ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.929.8

*И.Л. ОЙНАС, З.Б. ЦАЛЮК*

# АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k} x_k + f_n, \quad n \ge 0, \tag{1}$$

где $\{x_n\}$, $\{f_n\}$ — последовательности $m$-мерных векторов, $\{A_n\}$ — последовательность $m \times m$-матриц такая, что ряд $A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ сходится.

Если $D(z) = \Big(I - \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k A_k\Big)^{-1}$ не имеет особых точек в круге $|z| \le 1$, то, как следует из теоремы 2 [1], при $f_n = f + o(1)$, $n \to \infty$, решение $x_n = x + o(1)$, $n \to \infty$.

Известно поведение $x_n$ и в случае, когда $D(z)$ имеет в единичном круге конечное число полюсов. Здесь будет рассмотрен случай, когда $D(z)$ имеет существенно особую точку.

Далее предполагается, что $A_n \ge 0$,[1] $A > 0$ и $|\lambda_j(A)| \le 1$, причем, например, $|\lambda_1(A)| = 1$, где $\lambda_j(A)$ — собственные значения матрицы $A$. Тогда в силу теоремы Перрона [2], [3] $\lambda_1(A) = 1$, $\lambda_1(A)$ — простой корень характеристического уравнения и $|\lambda_j(A)| < 1$ при $j = 2, \dots, m$. Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kA_k$ сходится, то $D(z)$ имеет в точке $z = 1$ единственный полюс и это полюс первого порядка. Поэтому из $f_n = f + o(1)$, $n \to \infty$, следует $x_n = n[Bf + o(1)]$, где $B$ — некоторая матрица (см. теорему 3 [1]). Если же ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kA_k$ расходится, то можно лишь утверждать, что уравнение (1) неустойчиво и если $f_n = \mathrm{const} \ne 0$, то $|x_n| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Однако, как и в случае интегральных уравнений (см., напр., [4]–[6]), если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kA_k$ расходится, но $\Phi_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ определенным образом стремится к нулю, то для решения можно указать скорость, с которой $x_n \to \infty$. Этому и посвящена данная статья. Обычно такого рода результаты получаются из тауберовых теорем для преобразований Лапласа или производящих функций. Здесь будет использован иной подход. В его основе лежит

**Лемма** (ср. [5]). *Пусть $\Phi_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} A_k > 0$, $n \ge 0$, $|\lambda_j(A)| \le 1$, причем $\lambda_1(A) = 1$. Пусть, далее, начиная с некоторого номера, $f_n > 0$ и решение уравнения (1) $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть $\varphi_n = o(f_n)$, $n \to \infty$, и $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} A_{n-k} y_k + \varphi_n$, $n \ge 0$, тогда $y_n = o(x_n)$, $n \to \infty$.*

Справедлива

[1] Все операции и соотношения между матрицами и векторами понимаются покомпонентно. Например, $A = \{a_{kj}\} > 0$ означает, что $a_{kj} > 0$, $k, j = 1, \dots, m$.

**Теорема.** *Пусть* $|\lambda_j(A)| \leq 1$, $\lambda_1(A) = 1$, $\Phi_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} A_k > 0$, $n \geq 0$, *и* $\Phi_n = (B + o(1))n^{-\alpha}L(n)$, $n \to \infty$, *где* $B \neq 0$, $\alpha \in (0,1)$, $L(t)$ — *медленно меняющаяся функция, т. е. такая функция, что* $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{L(ct)}{L(t)} = 1$ *при любом* $c > 0$ [4].

*Тогда из* $f_n = f + o(1)$, $n \to \infty$, *следует*

$$x_n = \left[\mu \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} u + o(1)\right] \frac{n^\alpha}{L(n)}, \quad n \to \infty,$$

*где* $u$ — *положительный собственный вектор матрицы* $A$, *соответствующий* $\lambda_1(A)$, *а* $\mu$ *таково, что* $f - \mu B u \in \mathrm{Im}(I - A)$.

Утверждение следует из леммы и того, что если

$$y_n = \frac{n^\alpha}{L(n)} \lambda u + c, \quad \lambda \in R, \ \ c \in R^m,$$

то

$$\varphi_n = y_n - \sum_{k=0}^{n} A_{n-k} y_k = \frac{\lambda\alpha\pi}{\sin\alpha\pi} B u + (I - A)c + o(1), \quad n \to \infty.$$

Подробные доказательства изложены в [7].

## Литература


1. Ойнас И.Л., Цалюк З.Б. *Асимптотический характер резольвенты дискретного уравнения в свертках.* – Кубанск. ун-т. – Краснодар, 1998. – 13 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.10.98, № 3127-В98.
2. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1966. – 576 с.
3. Ланкастер П. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1978. – 280 с.
4. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 2. – М.: Мир, 1967. – 752 с.
5. Цалюк З.Б. *Об асимптотике решений уравнения восстановления* // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6. – № 6. – С. 1112–1114.
6. Дербенев В.А., Цалюк З.Б. *К вопросу об асимптотике неустойчивого уравнения восстановления.* – Кубанск. ун-т. – Краснодар, 1978. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ 21.09.78, № 3089-78.
7. Ойнас И.Л., Цалюк З.Б. *Асимптотика решений одной системы разностных уравнений.* – Кубанск. ун-т. – Краснодар, 1999. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 18.05.99, № 1567-В99.



*Кубанский государственный университет*



*Поступили*
*полный текст* 15.07.1998
*краткое сообщение* 10.02.2000