ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 10 (497)

УДК 510.57

А.Н. ФРОЛОВ

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ СТРУКТУРА ВЫЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

Все рассматриваемые множества будут подмножествами множества натуральных чисел $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. Будем использовать базовые понятия полиномиально вычислимых ([1], [2], [3]), примитивно рекурсивных и вычислимых множеств ([4], [5]). Это такие множества, характеристическая функция которых полиномиально вычислимая, примитивно рекурсивная или вычислимая соответственно, а характеристическая функция множества A — это функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Будем писать $A \subseteq^* B$, если $A - B$ конечно; $A =^* B$, если $A \subseteq^* B$ и $B \subseteq^* A$, и $A \subset_\infty B$, если $A \subseteq^* B$ и $B \nsubseteq^* A$.

Очевидно, что бинарное отношение “$=^*$” является отношением эквивалентности, поэтому можем профакторизовать относительно “$=^*$” следующие классы множеств: $\mathcal{P} = \{A \subseteq \omega \mid A$ — полиномиально вычислимое множество$\}$, $\mathcal{PR} = \{A \subseteq \omega \mid A$ — примитивно рекурсивное множество$\}$ и $\mathcal{R} = \{A \subseteq \omega \mid A$ – вычислимое множество$\}$, соответственно $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}/_{=^*}$, $\mathcal{PR}^* = \mathcal{PR}/_{=^*}$ и $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}/_{=^*}$.

Если определить операцию $C(A) = \omega - A$, то легко заметить, что $\langle \mathcal{P}, \cup, \cap, C, \varnothing, \omega\rangle$, $\langle \mathcal{PR}, \cup, \cap, C, \varnothing, \omega\rangle$ и $\langle \mathcal{R}, \cup, \cap, C, \varnothing, \omega\rangle$ являются счетными булевыми алгебрами, причем булева алгебра $\mathcal{P}$ вкладывается в булеву алгебру $\mathcal{PR}$, а булева алгебра $\mathcal{PR}$ — в булеву алгебру $\mathcal{R}$.

Классами эквивалентности для фактор-множеств $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{PR}^*$ и $\mathcal{R}^*$ являются множества вида $A^* = \{B \subseteq \omega \mid B =^* A\}$. Введем следующие операции на классах: $A^* \cup^* B^* = (A \cup B)^*$, $A^* \cap^* B^* = (A \cap B)^*$ и $C^*(A^*) = (C(A))^*$. Тогда $\langle \mathcal{P}^*, \cup^*, \cap^*, C^*, \varnothing^*, \omega^*\rangle$, $\langle \mathcal{PR}^*, \cup^*, \cap^*, C^*, \varnothing^*, \omega^*\rangle$ и $\langle \mathcal{R}^*, \cup^*, \cap^*, C^*, \varnothing^*, \omega^*\rangle$ являются счетными булевыми алгебрами, причем булева алгебра $\mathcal{P}^*$ вкладывается в булеву алгебру $\mathcal{PR}^*$, а булева алгебра $\mathcal{PR}^*$ — в булеву алгебру $\mathcal{R}^*$.

Нетрудно видеть, что булевы алгебры $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{PR}^*$ и $\mathcal{R}^*$ безатомны, т. е. для любого бесконечного полиномиально вычислимого (примитивно рекурсивного или вычислимого) множества A существует бесконечное полиномиально вычислимое (примитивно рекурсивное или вычислимое соответственно) множество $B \subset_\infty A$.

Так как любые две счетные безатомные булевы алгебры изоморфны (напр., [6], гл. 2, § 3), то $\mathcal{P}^* \cong \mathcal{PR}^* \cong \mathcal{R}^*$.

Пусть $\mathcal{F}(\mathcal{P}) = \mathcal{F}(\mathcal{PR}) = \mathcal{F}(\mathcal{R}) = \{A \subseteq \omega \mid A$ – конечное множество$\}$, тогда $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, $\mathcal{F}(\mathcal{PR})$, $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ — идеалы Фреше для счетных булевых алгебр. Напомним, что идеалом Фреше булевой алгебры $\mathcal{D}$ называется идеал $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \{a \in \mathcal{D} \mid \exists a_1, \dots, a_n$, где a_i — атом или нуль, $1 \le i \le n\}$. Тогда очевидно, что $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}/_{\mathcal{F}(\mathcal{P})}$, $\mathcal{PR}^* = \mathcal{PR}/_{\mathcal{F}(\mathcal{PR})}$ и $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}/_{\mathcal{F}(\mathcal{R})}$. И, следовательно, $\mathcal{P}/_{\mathcal{F}(\mathcal{P})} \cong \mathcal{PR}/_{\mathcal{F}(\mathcal{PR})} \cong \mathcal{R}/_{\mathcal{F}(\mathcal{R})}$.

