Известия вузов. Математика
2014, №10, с. 43–53

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.А. МИХЕЕВА, Г.А. ТОЛСТИХИНА

О ШЕСТИМЕРНЫХ ЛЕВЫХ ТРИ-ТКАНЯХ БОЛА С ОБЩЕЙ СЕРДЦЕВИНОЙ

Аннотация. Найдены условия, при которых левые три-ткани Бола имеют общую сердцевину. Эти условия применяются для нахождения шестимерных левых тканей с теми же сердцевинами, которые имеют ткани, полученные преобразованием парастрофии из известных шестимерных эластичных тканей E_1 и E_2.

Ключевые слова: три-ткань Бола, сердцевина ткани Бола, локально симметрическая структура, эластичная три-ткань, изотопия.

УДК: 514.763

Введение

Известно ([1], сс. 96, 258), что любая ткань Бола (левая $B_l(r,r,r)$, правая $B_r(r,r,r)$ и средняя $B_m(r,r,r)$) индуцирует на базе соответственно первого, второго и третьего слоения локально симметрическую структуру, которая порождается локальной гладкой квазигруппой, называемой сердцевиной ткани Бола. Заметим, что понятие сердцевины впервые ввел В.Д. Белоусов в [2]. Известно также [3], [4], что сердцевина ткани B_l изотопна левой лупе Бола, но не изотопна, вообще говоря, координатной квазигруппе этой ткани. Этот факт, проиллюстрированный на конкретных примерах, означает, что различные (неэквивалентные) три-ткани Бола, определяющие одну и ту же сердцевину, существуют. В данной работе найдены условия, при которых ткани B_l имеют общую сердцевину (см. теорему в разделе 2). При этом существенно используется указанная выше взаимосвязь сердцевины и порождаемой ею симметрической структуры. Соответствующая симметрическая связность описана в [3]. Отметим, что применительно к симметрической связности еще М.А. Акивисом ([1], с. 101) был поставлен вопрос: сколько неэквивалентных тканей Бола можно присоединить к заданной симметрической связности?

Полученные условия применяются в данной работе для нахождения шестимерных тканей B_l с общей сердцевиной. В разделе 3 рассмотрены примеры тканей B_l, связанных с известными шестимерными эластичными тканями E_1 и E_2. Уравнения последних ([1], сс. 108, 180) получены ранее А.М. Шелеховым. Отметим, что указанные ткани являются единственными шестимерными эластичными тканями. Согласно ([1], с. 176) эластичные ткани образуют собственный подкласс тканей B_m, с которыми, как известно, связаны ткани B_l (координатная квазигруппа ткани B_l — левая обратная квазигруппа координатной квазигруппы ткани B_m). Для тканей E_1 и E_2 указанным преобразованием парастрофии найдены левые ткани Бола (они обозначены $(B_l)_1$ и $(B_l)_2$ соответственно). Для каждой из них получены

Поступила 14.04.2013

уравнения неэквивалентных им тканей с теми же сердцевинами, которые имеют исходные ткани $(B_l)_1$ и $(B_l)_2$.

1. Основные понятия

Определение 1. Три-тканью $W(r,r,r)$ на дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$ размерности $2r$ называется совокупность таких трех гладких слоений λ_1, λ_2 и λ_3 коразмерности r, что в каждой точке p многообразия $\mathcal{M}$ три проходящих через нее слоя находятся в общем положении.

Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие размерности $2r$, на котором задана три-ткань $W(r,r,r)$. Согласно [1] в некоторой окрестности U_p произвольной точки $p \in \mathcal{M}$ существуют такие локальные координаты $x = (x^1,\dots,x^r) \in X$, $y = (y^1,\dots,y^r) \in Y$, что слоения ткани могут быть заданы уравнениями

$$\lambda_1 : x^i = \mathrm{const}, \quad \lambda_2 : y^i = \mathrm{const}, \quad \lambda_3 : z^i = f^i(x^j, y^k) = \mathrm{const}, \tag{1.1}$$

где $i,j,k,\dots = \overline{1,r}$, $z = (z^1,\dots,z^r) \in Z$, X, Y и Z — r-мерные базы слоений λ_1, λ_2 и λ_3 соответственно, $f = (f^1,\dots,f^r)$ — гладкая функция, $\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \neq 0$ и $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \neq 0$ в каждой точке многообразия $\mathcal{M}$.

В уравнениях (1.1) переменные $x = (x^1,\dots,x^r)$, $y = (y^1,\dots,y^r)$ и $z = (z^1,\dots,z^r)$ являются также параметрами соответствующих слоев три-ткани. Уравнения

$$z^i = f^i(x^j, y^k), \tag{1.2}$$

которые связывают параметры слоев, проходящих через одну точку многообразия $\mathcal{M}$, называются уравнениями три-ткани $W(r,r,r)$, а функция f — функцией три-ткани.

Определение 2. Трехбазисная бинарная операция

$$f : X \times Y \to Z, \quad z = f(x,y), \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad z \in Z, \tag{1.3}$$

определяемая уравнениями (1.2), называется локальной координатной квазигруппой три-ткани $W(r,r,r)$.

