ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 7 (482)

УДК 517.9

В.Е. ФЕДОРОВ, О.А. РУЗАКОВА

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ОТНОСИТЕЛЬНО p-РАДИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{U}$ — гильбертовы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (т.е. линейный непрерывный), $M \in \mathrm{Cl}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линейный замкнутый, плотно определенный в $\mathcal{X}$), $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$. Рассмотрим операторно-дифференциальное неоднородное уравнение

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{1}$$

Здесь функция $u(\cdot) : [0,T] \to \mathcal{U}$ обозначает управление.

В рамках задачи Коши

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

для уравнения (1) рассматриваются многие начально-краевые задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных [1]. Первым начал изучать начально-краевые задачи для уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производной по времени, С.Л. Соболев [2], поэтому такие уравнения, в частности уравнение (1), будем называть "уравнениями соболевского типа".

Если оператор L непрерывно обратим, то уравнение (1) сводится к уравнению

$$\dot{x} = Sx + L^{-1}Bu \tag{3}$$

в пространстве $\mathcal{X}$. Для случая, когда оператор $S = L^{-1}M \in \mathrm{Cl}(\mathcal{X})$ является генератором C_0-непрерывной полугруппы, вопрос управляемости уравнения (3) исследуется в ([3], гл. 4, § 9, с. 260–264) методами теории полугрупп операторов. Нами получены аналогичные результаты для уравнения (1) в случае, когда $\ker L \ne \{0\}$, а оператор M сильно (L,p)-радиален [4]. При этом использована теория полугрупп уравнений соболевского типа [1], [4].

Введем обозначения:

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\};$$

$$\text{для} \quad \mu_0,\dots,\mu_p \in \rho^L(M) \quad R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p}(\mu_k L - M)^{-1}L, \quad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L(\mu_k L - M)^{-1};$$

$$\mathcal{X}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M), \quad \mathcal{Y}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M);$$

$$\mathcal{X}^1 = \overline{\mathrm{im}} R^L_{(\mu,p)}(M), \quad \mathcal{Y}^1 = \overline{\mathrm{im}} L^L_{(\mu,p)}(M)$$

(замыкание образа в норме пространства $\mathcal{X}$ или $\mathcal{Y}$ соответственно). Через M_k (L_k) будем обозначать сужение оператора M (L) на $\mathrm{dom}\, M_k = \mathcal{X}^k \bigcap \mathrm{dom}\, M$ (X^k), $k = 0, 1$.

Оператор M называется *p-радиальным относительно* оператора L (короче, (L,p)-*радиальным*), если

(i) $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \mu > a, \quad \mu \in \rho^L(M)$;

Работа частично поддержана государственной научной стипендией для молодых ученых.

(ii) $\exists K>0\ \ \forall \mu_k>a,\ \ k=\overline{0,p},\ \ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})},\|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\}\leq\frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k-a)^n}.$$

Оператор M называется *сильно* (L,p)*-радиальным* , если существует плотный в $\mathcal{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{Y}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L-M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)y\|_{\mathcal{Y}}\leq\frac{\mathrm{const}(y)}{(\lambda-a)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k-a)}\quad \forall y\in\overset{\circ}{\mathcal{Y}};$$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})}\leq\frac{K}{(\lambda-a)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k-a)}$$

при любых $\lambda,\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_p>a$.

Теорема 1 ([4]). *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathcal{X}=\mathcal{X}^0\bigoplus\mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}^0\bigoplus\mathcal{Y}^1$;
(ii) $L_k\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $M_k\in\mathrm{Cl}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$ *и* $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$;
(iv) *оператор* $H=M_0^{-1}L_0\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$ *нильпотентен степени не больше* $p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$;
(v) *инфинитезимальным генератором* C_0*-непрерывной полугруппы*

$$\left\{U_1^t=s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}e^{-\frac{(\mu-a)t}{p+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\frac{(\mu-a)^{p+2}}{p+1}((\mu L_1-M_1)^{-1}L_1)^{p+1}\right)^n:t\geq0\right\}$$

является оператор $L_1^{-1}M_1\in\mathrm{Cl}(\mathcal{X}^1)$;
(vi) *существует сильно непрерывная полугруппа* $\{U^t=U_1^tP\in\mathcal{L}(\mathcal{X}):t\geq0\}$ *однородного уравнения* (1) ($B=\mathbb{O}$).