Так как булевы алгебры $\mathcal{P}$, $\mathcal{PR}$ и $\mathcal{R}$ атомные, то из $\mathcal{P}/_{\mathcal{F}(\mathcal{P})} \cong \mathcal{PR}/_{\mathcal{F}(\mathcal{PR})} \cong \mathcal{R}/_{\mathcal{F}(\mathcal{R})}$ следует $\mathcal{P} \cong \mathcal{PR} \cong \mathcal{R}$ ([6], гл. 2, § 3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-001169.

Определение 1. Назовем класс вычислимых функций $\mathcal{F}$ вычислимым классом, если существует эффективная нумерация $\{p_n(x)\}_{n\in\omega}$ этого класса, т. е. существует такая вычислимая функция $p(n,x)$, что

1) для любого n функция $\lambda x[p(n,x)] = p_n(x)$ принадлежит классу $\mathcal{F}$;
2) для любой функции $t(x) \in \mathcal{F}$ существует номер n, т. е. для любого x выполнено
$$p(n,x) = t(x);$$
3) существует такая функция $N(n,m) \in \mathcal{F}$, функция номеров, что для любого n существует бесконечно много таких чисел m, что $N(n,m) = 1$, и если $N(n,m) = 1$, то n и m — номера одной и той же функции из класса $\mathcal{F}$, т. е. для любого x выполнено $p(n,x) = p(m,x)$.

Известно (напр., [2] и [4]), что классы полиномиально вычислимых и примитивно рекурсивных функций являются вычислимыми классами. Введем обозначение $S(\mathcal{F}) = \{A \subseteq \omega \mid \exists n \forall x (p(n,x) \in \{0,1\} \& \chi_A(x) = p(n,x))\}$, где $\mathcal{F}$ — вычислимый класс, а $p(n,x)$ — его эффективная нумерация. Тогда S(класс полиномиально вычислимых функций) $= \mathcal{P}$, а S(класс примитивно рекурсивных функций) $= \mathcal{PR}$.

Определение 2. Введем следующую классификацию вычислимых множеств. Пусть $\mathcal{D} = S(\mathcal{F})$ для некоторого вычислимого класса функций $\mathcal{F}$, например, $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ или $\mathcal{D} = \mathcal{PR}$.

1) Вычислимое множество A называется $\mathcal{D}$-иммунным над множеством $T \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$-коиммунным под T), если $T \subset_\infty A$ ($A \subset_\infty T$) и не существует такого множества $P \in \mathcal{D}$, что $T \subset_\infty P \subset_\infty A$ ($A \subset_\infty P \subset_\infty T$).
2) Вычислимое множество называется строго $\mathcal{D}$-иммунным над T (строго $\mathcal{D}$-коиммунным под T), если оно является $\mathcal{D}$-иммунным над T и не является $\mathcal{D}$-коиммунным под P (является $\mathcal{D}$-коиммунным под T и не является $\mathcal{D}$-иммунным над P) ни для какого множества $P \in \mathcal{D}$.
3) Вычислимое множество называется $\mathcal{D}$-бииммунным в $T_1 \subset_\infty T_2$, если оно является $\mathcal{D}$-иммунным над T_1 и $\mathcal{D}$-коиммунным под T_2.
4) Вычислимое множество называется $\mathcal{D}$-предельным, если оно не является ни $\mathcal{D}$-иммунным над T_1, ни $\mathcal{D}$-коиммунным под T_2 ни для каких множеств $T_1, T_2 \in \mathcal{D}$.