Параметры x, y и z слоений ткани, входящие в уравнение (1.3), допускают изотопические преобразования вида

$$\widetilde{x} = \alpha(x), \quad \widetilde{y} = \beta(y), \quad \widetilde{z} = \gamma(z),$$

где α, β, γ — локальные диффеоморфизмы. При этом уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$\widetilde{z} = \widetilde{f}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \gamma \circ f(\alpha^{-1}(\widetilde{x}), \beta^{-1}(\widetilde{y})).$$

Определение 3. Три-ткани $W(r,r,r)$ и $\widetilde{W}(r,r,r)$, заданные соответственно на дифференцируемых многообразиях $\mathcal{M}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}$ размерности $2r$, называются эквивалентными, если существует локальный диффеоморфизм $\varphi : \mathcal{M} \to \widetilde{\mathcal{M}}$, при котором слои три-ткани $W(r,r,r)$ переходят в слои соответствующих слоений ткани $\widetilde{W}(r,r,r)$.

Согласно ([1], с. 11) ткани $W(r,r,r)$ и $\widetilde{W}(r,r,r)$ эквивалентны в том и только том случае, если их координатные квазигруппы изотопны.

В соответствии с ([1], с. 23) продифференцируем уравнения (1.2), обозначим $\overline{f}^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\widetilde{f}^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial y^k}$ и положим $\underset{1}{\omega}^i = \overline{f}^i_j dx^j$, $\underset{2}{\omega}^i = \widetilde{f}^i_j dy^j$. Тогда в силу (1.1) слоения три-ткани $W(r,r,r)$ будут определяться уравнениями

$$\lambda_1 : \underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_2 : \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_3 : \underset{3}{\omega}^i \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0.$$

Формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ образуют на многообразии $\mathcal{M}$, несущем ткань $W(r,r,r)$, кобазис и удовлетворяют следующим структурным уравнениям ([1], с. 14)

$$\begin{gathered} d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\ d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Величины a^i_{jk} и b^i_{jkl} являются тензорами и называются соответственно тензорами кручения и кривизны три-ткани $W(r,r,r)$. Они вычисляются по известным формулам ([1], с. 23):

$$a^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}, \tag{1.5}$$

$$b^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^m}\overline{g}^m_k - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial y^m}\widetilde{g}^m_l + \Gamma^i_{mj}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{kj} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{jl}, \tag{1.6}$$

где $\Gamma^i_{jk} = -\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^l \partial y^m}\overline{g}^l_j\widetilde{g}^m_k$, $(\overline{g}^i_j)$ и $(\widetilde{g}^i_j)$ — матрицы, обратные для $(\overline{f}^i_j)$ и $(\widetilde{f}^i_j)$ соответственно. Формы ω^i_j в уравнениях (1.4) вычисляются по формулам

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{kj}\underset{1}{\omega}^k + \Gamma^i_{jk}\underset{2}{\omega}^k. \tag{1.7}$$

Тензоры a^i_{jk} и b^i_{jkl} связаны соотношениями

$$b^i_{[jkl]} = 2a^m_{[jk}a^i_{|m|l]} = \frac{2}{3}(a^m_{jk}a^i_{ml} + a^m_{kl}a^i_{mj} + a^m_{lj}a^i_{mk}) \tag{1.8}$$

$(b^i_{[jkl]} = \frac{1}{6}(b^i_{jkl} + b^i_{klj} + b^i_{ljk} - b^i_{kjl} - b^i_{jlk} - b^i_{lkj}))$ и удовлетворяют уравнениям

$$\nabla a^i_{jk} \equiv da^i_{jk} - a^i_{mk}\omega^m_j - a^i_{jm}\omega^m_k + a^m_{jk}\omega^i_m = b^i_{[j|l|k]}\underset{1}{\omega}^l + b^i_{[jk]l}\underset{2}{\omega}^l, \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} \nabla b^i_{jkl} \equiv db^i_{jkl} - b^i_{mkl}\omega^m_j - b^i_{jml}\omega^m_k - b^i_{jkm}\omega^m_l + b^m_{jkl}\omega^i_m = \\ = \underset{1}{C}{}^i_{jklm}\underset{1}{\omega}^m + \underset{2}{C}{}^i_{jklm}\underset{2}{\omega}^m. \end{aligned} \tag{1.10}$$

В уравнениях (1.9) и (1.10) через ∇ обозначен оператор ковариантного дифференцирования в аффинной связности Γ, которая определяется на многообразии $\mathcal{M}$ формами $(\underset{1}{\omega}^i, \underset{2}{\omega}^i)$, $\begin{pmatrix} \omega^i_j & 0 \\ 0 & \omega^i_j \end{pmatrix}$ и называется канонической аффинной связностью или связностью Черна ([1], с. 24).

