*Известия вузов. Математика*
*2009, № 7, с. 71–76*

*http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
*e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

*Краткое сообщение, представленное членом редколлегии В.А. Срочко*

*А.В. АРГУЧИНЦЕВ, В.П. ПОПЛЕВКО*

# ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГЛАДКИМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

*Аннотация.* В работе рассмотрена составная задача оптимального управления системой гиперболических уравнений первого порядка, правая часть которой определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Допустимые управления принадлежат классу гладких функций. Для этой задачи получено условие оптимальности, разработана общая схема методов улучшения.

*Ключевые слова*: гиперболические системы, гладкие управления, необходимые условия оптимальности, метод улучшения.

*УДК*: 517.977

*Abstract.* In this paper we consider the optimal control problem for a system of first-order hyperbolic equations. The right-hand side of this system is determined by a control system of ordinary differential equations. Admissible controls belong to the class of smooth functions. We obtain an optimality condition and propose a general scheme of improvement methods for the mentioned problem.

*Keywords*: hyperbolic systems, smooth controls, necessary optimality conditions, improvement method.

В статье исследуется один специальный класс задач оптимального управления системами полулинейных гиперболических уравнений первого порядка. Рассматривается случай, когда функция, входящая в правую часть системы, определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачи такого типа возникают при моделировании ряда процессов химической технологии (расчет пусковых режимов, переходов от одного стационарного режима к другому и т. п.) [1].

С использованием методики [2] получено необходимое условие оптимальности гладких управлений, предложена основанная на этом условии схема метода улучшения и приведен иллюстративный пример.

Поступила 03.12.2008

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 08-01-00709, 08-01-98007.

**1. Постановка задачи с поточечными ограничениями на управление.** Рассмотрим задачу оптимизации системы полулинейных гиперболических уравнений первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x(s,t), y(t), s, t), \tag{1}$$
$$(s,t) \in \Pi, \quad \Pi = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1].$$

Здесь $x = x(s,t)$ — $n$-мерная вектор-функция, $A = A(s,t)$ — матрица размерности $n \times n$, $y(t)$ — $m$-мерная вектор-функция.

Предполагаем, что система (1) записана в инвариантном виде, т. е. матрица $A(s,t)$ диагональная. Дополнительно введем предположение, что диагональные элементы $a_i = a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы коэффициентов знакопостоянны в $\Pi$:

$$\begin{aligned} &a_i(s,t) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1; \\ &a_i(s,t) = 0, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2; \\ &a_i(s,t) < 0, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Составим две диагональные подматрицы: $A^+(s,t)$ размерности $m_1 \times m_1$ и $A^-(s,t)$ размерности $(n - m_2) \times (n - m_2)$ из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы $A$ соответственно. Из вектора состояния $x = x(s,t)$ выделим два подвектора, соответствующих положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы $A$:

$$x^+ = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}), \quad x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \ldots, x_n).$$

Начально-краевые условия для системы (1) зададим в следующем виде:

$$x(s, t_0) = x^0(s), \quad s \in S; \quad x^+(s_0, t) = \eta(t), \quad x^-(s_1, t) = \mu(t), \quad t \in T. \tag{2}$$

Функция $y(t)$ определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = g(y, u, t), \quad t \in T, \quad y(t_0) = y^0. \tag{3}$$

Задача рассматривается в классе гладких управляющих воздействий: управление $u(t)$ непрерывно дифференцируемо на отрезке $T$ и удовлетворяет поточечным ограничениям вида

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \tag{4}$$

где $U$ — компакт из $E^r$.

Целью задачи оптимального управления является минимизация функционала

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s, t_1), s) ds + \iint_\Pi F(x, s, t) ds\, dt, \tag{5}$$

определенного на решениях задачи (1)–(3) при допустимых управлениях, удовлетворяющих условию (4).