Ясно, что для любого вычислимого множества A существуют такие множества $P_1 \subset_\infty P_2$ из класса $\mathcal{D}$, что множество A либо $\mathcal{D}$-бииммунно в $P_1 \subset_\infty P_2$, либо строго $\mathcal{D}$-иммунно над P_1, либо строго $\mathcal{D}$-коиммунно под P_2, либо $\mathcal{D}$-предельно.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{D}$ — некоторый класс множеств. Если $P_1 \subset_\infty R \subset_\infty P_2$ — такие множества из $\mathcal{D}$, что множество A $\mathcal{D}$-биммунно в $P_1 \subset_\infty P_2$, то множество $A \cap R$ является $\mathcal{D}$-биммунным в $P_1 \subset_\infty R$, а множество $A \cup R$ является $\mathcal{D}$-биммунным в $R \subset_\infty P_2$.*

Доказательство. Пусть $P_1 \subset_\infty R \subset_\infty P_2$. Рассмотрим множество $R' = (P_2 - R) \cup P_1$, тогда $P_1 \subset_\infty R' \subset_\infty P_2$. Если $A \cap R =^* P_1$, то и $A \subseteq^* \overline{R} \cup P_1 = (P_2 - R) \cup P_1 = R' \subset_\infty P_2$, что противоречит $\mathcal{D}$-коиммунности под P_2 множества A. Тогда $P_1 \subset_\infty A \cap R \subseteq^* A$. А так как A $\mathcal{D}$-иммунно над P_1, то $A \cap R$ $\mathcal{D}$-иммунно над P_1.

Если $A \cap R =^* R$, то $P_1 \subset_\infty R \subseteq A$, что противоречит $\mathcal{D}$-иммунности над P_1 множества A. Тогда $A \cap R \subset_\infty R$. Пусть существует такое множество $P \in \mathcal{D}$, что $A \cap R \subset_\infty P \subset_\infty R$. Имеем $A = (A \cap R) \cup (A \cap R') \subseteq^* P \cup R' \subset_\infty P_2$, что является противоречием с $\mathcal{D}$-коиммунностью под P_2 множества A. Таким образом, $A \cap R$ $\mathcal{D}$-коиммунно под R. Следовательно, $A \cap R$ $\mathcal{D}$-биммунно в $P_1 \subset_\infty R$.

Аналогично доказывается, что $A \cup R$ $\mathcal{D}$-биммунно в $R \subset_\infty P_2$. $\square$

Далее покажем, что каждый класс введенной классификации не пуст.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный вычислимый класс функций. Тогда для любых вычислимых множеств $A \subset_\infty B$ существует такое вычислимое множество C, что $A \subset_\infty C \subset_\infty B$ и для любого множества $R \in S(\mathcal{F})$ выполнено следующее*:

1) *если $R \subset_\infty C$, то $R \subseteq^* A$*;
2) *если $C \subset_\infty R$, то $B \subseteq^* R$.*

Доказательство. Пусть $p(n, x)$ — эффективная нумерация класса $\mathcal{F}$ и $A \subset_\infty B$, где A и B — вычислимые множества. Имеем $A \subseteq^* B$, можно считать, что $A \subseteq B$. Для построения вычислимого множества C построим вычислимую функцию $\chi_C(x)$ по шагам методом конечных расширений, т. е. $\chi_C = \cup_s f_s$, где f_s — строка конечной длины, рассматриваемая как начальный сегмент функции χ_C. Кроме того, обеспечим выполнение условия $f_s \subset f_{s+1}$. Построение строки на шаге s будет вычислимым, поэтому $\{f_s\}_{s\in\omega}$ будет вычислимой последовательностью и, следовательно, множество C будет вычислимым.

Шаг $s = 0$. Пусть $f_0 = \varnothing$.

Шаг $s + 1$. Пусть $n = \min\{x \mid x \notin \mathrm{dom}(f_s)\}$.

Случай 1. Если $\chi_A(n) = \chi_B(n)$, то $f_{s+1} = f_s\widehat{\ }\chi_A(n)$.

Случай 2. $\chi_A(n) = 0$, $\chi_B(n) = 1$.

Подшаг 1. Проверяем, существуют ли такие $j_0 < \cdots < j_k \le s$, что для любых $i \in \{0, \ldots, k\}$ выполнено либо

$p(j_i, n + i) = 1$ и $\forall x < n\ \chi_A(x) \le p(j_i, x) \le f_s(x)$,

либо

$p(j_i, n + i) = 0$ и $\forall x < n\ f_s(x) \le p(j_i, x) \le \chi_B(x)$.