2. Левая три-ткань Бола $B_l(r,r,r)$ и сердцевина

Согласно ([1], с. 50) локальная координатная квазигруппа левой три-ткани $B_l(r,r,r) \equiv B_l$ (и только такой ткани) изотопна левой лупе Бола. Напомним, что лупа (квазигруппа с единицей) с операцией $(\circ)$ называется левой лупой Бола, если в ней выполняется левое тождество Бола

$$(u \circ (v \circ u)) \circ \omega = u \circ (v \circ (u \circ \omega)).$$

С другой стороны, ткань B_l характеризуется замыканием всех достаточно малых левых конфигураций Бола. Условию их замыкания на ткани соответствует равенство ([1], с. 255)

$$f(a, f^{-1}(b, f(a,y))) = f(c,y), \quad a,b,c \in X, \tag{2.1}$$

выполняемое для любого элемента $y \in Y$. Здесь, как и выше, f — локальная координатная квазигруппа ткани B_l. Если f — локальная координатная лупа ткани с единицей e, то для $y = e$ получаем $f(x, e) = x$, поэтому из (2.1) следует равенство

$$c = f(a, f^{-1}(b, a)).$$

Таким образом, на первом слоении ткани B_l возникает операция

$$(*):\ \lambda_1 \times \lambda_1 \to \lambda_1, \quad c = a * b \equiv f(a, f^{-1}(b, a)), \tag{2.2}$$

называемая *сердцевиной* ткани B_l.

Согласно ([1], с. 255) сердцевина $(*)$ является локальной гладкой квазигруппой и обладает следующими свойствами: $a * a = a$ (идемпотентность), $a * (a * b) = b$ (левая обратимость), $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$ (левая дистрибутивность). Эта квазигруппа порождает на базе X первого слоения ткани локально симметрическую структуру, которая задается семейством гладких функций S_a, для которых $S_a(b) = a * b$ с любыми $a \in X$ и $b \in U_a \subset X$, где U_a — достаточно малая окрестность точки a.

Соответствующая симметрическая связность $\widetilde{\Gamma}$ (аффинная связность без кручения и с ковариантно постоянным тензором кривизны) определяется формами [3]

$$\underset{1}{\omega}^i, \quad \widetilde{\omega}_j^i = \omega_j^i + a_{jk}^i \underset{1}{\omega}^k, \tag{2.3}$$

которые удовлетворяют структурным уравнениям

$$\begin{gathered} d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}_j^i, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}_j^i - a_{jk}^i \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k, \\ d\widetilde{\omega}_j^i = \widetilde{\omega}_j^k \wedge \widetilde{\omega}_k^i + \widetilde{R}_{jkl}^i \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Последние получаются подстановкой (2.3) в уравнения (1.4). Величины

$$\widetilde{R}_{jkl}^i = \frac{1}{4}(b_{klj}^i - 2a_{mj}^i a_{kl}^m) \tag{2.5}$$

образуют тензор кривизны связности $\widetilde{\Gamma}$. При этом выполняются условия $\widetilde{R}_{j(kl)}^i = 0$, которые равносильны

$$b_{(jk)l}^i = 0, \tag{2.6}$$

где $b_{(jk)l}^i = \frac{1}{2}(b_{jkl}^i + b_{kjl}^i)$. Отметим, что условия (2.6) характеризуют три-ткань B_l. Тензоры кручения и кривизны ткани B_l связаны соотношениями

$$a_{pl}^i b_{jkm}^p - a_{pm}^i b_{jkl}^p + b_{plm}^i a_{jk}^p - b_{pml}^i a_{jk}^p + b_{jkp}^i a_{lm}^p = 0, \tag{2.7}$$

а тензор $\widetilde{R}_{jkl}^i$ удовлетворяет известным тождествам Риччи и Бианки ([1], с. 97).

Обозначим через $\widetilde{\nabla}$ оператор ковариантного дифференцирования в связности $\widetilde{\Gamma}$, так что

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla} a_{jk}^i &\equiv da_{jk}^i - a_{mk}^i \widetilde{\omega}_j^m - a_{jm}^i \widetilde{\omega}_k^m + a_{jk}^m \widetilde{\omega}_m^i, \\ \widetilde{\nabla} b_{jkl}^i &\equiv db_{jkl}^i - b_{mkl}^i \widetilde{\omega}_j^m - b_{jml}^i \widetilde{\omega}_k^m - b_{jkm}^i \widetilde{\omega}_l^m + b_{jkl}^m \widetilde{\omega}_m^i. \end{aligned} \tag{2.8}$$

В силу (1.8)–(1.10), (2.3), (2.5)–(2.7) имеем

$$\begin{gathered} \widetilde{\nabla} a_{jk}^i = \frac{1}{2} b_{jkl}^i (\underset{3}{\omega}^l + \underset{2}{\omega}^l), \\ \widetilde{\nabla} b_{jkl}^i = (a_{pl}^i b_{jkm}^p + a_{jk}^p b_{plm}^i)(\underset{3}{\omega}^m + \underset{2}{\omega}^m), \\ \widetilde{\nabla} \widetilde{R}_{jkl}^i = 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Допустим, что ткань B_l задана своими структурными уравнениями (1.4), т. е. тензоры a^i_{jk} и b^i_{jkl} известны. Из (2.3) следует, что для нее симметрическая связность $\widetilde{\Gamma}$ с тензором кривизны $\widetilde{R}^i_{jkl}$ вида (2.5) определяется однозначно. Как уже сказано выше, эта связность порождается сердцевиной ткани B_l.