Задача оптимального управления (1)–(5) рассматривается при следующих предположениях:

1) диагональные элементы $a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы $A$ непрерывно дифференцируемы в прямоугольнике $\Pi$;

2) вектор-функции $\eta(t)$, $\mu(t)$ и $x^0(s)$ непрерывны соответственно на $T$ и $S$;

3) вектор-функция $g = g(y, u, t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имееет непрерывные и ограниченные частные производные по $y \in E^m$ и $u \in U$;

4) вектор-функция $f(x, y, s, t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по $x \in E^n$ и $y \in E^m$;

5) скалярные функции $\varphi = \varphi(x, s)$, $F = F(x, s, t)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по $x \in E^n$.

Решение начально-краевой задачи (1)–(2) понимается в обобщенном смысле как решение интегральной системы уравнений, построенной на характеристиках исходной гиперболической системы ([3], с. 53–59).

**2. Формула приращения целевого функционала.** Рассмотрим два допустимых процесса: базовый $\{u,\, y = y(t, u),\, x = x(s, t, u)\}$ и варьируемый $\{\widetilde{u} = u + \Delta u,\, \widetilde{y} = y + \Delta y = y(t, \widetilde{u}),\, \widetilde{x} = x + \Delta x = x(s, t, \widetilde{u})\}$.

Обозначим

$$\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u).$$

Очевидно,

$$\Delta J(u) = \int_S \Delta\varphi(x(s, t_1), s)ds + \iint_\Pi \Delta F(x, s, t)ds\,dt.$$

Проделаем ряд достаточно стандартных операций, обычно используемых при выводе необходимых условий оптимальности первого порядка.

Введем скалярные функции

$$H(\psi, x, y, s, t) = \langle \psi, f(x, y, s, t)\rangle - F(x, s, t),$$
$$h(p, y, u, t) = \langle p, g(y, u, t)\rangle.$$

Потребуем, чтобы вектор-функции $\psi(s, t)$ и $p(t)$ являлись решениями следующей сопряженной задачи:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(A\psi) = -H_x(\psi, x, y, s, t), \quad \psi(s, t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(s, t_1), s)}{\partial x},$$
$$\psi^-(s_0, t) = 0, \quad \psi^+(s_1, t) = 0, \tag{6}$$

$$\dot{p} = -h_y(p, y, u, t) - \int_{s_0}^{s_1} H_y(\psi, x, y, s, t)ds, \quad p(t_1) = 0. \tag{7}$$

Тогда формула приращения примет вид

$$\Delta J(u) = -\int_T \Delta_{\widetilde{u}} h(p(t), y(t), u(t), t)dt + \eta. \tag{8}$$

Здесь

$$\eta = \int_S o_\varphi(\|\Delta x(s, t_1)\|)ds - \iint_\Pi o_H(\|\Delta x(s, t)\|)ds\,dt - \iint_\Pi o_H(\|\Delta y(t)\|)ds\,dt -$$
$$- \iint_\Pi \langle \Delta_{\widetilde{x}} H_y, \Delta y\rangle ds\,dt - \int_T [o_h(\|\Delta y(t)\|) + \langle \Delta_{\widetilde{u}} h_y(p(t), y(t), u(t), t), \Delta y(t)\rangle]dt.$$

В классе вариаций $\Delta u(t) = \widetilde{u}(t) - u(t)$, малых по норме пространства $C(T)$, формулу приращения (8) можно линеаризовать:

$$\Delta J(u) = -\int_T \langle h_u(p(t), y(t), u(t), t), \Delta u(t)\rangle dt + \eta_1,$$

где $\eta_1 = \eta + o(\|\Delta u\|)$.

**3. Необходимое условие оптимальности.** Дальнейший вариационный анализ исследуемой задачи основан на использовании неклассических вариаций, обеспечивающих гладкость допустимых управлений. Проварьированное управление строится по правилу [2]:

$$u_{\varepsilon,\delta}(t) = u(t + \varepsilon\delta(t)), \quad t \in T, \tag{9}$$

$\varepsilon \in [0, 1]$ — параметр, характеризующий малость вариации, $\delta(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$t_0 \le t + \delta(t) \le t_1, \quad t \in T.$$