Если таких $j_0 < \cdots < j_k$ нет, то переходим к подшагу 2. Если такой набор есть, то выбираем его с максимально возможным k и полагаем

$$f_{s+1}(x) = \begin{cases} f_s(x), & x < n; \\ 1, & x = n + i \text{ и } p(j_i, n_i) = 0; \\ 0, & x = n + i \text{ и } p(j_i, n_i) = 1. \end{cases}$$

Относительно таких чисел j_i, $0 \le i \le k$, будем говорить, что число j_i получило внимание. Заметим, что любое число a может получить внимание не более двух раз: когда $p(a, x_0) = 1$ и $p(a, x_1) = 0$ для некоторых x_0 и x_1.

Далее переходим в подшаг 2.

Подшаг 2. Пусть $n' = \min\{x \mid x \notin \mathrm{dom}(f_{s+1})\}$. Расширяем частичную функцию f_{s+1} еще на одно число следующим образом:

$$f_{s+1}(n') = \begin{cases} 1, & s \text{ — четное число;} \\ 0, & s \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Заметим, что таким образом обеспечиваем $f_s \subset f_{s+1}$ и $A \subset_\infty C \subset_\infty B$.

Конструкция закончена.

Пусть $\chi_C = \cup_s f_s$. Ясно, что множество C вычислимо. В силу подшага 2 имеем $A \subset_\infty C \subset_\infty B$.

Пусть для некоторого множества $R \in S(\mathcal{F})$ выполнено $R \subset_\infty C$. Для получения противоречия предположим, что не выполнено $R \subseteq^* A$. Пусть $\lambda x[p(j_0, x)]$ — характеристическая функция множества R. Тогда существует бесконечно много таких x, для которых $p(j_0, x) = 1$, $x \notin A$ и $x \in C$ (следовательно, $x \in B$).

Предположим, что j_0 не получает внимания при $p(j_0, x) = 1$ для некоторого x. Так как любое число может получить внимание не более двух раз, то можно выбрать такой шаг s, что после этого шага числа $\le j_0$ больше никогда не получат внимания. Далее, выберем такое число x_0, что $p(j_0, x_0) = 1$, $x \in B$ и $x \notin A$. По построению число j_0 должно получить внимание, т. е. $\chi_C(x_0) = 0$.

Так как для каждой функции из класса $\mathcal{F}$ в эффективной нумерации существует бесконечно много номеров, то существует другой, больший чем x_0, номер j_1 функции χ_R. По построению имеем $j_0 \le x_0$, следовательно, $j_0 \le j_1$. Для $\lambda x[p(j_1, x)]$ аналогично существует такое число $x_1 \neq x_0$ (т. к. $j_1 > x_0$), что $\chi_C(x_1) = 0$ и $p(j_1, x_1) = 1$, и т. д.

Таким образом, получим, что существуют такие числа $j_0 \neq j_1 \neq j_2 \neq \cdots$ и $x_0 \neq x_1 \neq x_2 \neq \cdots$, что для любого $i \in \omega$ выполнено $\chi_C(x_i) = 0$ и $p_{j_i}(x_i) = 1$. Это противоречит тому, что $R \subset_\infty C$. Таким образом, $R \subseteq^* A$.

Аналогично доказывается, что $B \subseteq^* R$, если $C \subset_\infty R$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый вычислимый класс функций. Тогда для любых множеств $P_1 \subset_\infty P_2$ из класса $S(\mathcal{F})$ существует $S(\mathcal{F})$-бииммунное в $P_1 \subset_\infty P_2$ множество.

Заметим, что вычислимое множество D $\mathcal{D}$-предельно тогда и только тогда, когда для любого множества $P \in \mathcal{D}$ из $P \subset_\infty D$ или $D \subset_\infty P$ следует существование такого множества $R \in \mathcal{D}$, что $P \subset_\infty R \subset_\infty D$ или $D \subset_\infty R \subset_\infty P$ соответственно.

Далее, в силу плотности $\mathcal{P}^*$ и $\mathcal{PR}^*$ легко видеть, что любое полиномиально вычислимое или примитивно рекурсивное множество является $\mathcal{P}$-предельным или $\mathcal{PR}$-предельным соответственно. Поэтому классы $\mathcal{P}$-предельных и $\mathcal{PR}$-предельных множеств не пусты. Естественно возникает вопрос: существуют ли $\mathcal{P}$-предельные не полиномиально вычислимые и $\mathcal{PR}$-предельные не примитивно рекурсивные множества?