Обратно, пусть симметрическая связность задана, т. е. известны компоненты тензора $\widetilde{R}^i_{jkl}$. Из равенств (2.5) следует, что тензоры a^i_{jk} и b^i_{jkl} определяются, вообще говоря, неоднозначно. Выражая из (2.5) тензор b^i_{jkl} через a^i_{jk} и $\widetilde{R}^i_{jkl}$ и подставляя полученные выражения в (2.9), получим уравнения

$$\widetilde{\nabla} a^i_{jk} = (2\widetilde{R}^i_{ljk} + a^i_{ml}a^m_{jk})(\underset{1}{\omega}^l + 2\underset{2}{\omega}^l),$$

которые с учетом (2.8) могут быть записаны в виде

$$da^i_{jk} = a^i_{mk}\widetilde{\omega}^m_j + a^i_{jm}\widetilde{\omega}^m_k - a^m_{jk}\widetilde{\omega}^i_m + (2\widetilde{R}^i_{ljk} + a^i_{ml}a^m_{jk})(\underset{1}{\omega}^l + 2\underset{2}{\omega}^l). \tag{2.10}$$

Из (2.7) в силу (2.5) получим равенства

$$4a^i_{p[l}\widetilde{R}^p_{m]jk} + 4\widetilde{R}^i_{[m|p|l]}a^p_{jk} + 2\widetilde{R}^i_{pjk}a^p_{lm} + a^i_{qp}a^q_{jk}a^p_{lm} = 0. \tag{2.11}$$

Внешнее дифференцирование последних приводит к тождествам, следовательно, система (2.4), (2.5), (2.10), (2.11), определяющая ткань B_l с заданной симметрической связностью (сердцевиной), замкнута.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Левые три-ткани Бола $B_l(r,r,r)$ имеют общую сердцевину в том и только том случае, если тензор кручения a^i_{jk} каждой из этих тканей удовлетворяет уравнениям* (2.10) *и соотношениям* (2.11), *где $\widetilde{R}^i_{jkl}$ — тензор кривизны локально симметрической связности $\widetilde{\Gamma}$, индуцируемой каждой тканью $B_l(r,r,r)$ на базе первого слоения.*

Проиллюстрируем теорему на следующих примерах.

3. Шестимерные три-ткани B_l с общей сердцевиной, связанные с шестимерными эластичными тканями

Напомним ([1], с. 176), что эластичными тканями (тканями E) называются три-ткани, в координатных лупах которых выполняется тождество эластичности

$$(x \circ y) \circ x = x \circ (y \circ x).$$

Известно [1], что всякая ткань E является средней тканью Бола (тканью B_m) специального вида, т. е. ткани E образуют собственный подкласс тканей B_m. Известно также, что четырехмерных тканей E, отличных от групповых тканей, не существует, но шестимерные нетривиальные эластичные три-ткани существуют. Таких тканей оказалось всего две, они обозначены E_1 и E_2. Их уравнения найдены ранее А.М. Шелеховым ([1], сс. 108, 180). Известно ([1], с. 95), что преобразованием парастрофии $f \to {}^{-1}f$ можно перейти от координатной квазигруппы f ткани B_m к координатной квазигруппе $\widetilde{f} \equiv {}^{-1}f$ ткани B_l. Таким образом, с каждой эластичной три-тканью связана некоторая левая ткань Бола. Далее рассмотрим шестимерные ткани B_l, связанные преобразованием парастрофии с шестимерными эластичными тканями E_1 и E_2.

Пример 1. Для ткани E_1, координатная лупа которой задана уравнениями ([1], с. 108)

$$w^1 = u^1 + v^1 - (u^2 + v^2)u^3v^3, \quad w^2 = u^2 + v^2, \quad w^3 = u^3 + v^3,$$

найдем уравнения левой обратной квазигруппы и переобозначим переменные: $u^i = z^i$, $v^i = -y^i$, $w^i = x^i$. В результате получим уравнения шестимерной левой три-ткани Бола

$$z^1 = x^1 + y^1 - x^2y^3(x^3 + y^3), \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z^3 = x^3 + y^3, \tag{3.1}$$

которую обозначим $(B_l)_1$. Поскольку (3.1) — координатная лупа ткани $(B_l)_1$ (ее единица $e = (0, 0, 0)$), то уравнения сердцевины $c = a * b$ этой ткани могут быть получены в виде (2.2), а именно,

$$c^1 = 2a^1 - b^1 - (a^3 - b^3)(a^3(a^2 - b^2) + a^2(a^3 - b^3)), \quad c^2 = 2a^2 - b^2, \quad c^3 = 2a^3 - b^3. \tag{3.2}$$

