. Простые, но достаточно громоздкие вычисления показывают, что

$$\frac{d}{d\theta}\|1 + x_\theta\|_{L_p}\big|_{\theta = \frac{1}{2} - 0} = 2^{\frac{1}{p}}\frac{2-p}{p} > 0.$$

Поэтому $\|1 + x_\theta\|_{L_p} < 2^{1-\frac{1}{p}}$, если $\theta < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} - \theta$ достаточно мало.

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Существует элемент $x \in L_p$ такой, что $\|x\|_{L_p} = 1$,

$$\|1 + x\|_{L_p} < \min(2^{1/p}, 2^{1/p'}) \tag{16}$$

и

$$\|1 + sx\|_{L_p} \geq 1 \tag{17}$$

для любого $s \in \mathbb{R}^1$.

Действительно, в силу теоремы 5 существует элемент $x \in L_p$ такой, что $\|x\|_{L_p} = 1$, $\int_0^1 x\,dt = 0$ и справедливо (16). Для того чтобы доказать (17), рассмотрим функцию

$$F(s) = \int_0^1 |1 + sx(t)|^p\,dt.$$

Так как $F(s)$ выпукла, $F(0) = \|\varkappa_{[0,1]}\|_{L_p} = 1$ и

$$\frac{d}{ds}F(s)\Big|_{s=0} = p\int_0^1 x(t)\,dt = 0,$$

то (17) удовлетворяется для любого $s \in \mathbb{R}^1$.

Такие результаты полезны при изучении чебышевских центров ограниченных выпуклых множеств в нормированных пространствах.

Теперь получим верхнюю оценку $\gamma(E)$ для произвольного r. i. пространства E.

Лемма 4. *Существует ступенчатая функция y такая, что* $\int_0^1 y(t)\,dt = 0$ *и для любого r. i. пространства E $\|y\|_E \geq 1$ и*

$$\|1+y\|_E \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1.62. \tag{18}$$

Доказательство. В силу (3), (4) достаточно найти такую функцию y, что $\|y\|_{L_1} = 1$ и

$$\|1+y\|_{L_\infty} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{19}$$

Пусть $y(t) = a\varkappa_{(0,\theta)}(t) - b\varkappa_{(\theta,1)}(t)$, где $0 < a < b$ и

$$a\theta = b(1-\theta) = 1/2.$$

Тогда $y \in Q$, $\|y\|_{L_1} = 1$ и $\|1+y\|_{L_\infty} = \max(a+1, |-b+1|)$. Очевидно, этот max будет минимальным, если $a+1 = b-1$. Итак, имеем систему из трех уравнений с неизвестными a, b, θ. Решая ее, получим $\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$. Отсюда имеем (19). $\square$

Легко доказать, что константа $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ в (18) точная.

Следствие 2. Неравенство $\gamma(E) \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ справедливо для каждого r. i. пространства E.

Из следствия 2 и очевидного равенства $\gamma(L_2) = \sqrt{2}$ непосредственно следует

$$\sqrt{2} \leq \sup \gamma(E) \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

где sup берется по множеству всех r. i. пространств. Предположим, что $\gamma(E) \leq \sqrt{2}$ для любого r. i. пространства E. Если предположить дополнительно, что $E \subset L_2$ и $\|x\|_{L_2} \leq \|x\|_E$ для всех $x \in E$, то $\gamma(E) \leq \sqrt{2}$. Доказательство точно такое же, как и в лемме 4. Имеем следующие уравнения:

$$a+1 = b-1, \quad a\theta = b(1-\theta), \quad a^2\theta + b^2(1-\theta) = 1.$$

Отсюда $a+1 = b-1 = \sqrt{2}$.

Характеристика $\gamma(E)$ неустойчива относительно эквивалентных перенормировок. Имеет место

Теорема 6. *Пусть E — r. i. пространство и $\varepsilon > 0$. Существует такое r. i. пространство F, что $E \cong F$ и $\gamma(F) < 1+\varepsilon$.*

Доказательство. Для $x \in E$ положим

$$\|x\|_F = (1-\varepsilon)\|x\|_{L_1} + \varepsilon\|x\|_E.$$

В силу (3), (4) $E \cong F$. В начале этого параграфа мы упоминали, что $\|r_1\|_E = 1$, $r_1 \in E \cap Q$. Отсюда

$$\gamma(F) \leq \|1+r_1\|_F = (1-\varepsilon)\|1+r_1\|_{L_1} + \varepsilon\|1+r_1\|_E = (1-\varepsilon) + \varepsilon 2\varphi_E(1/2) \leq 1-\varepsilon+2\varepsilon = 1+\varepsilon. \quad \square$$

Теорема 6 ничего не говорит о r. i. пространствах с $\gamma(E) = 1$. Вообще говоря, в этом случае характеристика $\gamma(E)$ также неустойчива. Например, можно показать, что $\gamma(E) = \sqrt{2}$ для пространства L_1 с эквивалентной нормой

$$\|x\|_E = 2\int_0^{1/2} x^*(t)\,dt.$$

С другой стороны, если $F \cong L_\infty$ — r. i. пространство и $\varphi_F(+0) \geq \frac{1}{2}$, то $\gamma(F) = 1$.

Литература

1. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach Spaces.* II. *Function Spaces.* – Berlin: Springer, 1979. – 243 p.
2. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of Operators.* – Pure Appl. Math. – V. 129, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988. – 459 p.
4. Kalton N. Randrianantoanina B. *Isometries on rearrangement invariant spaces* // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. Math. – 1993. – V. 316. – P. 351–355.
5. Franchetti C., Semenov E.M. *A Hilbert space characterization among function spaces* // Anal. Math. – 1995. – V. 21. – P. 85–93.
6. Семенов Е.М., Франкетти К. *Геометрические свойства перестановочно-инвариантных пространств, связанные с константой Юнга* // Алгебра и анализ. – 1998. – Т. 10. – № 5. – С. 184–209.

Воронежский государственный университет
Университет Флоренции

Поступила
07.02.2000