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ (или $= \mathcal{PR}$) и $n(x)$ – сюръективная полиномиально вычислимая (примитивно рекурсивная) функция, а D — вычислимое множество со следующими свойствами*:

1) $p(n(x), x) = 0 \to x \in D$,

2) $p(n(x), x) = 1 \to x \notin D$,

где $p(n, x)$ — эффективная нумерация для класса $\mathcal{D}$.

Тогда множество D является $\mathcal{D}$-предельным, но $D \notin \mathcal{D}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{P}$. Предположим, что множество D полиномиально вычислимо и k_0 — его номер в эффективной нумерации, т. е. $\lambda x[p(k_0, x)]$ – характеристическая функция множества D.

Так как $n(x)$ сюръективна, то существует такое число x_0, что $k_0 = n(x_0)$. Если $x_0 \in D$, то $p(k_0, x_0) = 1$ и, следовательно, $x_0 \notin D$. Если же $x_0 \notin D$, то $p(k_0, x_0) = 0$ и, следовательно, $x_0 \in D$. Пришли к противоречию. Таким образом, $D \notin \mathcal{D}$.

Предположим, что существует такое полиномиально вычислимое множество P, что $D \subset_\infty P$ и $\lambda x[p(k, x)]$ — его характеристическая функция. Имеем $D \subseteq^* P$, можем считать, что $D \subseteq P$.

Пусть $N(n, m)$ — функция из определения 1 для класса $\mathcal{P}$. Построим тогда полиномиально вычислимую функцию $q(x)$, которая будет являться характеристической функцией некоторого множества Q, следующим образом.

1) Если $p(k, x) = 0$, то $q(x) = 0$.
2) Если $p(k, x) = 1$, то рассмотрим подслучаи
   a) если $N(k, n(x)) = 1$, то $q(x) = 0$;
   b) если $N(k, n(x)) = 0$, то $q(x) = 1$.

Очевидно, $q(x)$ — полиномиально вычислимая функция и, следовательно, множество Q полиномиально вычислимо.

Если $p(k, x) = 1$ и $N(k, n(x)) = 1$, то $1 = p(k, x) = p(n(x), x)$, следовательно, $\chi_D(x) = 0$. Поэтому для любого x выполнено $\chi_D(x) \le q(x) \le p(k, x)$, т. е. $D \subseteq Q \subseteq P$. Так как D не полиномиально вычислимое множество, то $D \subset_\infty Q$.

Докажем, что если $N(k, n(x)) = 1$, то $p(k, x) = 1$. Допустим противное. Пусть $N(k, n(x)) = 1$, но $p(k, x) = 0$. Тогда $0 = p(k, x) = p(n(x), x)$, следовательно, $\chi_D(x) = 1$. Получили противоречие, т. к. $D \subseteq P$, а элемент $x \in D$ и $p(k, x) = 0$, т. е. $x \notin P$.

Если $N(k, n(x)) = 1$ и $p(k, x) = 1$, то $q(x) = 0$, а т. к. существует бесконечно много таких чисел y, что $N(k, y) = 1$, а функция $n(x)$ сюръективна, то $Q \subset_\infty P$.

Аналогично доказывается, что если $P \subset_\infty D$, то существует такое полиномиально вычислимое множество Q, что $P \subset_\infty Q \subset_\infty D$. Таким образом, множество D $\mathcal{P}$-предельно.

Аналогично, множество D является $\mathcal{PR}$-предельным, если функция $n(x)$ — примитивно рекурсивная и удовлетворяет условиям предложения. $\square$

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ (или $= \mathcal{PR}$). Тогда для любых множеств $P \subset_\infty R$ из класса $\mathcal{D}$ существуют такие $\mathcal{D}$-предельные множества $D_1, D_2 \notin \mathcal{D}$, что $P \subset_\infty D_1 \subset_\infty D_2 \subset_\infty R$, и не существует такого множества $T \in \mathcal{D}$, что $D_1 \subset_\infty T \subset_\infty D_2$.*

Более того, любое такое вычислимое множество D, что $D_1 \subseteq^* D \subseteq^* D_2$, является $\mathcal{D}$-предельным и $D \notin \mathcal{D}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ и $p(n, x)$ — эффективная нумерация для класса полиномиально вычислимых множеств. Предположим, что $P_1 \subset_\infty P_2$ — полиномиально вычислимые множества. Тогда $P_1 \subseteq^* P_2$ и можем считать, что $P_1 \subseteq P_2$. Пусть $\chi_{P_1}(x)$ и $\chi_{P_2}(x)$ — характеристические полиномиально вычислимые функции множеств P_1 и P_2 соответственно.