Найдем структурные уравнения ткани $(B_l)_1$ в виде (2.4). Продифференцируем (3.1) и положим

$$\begin{aligned} &\underset{1}{\omega}^1 = dx^1 - y^3(x^3 + y^3)dx^2 - x^2y^3dx^3, &&\underset{1}{\omega}^2 = dx^2, &&\underset{1}{\omega}^3 = dx^3,\\ &\underset{2}{\omega}^1 = dy^1 - x^2(x^3 + 2y^3)dy^3, &&\underset{2}{\omega}^2 = dy^2, &&\underset{2}{\omega}^3 = dy^3. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Теперь найдем тензоры кручения и кривизны ткани по формулам (1.5), (1.6). В результате вычислений получим

$$a^1_{23} = \frac{x^3 + 2y^3}{2} = -a^1_{32}, \quad b^1_{233} = 1 = -b^1_{323}. \tag{3.4}$$

Остальные компоненты этих тензоров равны нулю. Компоненты тензора кривизны $\widetilde{R}^i_{jkl}$ найдем по формулам (2.5)

$$\widetilde{R}^1_{323} = \frac{1}{4} = -\widetilde{R}^1_{332}, \tag{3.5}$$

а другие компоненты равны нулю.

Далее найдем формы $\widetilde{\omega}^i_j$, используя равенства (2.3) и формулы (1.7). Ненулевыми являются следующие формы:

$$\widetilde{\omega}^1_2 = \frac{x^3 + 2y^3}{2}(dx^3 + 2dy^3), \quad \widetilde{\omega}^1_3 = x^2(dx^3 + dy^3) + \frac{x^3 + 2y^3}{2}dx^2. \tag{3.6}$$

Учитывая (3.3)–(3.6), запишем структурные уравнения ткани $(B_l)_1$ в виде

$$\begin{aligned} &d\underset{1}{\omega}^1 = \underset{1}{\omega}^3 \wedge \widetilde{\omega}^1_3 + \underset{1}{\omega}^2 \wedge \widetilde{\omega}^1_2, &&d\underset{2}{\omega}^1 = 0,\\ &d\underset{1}{\omega}^2 = 0, &&d\underset{2}{\omega}^2 = 0,\\ &d\underset{1}{\omega}^3 = 0, &&d\underset{2}{\omega}^3 = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$d\widetilde{\omega}^1_2 = 0, \quad d\widetilde{\omega}^1_3 = \frac{1}{2}\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^3. \tag{3.8}$$

Найдем уравнения других шестимерных левых тканей Бола, имеющих ту же сердцевину (3.2), что и ткань $(B_l)_1$. Так как искомые ткани индуцируют на базе первого слоения ту же локально симметрическую связность, что и ткань $(B_l)_1$, то тензор кривизны $\widetilde{R}^i_{jkl}$ симметрической связности для каждой из этих тканей имеет единственную ненулевую компоненту (3.5). При этом тензор кручения a^i_{jk} каждой ткани должен удовлетворять уравнениям вида (2.10) и соотношениям (2.11) (см. теорему). Из равенств (2.11), записанных для $r = 3$ с учетом (3.5), находим

$$a^i_{12} = 0, \quad a^3_{jk} = 0. \tag{3.9}$$

Для оставшихся компонент тензора кручения запишем дифференциальные уравнения (2.10) и учтем (3.5), (3.6), получим систему

$$\begin{aligned}
&da^1_{23} = \Big((a^1_{13} - a^2_{23})\frac{x^3+2y^3}{2} + \frac{1}{2} + a^1_{13}a^1_{23} + a^1_{23}a^2_{23}\Big)(\underset{1}{\omega}^3 + 2\underset{2}{\omega}^3),\\
&da^2_{23} = \Big(a^2_{13}a^1_{23} + a^2_{23}a^2_{23} + a^2_{13}\frac{x^3+2y^3}{2}\Big)(\underset{1}{\omega}^3 + 2\underset{2}{\omega}^3),\\
&da^1_{13} = \Big(a^1_{13}a^1_{13} + a^1_{23}a^2_{13} - a^2_{13}\frac{x^3+2y^3}{2}\Big)(\underset{1}{\omega}^3 + 2\underset{2}{\omega}^3),\\
&da^2_{13} = a^2_{13}(a^1_{13} + a^2_{23})(\underset{1}{\omega}^3 + 2\underset{2}{\omega}^3).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Укажем некоторые решения этой системы.

1) Двум последним уравнениям удовлетворяют $a^1_{13} = 0$, $a^2_{13} = 0$. Тогда система (3.10) будет следующей:

$$\begin{aligned}
&da^1_{23} = \Big(-a^2_{23}\frac{x^3+2y^3}{2} + \frac{1}{2} + a^1_{23}a^2_{23}\Big)(\underset{1}{\omega}^3 + 2\underset{2}{\omega}^3),\\
&da^2_{23} = (a^2_{23})^2(\underset{1}{\omega}^3 + 2\underset{2}{\omega}^3).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Найдем ее ненулевое решение. Интегрируя второе уравнение системы (3.11), получим

$$a^2_{23} = -\frac{1}{x^3+2y^3}. \tag{3.12}$$

Подставим (3.12) в первое уравнение и проинтегрируем его, в результате найдем

$$a^1_{23} = \frac{x^3+2y^3}{2}. \tag{3.13}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае тензор кручения искомой ткани (обозначим ее $(B_l)^1_1$) имеет вид

$$\begin{gathered}
a^1_{12} = 0, \quad a^1_{13} = 0, \quad a^1_{23} = \frac{x^3+2y^3}{2},\\
a^2_{12} = 0, \quad a^2_{13} = 0, \quad a^2_{23} = -\frac{1}{x^3+2y^3},\\
a^3_{12} = 0, \quad a^3_{13} = 0, \quad a^3_{23} = 0.
\end{gathered} \tag{3.14}$$