Здесь через P обозначен проектор вдоль $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$. Проектор вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$ будем обозначать через Q.

Теорема 2 ([4]). *Пусть оператор* M *сильно (L,p)-радиален,* $(I-Q)Bu(t)\in C^{p+1}([0,T],\mathcal{Y})$, $L_1^{-1}QBu(t)\in C([0,T],\mathrm{dom}\,M)$. *Тогда для любого начального значения* $x_0\in\mathcal{P}_u=\Big\{x\in\mathrm{dom}\,M:(I-P)x=-\sum\limits_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}((I-Q)Bu)^{(k)}(0)\Big\}$ *существует единственное решение* $x(t)\in C^1([0,T],\mathcal{X})$ *задачи* (1), (2), *причем*

$$x(t)=U^tx_0+\int_0^tU^{t-s}L_1^{-1}QBu(s)ds-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}((I-Q)Bu)^{(k)}(t).$$

Через $C([0,T],\mathrm{dom}\,M)$ здесь обозначено пространство функций со значениями во множестве $\mathrm{dom}\,M$, непрерывных по норме графика оператора M.

Далее предположим, что гильбертово пространство $\mathcal{U}$ сепарабельно, функция $u(\cdot)$ слабо измерима на $[0,T]$ и $\int\limits_0^T\|u(s)\|ds<\infty$. Кроме того, функция управления $u(\cdot)$ должна удовлетворять условиям теоремы 2. Множество функций управления, удовлетворяющих условиям данного абзаца, обозначим через $V(T)$.

Введем оператор $E(T):V(T)\to\mathcal{X}$, где

$$E(T):u\to\int_0^TU^{T-s}L_1^{-1}QBu(s)ds-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}((I-Q)Bu)^{(k)}(T),$$

и обозначим $\Omega(T) = \operatorname{im} E(T)$.

Система, описываемая уравнением (1), называется *управляемой*, если множество $\bigcup\limits_{T>0} \Omega(T)$ состояний, достижимых из нуля, плотно в пространстве $\mathcal{X}$.

Сформулируем следующий критерий управляемости.

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно $(L,0)$-радиален. Тогда система* (1) *управляема в том и только том случае, когда множество* $\bigcup\limits_{t>0} \operatorname{im} U^t L_1^{-1} QB$ *плотно в* $\mathcal{X}^1$, *а множество* $\operatorname{im}(I-Q)B$ *плотно в* $\mathcal{Y}^0$.

Доказательство. В силу теорем 1, 2 требуется доказать плотность множества векторов вида

$$\int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} QBu(s)ds, \quad t > 0,$$

в пространстве $\mathcal{X}^1$ и векторов вида

$$M_0^{-1}(I-Q)Bu(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

в пространстве $\mathcal{X}^0$. Плотность первого из упомянутых множеств имеет место тогда и только тогда, когда множество $\bigcup\limits_{t>0} \operatorname{im} U^t L_1^{-1} QB$ плотно в $\mathcal{X}^1$ согласно ([3], гл. 4, § 9, с. 260). Ввиду непрерывности оператора M_0^{-1}

$$x = M_0^{-1} \lim_{k\to\infty} (I-Q)Bu_k = \lim_{k\to\infty} M_0^{-1}(I-Q)Bu_k.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{dom} M_0 = M_0^{-1}[\mathcal{Y}^0] = M_0^{-1}[\overline{\operatorname{im}(I-Q)B}] \subset \overline{\operatorname{im} M_0^{-1}(I-Q)B}.$$

В силу плотности $\operatorname{dom} M_0$ получаем плотность множества векторов вида (4) в пространстве $\mathcal{X}^0$.