Зафиксируем такое число k_0, что для любого числа x выполнено $p(k_0, x) = 2$.

Построим вспомогательную полиномиально вычислимую функцию $n(x)$ следующим образом:

1) $\widetilde{n}(0) = 0$,

2) $\widetilde{n}(x+1) = \begin{cases} \widetilde{n}(x), & \chi_{P_1}(x) = \chi_{P_2}(x); \\ \widetilde{n}(x) + 1, & \chi_{P_1}(x) \neq \chi_{P_2}(x). \end{cases}$

Тогда $n(x) = \begin{cases} k_0, & \chi_{P_1}(x) = \chi_{P_2}(x); \\ \widetilde{n}(x), & \chi_{P_1}(x) \neq \chi_{P_2}(x). \end{cases}$

Очевидно, $n(x)$ является полиномиально вычислимой функцией. Так как $P_1 \subset_\infty P_2$, то существует бесконечно много таких чисел x, что $\chi_{P_1}(x) = 0$ и $\chi_{P_2}(x) = 1$. Следовательно, для любого числа $x > 0$ существует $y = n(x)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $n(x)$ — сюръекция.

Теперь построим множества D_1 и D_2 следующим образом:

1) если $\chi_{P_1}(x) = \chi_{P_2}(x)$, то положим $\chi_{D_1}(x) = \chi_{D_2}(x) = \chi_{P_1}(x)$;

2) если $\chi_{P_1}(x) = 0$, а $\chi_{P_2}(x) = 1$, то

$$\chi_{D_1}(x) = \begin{cases} 1, & p(n(x), x) = 0; \\ 0, & p(n(x), x) \neq 0, \end{cases}$$

$$\chi_{D_2}(x) = \begin{cases} 1, & p(n(x), x) \neq 1; \\ 0, & p(n(x), x) = 1. \end{cases}$$

Пусть вычислимое множество D такое, что $D_1 \subseteq^* D \subseteq^* D_2$. Будем считать, что $D_1 \subseteq D \subseteq D_2$. Тогда D обладает свойствами

1) $p(n(x), x) = 0 \to x \in D$;

2) $p(n(x), x) = 1 \to x \notin D$.

Поэтому по предложению 2 D является $\mathcal{P}$-предельным не полиномиально вычислимым множеством.

Очевидно, $P_1 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq P_2$, а т. к. $P_1 \subset_\infty P_2$ и существует бесконечно много таких полиномиально вычислимых функций $p(s, x)$, что $p(s, x) \notin \{0, 1\}$, то $D_1 \subset_\infty D_2$. Поскольку D_1 и D_2 не являются полиномиально вычислимыми множествами, то $P_1 \subset_\infty D_1 \subset_\infty D_2 \subset_\infty P_2$.

Предположим, что существует такое полиномиально вычислимое множество T, что $D_1 \subset_\infty T \subset_\infty D_2$, тогда $D_1 \subseteq^* T \subseteq^* D_2$, и, следовательно, можем считать $D_1 \subseteq T \subseteq D_2$. Пусть $\lambda x[p(k, x)]$ — характеристическая функция множества T. Если $x \notin R$, то $p(k, x) = 0$ и, следовательно, $x \in D_1$. Получили противоречие, т. к. $D_1 \subseteq T$. Если $x \in R$, то $p(k, x) = 1$ и, следовательно, $x \notin D_2$. Получили противоречие, т. к. $T \subseteq D_2$. Следовательно, такого полиномиально вычислимого множества T не существует.

Аналогично, для примитивно рекурсивных множеств $P \subset_\infty R$ существуют $\mathcal{PR}$-предельные множества D_1 и D_2, удовлетворяющие условиям теоремы. $\square$

Следствие 2. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ (или $= \mathcal{PR}$). Тогда для любого множества

$$P \subset_\infty \omega \quad (\varnothing \subset_\infty P)$$

из класса $\mathcal{D}$ существует множество строго $\mathcal{D}$-иммунное над P (строго $\mathcal{D}$-коиммуное под P соответственно).