Сравнивая (3.13) и (3.4), видим, что компонента a^1_{23} для тканей $(B_l)_1$ и $(B_l)^1_1$ имеет один и тот же вид. Это единственная ненулевая компонента тензора кручения три-ткани $(B_l)_1$. Заметим, что ткань $(B_l)^1_1$ имеет еще одну ненулевую компоненту тензора кручения $a^2_{23} = -\frac{1}{x^3+2y^3}$. Отсюда следует, что структурные уравнения ткани $(B_l)^1_1$ имеют тот же вид (3.7), (3.8), что и для ткани $(B_l)_1$, кроме уравнения

$$d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}^2_j - a^2_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k.$$

Учитывая в последнем (3.3), (3.6) и (3.14), получим уравнение

$$d\underset{2}{\omega}^2 = \frac{1}{x^3+2y^3}\underset{2}{\omega}^2 \wedge (dx^3 + 2dy^3) + \frac{1}{x^3+2y^3}dx^2 \wedge dy^3.$$

Интегрируя это уравнение, найдем форму

$$\underset{2}{\omega}^2 = \frac{x^2dy^3 + dy^2}{x^3 + 2y^3}. \tag{3.15}$$

Учитывая (3.3) и (3.15), запишем уравнения слоений ткани $(B_l)_1^1$

$$\lambda_1 : dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0, \quad \lambda_2 : dy^1 = dy^2 = dy^3 = 0,$$

$$\lambda_3 : \begin{cases} dx^1 - y^3(x^3 + y^3)dx^2 - x^2y^3dx^3 + dy^1 - x^2(x^3 + 2y^3)dy^3 = 0, \\ dx^2 + \dfrac{x^2dy^3 + dy^2}{x^3 + 2y^3} = 0, \\ dx^3 + dy^3 = 0. \end{cases}$$

Интегрируя эти уравнения, найдем уравнения ткани $(B_l)_1^1$ в виде

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + y^1 - x^2y^3(x^3 + y^3), \\ z^2 &= x^2(x^3 + 2y^3) + y^2, \\ z^3 &= x^3 + y^3. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что эта ткань имеет ту же сердцевину (3.2), что и ткань $(B_l)_1$. Также непосредственно можно показать, что ткани $(B_l)_1$ и $(B_l)_1^1$ не являются эквивалентными. При этом используется известное свойство ([1], с. 18): тензоры кручения и кривизны эквивалентных три-тканей (и только таких тканей) связаны тензорным законом, т. е. существует невырожденная матрица (γ_j^i) такая, что

$$\widetilde{a}_{jk}^i = \widetilde{\gamma}_l^i \gamma_j^m \gamma_k^p a_{mp}^l, \tag{3.17}$$

где $(\widetilde{\gamma}_l^i)$ — обратная матрица, a_{mp}^l и $\widetilde{a}_{jk}^i$ — тензоры кручения три-тканей. Предполагая, что ткани $(B_l)_1$ и $(B_l)_1^1$ эквивалентны и применяя для них закон (3.17), получаем $|\gamma_j^i| = 0$. Следовательно, предположение неверно и ткани $(B_l)_1$ и $(B_l)_1^1$ не являются эквивалентными.

Полученный результат связан также с известным подходом к классификации шестимерных три-тканей Бола, основанном на свойствах матрицы $\mathcal{A}$, образованной компонентами тензора кручения ткани ([1], с. 106),

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{23}^1 & a_{31}^1 & a_{12}^1 \\ a_{23}^2 & a_{31}^2 & a_{12}^2 \\ a_{23}^3 & a_{31}^3 & a_{12}^3 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

При условиях (3.9) получается матрица $\overline{\mathcal{A}}_1$, которой соответствуют искомые три-ткани; для тканей $(B_l)_1$ и $(B_l)_1^1$ эти матрицы имеют вид $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_1^1$ соответственно:

$$\overline{\mathcal{A}}_1 = \begin{pmatrix} a_{23}^1 & a_{31}^1 & 0 \\ a_{23}^2 & a_{31}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{23}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1^1 = \begin{pmatrix} a_{23}^1 & 0 & 0 \\ a_{23}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом $\mathcal{A}_1$ — симметричная матрица ранга 1, $\mathcal{A}_1^1$ — несимметричная матрица того же ранга 1.