Докажем обратное утверждение. Из плотности множества $\operatorname{im} M_0^{-1}(I-Q)B$ следует, что любой элемент $x \in \mathcal{X}^0$ представи́м в виде $x = \lim\limits_{k\to\infty} M_0^{-1}(I-Q)Bu_k$. Если множество $\operatorname{im}(I-Q)B$ не плотно в $\mathcal{Y}^0$, то существует вектор $y \in \mathcal{Y}^0$ такой, что

$$y \neq \lim_{k\to\infty} (I-Q)Bw_k.$$

Подействуем на него непрерывным оператором M_0^{-1}. В силу биективности M_0^{-1} получаем

$$\mathcal{X}^0 \ni M_0^{-1}y \neq M_0^{-1} \lim_{k\to\infty} (I-Q)Bw_k = \lim_{k\to\infty} M_0^{-1}(I-Q)Bw_k.$$

Противоречие завершает доказательство теоремы. □

Следствие 1. Пусть оператор M сильно $(L,0)$-радиален. Тогда система (1) управляема в том и только том случае, когда выполнены следующие условия:

(i) если $\int\limits_0^t U^s L_1^{-1} QBB^* Q^* L_1^{-1*} U^{s*} x\, ds = 0$ для всех $t > 0$, то $x = 0$;

(ii) множество $\operatorname{im}(I-Q)B$ плотно в пространстве $\mathcal{Y}^0$.

Доказательство. Первое условие эквивалентно плотности в $\mathcal{X}^1$ множества $\bigcup\limits_{t>0} \operatorname{im} U^t L_1^{-1} QB$ согласно ([3], гл. 4, § 9, с. 261). Осталось сослаться на теорему 3. □

Здесь символом * помечаются сопряженные в смысле гильбертовых пространств операторы.

Теорема 4. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален,* $p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. *Тогда система* (1) *управляема, если множество* $\bigcup\limits_{t>0} \operatorname{im} U^t L_1^{-1} QB$ *плотно в* $\mathcal{X}^1$, *а множество* $\operatorname{im}(I-Q)B$ *плотно в* $\mathcal{Y}^0$.

Доказательство. Возьмем управление постоянным $u(t) = \mathrm{const} \in V(T)$. Тогда

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)Bu)^{(k)}(t) = -M_0^{-1}(I-Q)Bu(t).$$

В этом случае утверждение обосновано при доказательстве теоремы 3. □

Следствие 2. Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, где $p \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Тогда система (1) управляема, если выполнено

(i) если $\int\limits_0^t U^s L_1^{-1} QBB^* Q^* L_1^{-1*} U^{s*} x\, ds = 0$ для всех $t > 0$, то $x = 0$;

(ii) множество $\mathrm{im}(I-Q)B$ плотно в пространстве $\mathcal{Y}^0$.

Теорема 5. *Если оператор M сильно (L,p)-радиален, оператор M_1 ограничен, то множество $\bigcup\limits_{t>0} \mathrm{im}\, U^t L_1^{-1} QB$ плотно в $\mathcal{X}^1$ в том и только том случае, когда множество $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{im}(L_1^{-1}M_1)^k L_1^{-1}QB$ плотно в $\mathcal{X}^1$.*

Доказательство. Допустим, что множество $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{im}(L_1^{-1}M_1)^k L_1^{-1}QB$ не плотно в пространстве $\mathcal{X}^1$. Тогда найдется элемент x такой, что $\langle x, (L_1^{-1}M_1)^k L_1^{-1}QBu\rangle = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $u \in \mathcal{U}$. Здесь через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{X}$. В условиях теоремы оператор $L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$, значит, экспоненциальная формула $U_1^t z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1}(L_1^{-1}M_1)^k t^k z$ имеет место и

$$\langle x, U^t L_1^{-1}QBu\rangle = 0 \tag{5}$$

для каждого $t > 0$. Поэтому множество $\bigcup\limits_{t>0} \mathrm{im}\, U^t L_1^{-1}QB$ не плотно в $\mathcal{X}^1$.

Вторая часть теоремы доказывается в обратном порядке путем дифференцирования равенства (5) и перехода к пределу при $t \to 0$. □

Замечание. Можно показать, что оператор M сильно (L,p)-радиален, а оператор M_1 при этом ограничен тогда и только тогда, когда оператор M (L,σ)-ограничен [1], а бесконечность при этом является устранимой особой точкой (случай $p = 0$) либо полюсом (случай $p \in \mathbb{N}$).

Литература

1. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // УМН. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47–74.
2. Соболев С.Л. *Об одной новой задаче математической физики* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1954. – Т. 18. – С. 3–50.
3. Балакришнан А.В. *Прикладной функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 384 с.
4. Федоров В.Е. *Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов* // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 173–200.

Челябинский государственный университет

Поступили
первый вариант 08.08.2000
окончательный вариант 16.01.2001