Доказательство. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ и P — такое полиномиально вычислимое множество, что $P \subset_\infty \omega$. По теореме 2 существует такое $\mathcal{D}$-предельное не полиномиально вычислимое множество D, что $P \subset_\infty D \subset_\infty \omega$. Тогда по теореме 1 существует такое вычислимое множество C, что $P \subset_\infty C \subset_\infty D$, и для любого полиномиально вычислимого множества R выполнено следующее:

1) если $R \subset_\infty C$, то $R \subseteq^* P$ (таким образом, C $\mathcal{P}$-иммунно над P);

2) если $C \subset_\infty R$, то $D \subseteq^* R$, но т. к. D не полиномиально вычислимо, то $D \subset_\infty R$, а поскольку D $\mathcal{D}$-предельно, то существует такое полиномиально вычислимое множество S, что $D \subset_\infty S \subset_\infty R$. Таким образом, $C \subset_\infty S \subset_\infty R$. Следовательно, C не является $\mathcal{P}$-коиммунным под R ни для какого полиномиально вычислимого множества R, т. е. C строго $\mathcal{P}$-иммунно над P.

Так же доказывается, что если P — такое полиномиально вычислимое множество, что $\varnothing \subset_\infty P$, то существует строго $\mathcal{P}$-коиммунное под P множество. Аналогичное доказательство имеет место и в случае $\mathcal{D} = \mathcal{PR}$. $\square$

Таким образом, установлено, что каждый класс введенной классификации не пуст.

Аналогично следствию 2 обосновывается

Следствие 3. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ (или $= \mathcal{PR}$). Тогда для любых $\mathcal{D}$-предельных множеств $A \subset_\infty B$ существует такое $\mathcal{D}$-предельное множество C, что $A \subset_\infty C \subset_\infty B$.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ (или $= \mathcal{PR}$). Тогда для любого вычислимого множества A существуют такие $\mathcal{D}$-предельные множества D_1, D_2, D_3 и D_4, что $A = (D_1 \cup D_2) \cap (D_3 \cup D_4)$. Более того, в качестве D_2 можно взять множество из $\mathcal{D}$, а $D_4 = \overline{D_2}$. При этом,*

1) *если A $\mathcal{D}$-предельно, то $A = D_1 = (D_1 \cup \varnothing) \cap (D_1 \cup \omega)$;*
2) *если A не является $\mathcal{D}$-коиммунным под ω и не является $\mathcal{D}$-предельным, то $A = D_1 \cap D_2 = (\varnothing \cup D_2) \cap (D_1 \cup \overline{D_2})$;*
3) *если A не является $\mathcal{D}$-иммунным над $\varnothing$ и не является $\mathcal{D}$-предельным, то $A = D_1 \cup D_2 = (D_1 \cup D_2) \cap (\omega \cup \overline{D_2})$;*
4) *если A $\mathcal{D}$-бииммунно в $\varnothing \subset_\infty \omega$, то $A = (D_1 \cup D_2) \cap (D_3 \cup D_4)$.*

Более того, в случаях 1)–4) множество A нельзя таким образом записать через меньшее число множеств.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ и множество A вычислимо. Если A является $\mathcal{P}$-предельным, то теорема очевидна. Поэтому будем считать, что A не $\mathcal{P}$-предельно.

I. Пусть A не является $\mathcal{P}$-иммунным над $\varnothing$. Тогда существует такое полиномиально вычислимое множество R, что $\varnothing \subset_\infty R \subseteq A$. Зафиксируем такое число k, что для любого числа x выполнено $p(k, x) = 2$, и определим вспомогательную полиномиально вычислимую функцию $n(x)$ следующим образом:

1) $\widetilde{n}(0) = 0$,

2) $\widetilde{n}(x+1) = \begin{cases} \widetilde{n}(x) + 1, & x \in R; \\ \widetilde{n}(x), & x \notin R. \end{cases}$

Тогда $n(x) = \begin{cases} \widetilde{n}(x), & x \in R; \\ k, & x \notin R. \end{cases}$

Очевидно, $n(x)$ является полиномиально вычислимой, а т. к. $\varnothing \subset_\infty R$, то существует бесконечно много чисел $x \in R$. Таким образом, для любого числа $x > 0$ существует число $y = n(x)$, т. е. можем считать, что $n(x)$ — сюръекция.