2) Найдем три-ткань B_l, для которой $\overline{\mathcal{A}}_1$ – несимметричная матрица ранга 2. Пусть, например, это матрица вида

$$\mathcal{A}_1^2 = \begin{pmatrix} a_{23}^1 & 0 & 0 \\ a_{23}^2 & a_{31}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a^1_{23} \neq 0$, $a^2_{23} \neq 0$, $a^2_{31} \neq 0$. Соответствующую ткань обозначим $(B_l)^2_1$.

Найдем решение системы (3.10), соответствующее матрице $\mathcal{A}^2_1$. Так как $a^1_{13} = 0$, то из третьего уравнения этой системы получим

$$a^1_{23} = \frac{x^3 + 2y^3}{2}. \tag{3.19}$$

При этом первое уравнение удовлетворится тождественно, а для компонент a^2_{23} и a^2_{13} получим уравнения

$$da^2_{23} = (a^2_{13}t + (a^2_{23})^2)dt, \quad da^2_{13} = a^2_{13}a^2_{23}dt, \tag{3.20}$$

где $t = x^3 + 2y^3$, причем в силу (3.3) $dt = \underset{1}{\omega}^3 + 2\underset{2}{\omega}^3$. Интегрируя уравнения (3.20), найдем

$$a^2_{13} = \frac{-6}{t^3 - 6t + 6}, \quad a^2_{23} = \frac{-3(t^2 - 2)}{t^3 - 6t + 6}. \tag{3.21}$$

Таким образом, тензор кручения три-ткани $(B_l)^2_1$ имеет ненулевые компоненты (3.19), (3.21).

Найдем уравнения три-ткани $(B_l)^2_1$. Как и выше, запишем дифференциальное уравнение для формы $\underset{2}{\omega}^2$ с учетом (3.3), (3.6), (3.19) и (3.21), затем проинтегрируем его, в результате найдем эту форму в виде

$$\underset{2}{\omega}^2 = \frac{-6(t - y^3)dy^1 + dy^2 + 3(t^2 - 2)x^2dy^3}{t^3 - 6t + 6}.$$

Далее запишем уравнения слоений ткани $(B_l)^2_1$. Интегрируя их, найдем уравнения три-ткани $(B_l)^2_1$

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + y^1 - x^2y^3(x^3 + y^3), \\ z^2 &= ((x^3 + 2y^3)^3 - 6(x^3 + 2y^3) + 6)x^2 + y^2 - 6(x^3 + y^3)y^1, \\ z^3 &= x^3 + y^3. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Непосредственной проверкой убедимся, что три-ткани $(B_l)^2_1$ и $(B_l)_1$ ($(B_l)^2_1$ и $(B_l)^1_1$) не являются эквивалентными.

Таким образом, верно

Предложение 1. *Шестимерные левые три-ткани Бола* $(B_l)_1$, $(B_l)^1_1$ *и* $(B_l)^2_1$, *определяемые соответственно уравнениями* (3.1), (3.16) *и* (3.22), *не являются эквивалентными и имеют одну и ту же сердцевину* (3.2).

Пример 2. Рассмотрим другую шестимерную эластичную три-ткань E_2 с уравнениями ([1], с. 180) $w^1 = u^1 + v^1$, $w^2 = u^2 + v^2e^{-2u^1} + (v^1u^3 - u^1v^3)e^{-2u^1}$, $w^3 = u^3 + v^3$. Соответствующая левая ткань Бола (обозначим ее $(B_l)_2$), которая получается из E_2 преобразованием парастрофии $f \to {}^{-1}f$, задается уравнениями

$$z^1 = x^1 + y^1, \;\; z^2 = x^2e^{2y^1} + y^2 + (y^1x^3 - x^1y^3), \;\; z^3 = x^3 + y^3. \tag{3.23}$$

Последние определяют также координатную лупу ткани $(B_l)_2$ с сердцевиной

$$c^1 = 2a^1 - b^1, \;\; c^2 = a^2(e^{-2(a^1 - b^1)} + e^{2(a^1 - b^1)}) - b^2, \;\; c^3 = 2a^3 - b^3. \tag{3.24}$$

Укажем другие ткани B_l с той же сердцевиной (3.24). Для этого используем результаты работы [3], в которой уравнения (3.23) три-ткани $(B_l)_2$ преобразованием

$$x^2 + x^1x^3 \to x^2, \quad y^2 + y^1y^3 \to y^2, \quad z^2 + z^1z^3 \to z^2$$

приведены к виду

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = (x^2 - x^1 x^3)e^{2y^1} + y^2 + x^3(x^1 + 2y^1), \quad z^3 = x^3 + y^3. \tag{3.25}$$

В [3] найдены уравнения левой ткани Бола

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = (x^2 - x^1 x^3)e^{2y^1} + y^2 + x^3(x^1 + 2y^1), \quad z^3 = x^3 + y^3 - x^3(x^1 + 2y^1), \tag{3.26}$$

которая имеет ту же сердцевину (3.24), что и ткань $(B_l)_2$. Обозначим эту ткань $(B_l)_2^1$. Непосредственно доказывается (см. рассуждения в примере 1), что ткани $(B_l)_2$ и $(B_l)_2^1$ не являются эквивалентными. Это следует также из вида матриц $\mathcal{A}$ (см. (3.18)):