Выбирая управление по правилу (9) и используя разложение

$$\Delta u = \dot{u}(t)\varepsilon\delta(t) + o(\varepsilon),$$

перепишем формулу приращения целевого функционала в виде

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \int_T \langle h_u, \dot{u}(t)\rangle \delta(t) dt + o(\varepsilon).$$

Отсюда в силу произвольности $\delta(t)$ следует

**Теорема 1.** *Пусть процесс $\{u, y, x\}$ является оптимальным в рассматриваемой задаче. Тогда выполняется условие*

$$\langle h_u(p(t), y(t), u(t), t), \dot{u}(t)\rangle = 0, \quad t \in T, \tag{10}$$

*где $p(t)$ — решение сопряженной задачи* (6), (7) *при $u = u(t)$.*

**4. Численный метод.** Остановимся подробнее на алгоритме, использующем необходимое условие оптимальности в форме (10).

Введем скалярную функцию

$$\omega(p(t), u(t), \dot{u}(t), t) = \langle h_u(p(t), u(t), t), \dot{u}(t)\rangle.$$

Пусть задано начальное приближение из класса допустимых функций $u^0 = u^0(t)$. Опишем $k$-ю итерацию метода, т.е. переход от $u^k(t)$ к $u^{k+1}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Для управления $u^k(t)$ вычисляются решения $p^k = p^k(t)$, $\psi^k = \psi^k(s, t)$ сопряженной системы гиперболических уравнений, строится функция $\omega_k(t) = \omega(p^k(t), u^k(t), \dot{u}^k(t), t)$. Если $\omega_k(t) = 0$, $t \in T$, то управление $u^k$ удовлетворяет необходимому условию оптимальности, и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае выделим области

$$\Omega_k^+ = \{t \in T : \omega_k(t) > 0\},$$
$$\Omega_k^- = \{t \in T : \omega_k(t) < 0\}.$$

Определим гладкую функцию $\delta_k(t)$, удовлетворяющую условиям

$$\delta_k(t) = \begin{cases} > 0, & t \in \Omega_k^+; \\ < 0, & t \in \Omega_k^-; \\ 0, & t \notin \Omega_k^+ \cup \Omega_k^-. \end{cases}$$

Построим однопараметрическое семейство управлений $u_\varepsilon^k(t) = u^k(t+\varepsilon\delta_k(t))$ и решим задачу одномерной минимизации

$$\varepsilon_k : J(u_\varepsilon^k) \to \min, \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Следующее приближение находится по формуле

$$u^{k+1} = u_{\varepsilon_k}^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Сформулируем утверждение о сходимости метода.

**Теорема 2.** *Пусть в дополнение к сделанным ранее предположениям на параметры задачи*

1) *целевой функционал $J(u)$ ограничен снизу на множестве допустимых процессов,*

2) *вектор-функции $\varphi_x(x,s)$, $F_x(x,s,t)$ и матричные функции $f_x(x,y,s,t)$, $f_y(x,y,s,t)$ удовлетворяют условию Липшица по $x$, $y$ с одной константой для всех допустимых процессов,*

3) *вектор-функция $g_u(y,u,t)$ удовлетворяет условию Липшица по $u$ и $y$ для всех допустимых процессов.*

*Тогда последовательность управлений, генерируемая методом, является релаксационной*

$$J(u^{k+1}) \le J(u^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

*и сходится в смысле*

$$\mu(u^k) = \int_T \delta_k(t)\omega_k(t)dt \to 0, \quad k \to \infty.$$

**5. Иллюстративный пример.** В квадрате $[0,1]\times[0,1]$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u) = \int_0^1 [x_1(s,1) + x_2(s,1)]ds \to \min,$$
$$x_{1t} + x_{1s} = x_2 + y_1, \quad x_1(s,0) = 0, \quad x_1(0,t) = 0,$$
$$x_{2t} = y_2, \quad x_2(s,0) = 0,$$
$$\dot{y}_1 = -u, \quad y_1(0) = 0,$$
$$\dot{y}_2 = uy_1, \quad y_2(0) = 0,$$
$$u(t) \in [0;1].$$