Пусть $D = (A - R) \cup \{x \in R \mid p(n(x), x) = 0\}$. Имеем $A = D \cup R$. Осталось доказать, что D $\mathcal{P}$-предельно.

a) Если $p(n(x), x) = 0$, то $x \in D$, т. к. если $x \notin D$, то $x \notin R$. Тогда $0 = p(n(x), x) = p(k, x) = 2$, противоречие.

b) Если же $p(n(x), x) = 1$, то $x \notin D$, т. к. если $x \in D$, то $x \notin R$. Тогда $1 = p(n(x), x) = p(k, x){=}2$, противоречие.

Таким образом, по предложению 2 множество D является $\mathcal{P}$-предельным.

II. Случай, когда A не является $\mathcal{P}$-коиммунным под ω, доказывается аналогично п. I.

III. Пусть A $\mathcal{P}$-бииммунно в $\varnothing \subset_\infty \omega$. Зафиксируем такое полиномиально вычислимое множество R, что $\varnothing \subset_\infty R \subset_\infty \omega$. Тогда $\varnothing \subset_\infty R \subseteq A \cup R$ и $\varnothing \subset_\infty \overline{R} \subseteq A \cup \overline{R}$. Но согласно п. I существуют такие $\mathcal{P}$-предельные множества D_1 и D_2, что $A \cup R = D_1 \cup R$ и $A \cup \overline{R} = D_2 \cup \overline{R}$. Тогда $A = (A \cup R) \cap (A \cup \overline{R}) = (D_1 \cup R) \cap (D_2 \cup \overline{R})$.

Очевидно, что представление множества A в случаях 1)–3) в условии теоремы улучшить нельзя. Пусть множество A является $\mathcal{P}$-бииммунным в $\varnothing \subset_\infty \omega$. Предположим, что множество A можно записать с помощью теоретико-множественных операций с использованием меньшего числа $\mathcal{P}$-предельных множеств. В этом случае легко видеть, что существует такое бесконечное $\mathcal{P}$-предельное множество D, что $D \subseteq A$ или $A \subseteq D$.

Рассмотрим случай, когда $D \subseteq A$ (случай $A \subseteq D$ рассматривается аналогично). Так как $\varnothing \subset_\infty D$ и D $\mathcal{D}$-предельно, то существует такое полиномиально вычислимое множество P, что $\varnothing \subset_\infty P \subset_\infty D$. Получили противоречие с $\mathcal{P}$-иммунностью над $\varnothing$ множества A.

Аналогично доказывается случай $\mathcal{D} = \mathcal{PR}$. $\square$

Замечание. Из теоремы 3 также следует существование $\mathcal{P}$-предельных не полиномиально вычислимых и $\mathcal{PR}$-предельных не примитивно рекурсивных множеств. Это будет следовать из того, что классы полиномиально вычислимых и примитивно рекурсивных множеств замкнуты относительно теоретико-множественных операций объединения и пересечения, а из теоремы 3 будет следовать, что $\mathcal{P}$-предельные и $\mathcal{PR}$-предельные множества этим свойством не обладают, более того, они порождают относительно тех же операций весь класс вычислимых множеств.

Литература

1. Cook S.A. *The complexity of theorem proving procedures* // Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory Comp. – 1971. – P. 151–158.
2. Ambos-Spies K. *Honest polynomial time reducibilities and the $P = NP$ problem* // J. Comput. System Sci. – 1989. – V. 39. – P. 250–281.
3. Karp R.M. *Reducibility among combinatorial problems* // Complexity Comput. Computat. Proc. Symp. – New York, 1972. – P. 85–104.
4. Мальцев А.И. *Алгоритмы и рекурсивные функции.* – М.: Наука, 1986. – 367 с.
5. Soare R.I. *Recursively enumerable sets and degrees.* – Heidelberg: Springer-Verlag, 1987 (русс. пер.: Соар Р.И. *Вычислимо перечислимые множества и степени.* – Казань: Казанск. матем. о-во, 2000. – 576 с.).
6. Ершов Ю.Л. *Проблемы разрешимости и конструктивные модели.* – М.: Наука, 1980. – 415 с.

Казанский государственный университет

Поступила 16.10.2002