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{31}^2 & a_{12}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{31}^2 & a_{12}^2 \\ 0 & a_{31}^3 & 0 \end{pmatrix},$$

соответствующих этим тканям. Они являются несимметричными матрицами ранга 1 и 2 соответственно. В указанных матрицах

$$a_{31}^2 = -1 + x^1 + 2y^1 = -a_{13}^2, \quad a_{12}^2 = 1 = -a_{21}^2, \quad a_{31}^3 = \frac{1}{1 - x^1 - 2y^1} = -a_{13}^3.$$

Для ткани $(B_l)_2$ эти компоненты вычисляются непосредственно, исходя из ее уравнений (3.25). Для ткани $(B_l)_2^1$ они определяются как решения системы дифференциальных уравнений вида (2.10), в которых учтены выражения форм $\widetilde{\omega}_j^i$ и компоненты тензора $\widetilde{R}_{jkl}^i$ симметрической связности $\widetilde{\Gamma}$, найденные в [3].

Найдем еще одну три-ткань B_l с сердцевиной (3.24), соответствующую несимметричной матрице ранга 2 вида

$$\mathcal{A}_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{31}^2 & a_{12}^2 \\ 0 & a_{31}^3 & a_{12}^3 \end{pmatrix}.$$

Искомую три-ткань обозначим $(B_l)_2^2$. Для нее, как и для ткани $(B_l)_2^1$, $a_{jk}^1 = 0$, $a_{23}^i = 0$, но $a_{12}^3 \neq 0$. Найдем величины a_{31}^2, a_{12}^2, a_{31}^3 и a_{12}^3. Запишем дифференциальные уравнения (2.10), которым они удовлетворяют, с учетом форм $\widetilde{\omega}_j^i$ и компонент тензора $\widetilde{R}_{jkl}^i$, затем проинтегрируем их. В результате получим

$$a_{12}^2 = 1, \quad a_{13}^2 = -\tau, \quad a_{12}^3 = \frac{2}{1+\tau}, \quad a_{13}^3 = -\frac{1+2\tau}{1+\tau}, \quad \text{где } \tau = -1 + x^1 + 2y^1.$$

Далее найдем уравнения три-ткани $(B_l)_2^2$ аналогично тому, как были получены уравнения тканей $(B_l)_1^1$ и $(B_l)_1^2$ в примере 1,

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = (x^2 - x^1 x^3)e^{2y^1} + y^2 + x^3(x^1 + 2y^1), \quad z^3 = x^2 - x^1 x^3 + y^3 e^{2x^1}. \tag{3.27}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эта ткань не будет эквивалентна тканям $(B_l)_2$ и $(B_l)_2^1$, а ее сердцевина задается уравнениями (3.24). Итак, доказано

Предложение 2. *Шестимерные левые три-ткани Бола* $(B_l)_2$, $(B_l)_2^1$ *и* $(B_l)_2^2$, *определяемые соответственно уравнениями* (3.25), (3.26) *и* (3.27), *не являются эквивалентными и имеют одну и ту же сердцевину* (3.24).

Литература

[1] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения* (ТвГУ, Тверь, 2010).

[2] Белоусов В.Д. *Сердцевина лупы Бола*, в сб. “Исследования по общей алгебре” (Кишинев, 1965), с. 53–65.

[3] Толстихина Г.А. *Обобщенная левая три-ткань Бола* $B_l(\rho, r, r)$ *как фактор-ткань левой ткани Бола* $B_l(r, r, r)$, Вестн. Тверского гос. ун-та. Сер. Прикладная математика. Вып. 2, № 21, с. 117–134 (2011).

[4] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *О три-тканях Бола с IC-свойством*, Изв. вузов. Матем., № 5, 25–35 (2013).

А.А. Михеева

аспирант, кафедра функционального анализа и геометрии,
Тверской государственный университет,
ул. Желябова, д. 33, г. Тверь, 170100, Россия,

e-mail: heathjensen@yandex.ru

Г.А. Толстихина

профессор, заведующая кафедрой математики с методикой начального обучения,
Тверской государственный университет,
ул. Желябова, д. 33, г. Тверь, 170100, Россия

A.A. Mikheeva and G.A. Tolstikhina

The six-dimensional left Bol three-webs with general core

Abstract. We found the conditions, under which left three-webs have the general core. These conditions are applied to the finding of six-dimensional left three-webs with the same cores as have the webs, obtained by transformation of parastrophy from the well-known six-dimensional elastic three-webs E_1 and E_2.

Keywords: Bol three-web, core of Bol three-web, locally symmetric structure, elastic three-web, isotopy.

A.A. Mikheeva

Postgraduate, Chair of Functional Analysis and Geometry,
Tver State University,
33 Zhelyabov str., Tver, 170100 Russia,

e-mail: heathjensen@yandex.ru

G.A. Tolstikhina

Professor, Head of the Chair of Mathematics and Primary Education Principles,
Tver State University,
33 Zhelyabov str., Tver, 170100 Russia