Составим функцию Понтрягина и выпишем сопряженную задачу

$$H(\psi,x,y,s,t) = \psi_1(x_2 + y_1) + \psi_2 y_2,$$
$$\psi_{1t} + \psi_{1s} = 0, \quad \psi_1(s,1) = -1, \quad \psi_1(1,t) = 0,$$
$$\psi_{2t} = -\psi_1, \quad \psi_2(s,1) = -1,$$
$$h(p,y,u,t) = -p_1 u + p_2 y_1 u,$$
$$\dot{p}_1 = -p_2 u - \int_0^1 \psi_1 ds, \quad p_1(1) = 0,$$
$$\dot{p}_2 = -\int_0^1 \psi_2 ds, \quad p_2(1) = 0.$$

Пусть $u^0(t) = t$ — начальное допустимое управление. На заданном управлении решение сопряженной задачи имеет следующий вид:

$$\psi_1(s,t) = \begin{cases} 0, & t < s; \\ -1, & t \ge s, \end{cases} \qquad \psi_2(s,t) = \begin{cases} -1, & t < s; \\ t-2, & t \ge s, \end{cases}$$
$$p_1(t) = -\frac{t^5}{15} - \frac{t^4}{8} + \frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{12} - \frac{67}{120}, \quad p_2(t) = -\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{6}.$$

Так как $h_u = -p_1 + p_2 y_1$, то $\omega_0(t) = \frac{7}{30}t^5 + \frac{3}{8}t^4 - \frac{5}{6}t^3 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{67}{120} > 0$, $t \in [0,1)$, т. е. заданное допустимое управление не удовлетворяет необходимому условию оптимальности. Рассмотрим однопараметрическое семейство управлений $u^0_\varepsilon(t) = u^0(t + \varepsilon\delta_0(t))$, где $\delta_0(t)$ строится по правилу

$$\delta_0(t) = \frac{(t-t_0)(t_1-t)\omega_0(t)}{(t_1-t_0)\max\limits_{t\in T}|\omega_0(t)|}.$$

В нашем случае $\delta_0(t) = \frac{1}{67}(-28t^7 - 17t^6 + 55t^5 - 60t^4 - 40t^3 - 67t^2 + 67t)$. На управлении $u^0_\varepsilon$ ищем $y_1, y_2$, $x_1$, $x_2$ и определяем $\varepsilon_0$ из условия

$$J(u^0_{\varepsilon_0}) = \min J(u^0_\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0;1].$$

Получили, что $\varepsilon_0 = 1$. Таким образом, следующее приближение имеет вид

$$u^1 = 2t - t^2 - \frac{1}{67}(-28t^7 - 17t^6 + 55t^5 - 60t^4 - 40t^3),$$

причем

$$J(u^1) = -0{,}305 < J(u^0) = -0{,}189.$$

Следовательно, мы улучшили допустимое управление, не удовлетворяющее необходимому условию оптимальности.

## Литература

[1] Демиденко Н.Д., Потапов В.И., Шокин Ю.И. *Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами.* – Новосибирск: Наука, 2006. – 551 с.

[2] Аргучинцев А.В. *Оптимальное управление гиперболическими системами.* – М.: Физматлит, 2007. – 168 с.

[3] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* – М.: Наука, 1978. – 687 с.

*А.В. Аргучинцев*

*профессор, заведующий кафедрой методов оптимизации,*
*Иркутский государственный университет,*
*664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, д. 1,*

e-mail: arguch@math.isu.ru

*В.П. Поплевко*

*аспирант, кафедра методов оптимизации,*
*Иркутский государственный университет,*
*664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, д. 1,*

e-mail: vasilisa@math.isu.ru

*A.V. Arguchintsev*

*Professor, Head of the Chair of Optimization Methods,*
*Irkutsk State University,*
*1 K. Marks str., Irkutsk, 664003 Russia,*

e-mail: arguch@math.isu.ru

*В.П. Поплевко*

*Postgraduate, Chair of Optimization Methods,*
*Irkutsk State University,*
*1 K. Marks str., Irkutsk, 664003 Russia,*

e-mail: vasilisa@math.isu.ru