ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 10 (521)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.756

Т.Н. АНДРЕЕВА

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ СЕТЕЙ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Рассмотрим гиперповерхность [1] $V_{n-1} \subset C_n$ ($n \geq 3$), отнесенную к полуизотропному [2] полуортогональному ($g_{in} = (A_i A_n) = 0$; $i,j,k,l,s,t = \overline{1,n-1}$) реперу $R = \{A_\lambda\}$ ($\lambda,\mu,\rho = \overline{0,n+1}$) первого порядка. Уравнения инфинитезимального перемещения репера R имеют вид $dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu$, где дифференциальные формы Пфаффа ω_λ^μ удовлетворяют уравнениям структуры конформного пространства C_n ([3], [4]), $D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu$, а также линейным зависимостям

$$\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = 0, \quad \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0, \quad \omega_I^0 + g_{IK}\omega_{n+1}^K = 0,$$
$$\omega_I^{n+1} + g_{IK}\omega_0^K = 0, \quad dg_{IL} - g_{IK}\omega_L^K - g_{KL}\omega_I^K = 0 \quad (I,J,K,L = \overline{1,n}).$$

Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то [3], [4]

$$\|g_{\lambda\mu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{nn} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda},$$

причем метрический тензор g_{ij} и относительный инвариант g_{nn} являются невырожденными:

$$g_{il}g^{lj} = \delta_i^j, \quad g_{nn}g^{nn} = 1, \quad dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0,$$
$$dg^{ij} + g^{ik}\omega_k^j + g^{kj}\omega_k^i = 0, \quad d\ln g_{nn} - 2\omega_n^n = 0, \quad d\ln g^{nn} + 2\omega_n^n = 0.$$

В этом репере справедливо

$$\omega_0^n = 0, \quad \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j, \quad \omega_n^i = \Lambda_{nt}^i \omega_0^t, \quad g_{ij}\Lambda_{nk}^j + g_{nn}\Lambda_{ik}^n = 0. \tag{1}$$

2. На поверхности $\widetilde{V}_{n-1} \subset Q_n^2 \subset P_{n+1}$ (образ гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ при отображении Дарбу) проективного пространства P_{n+1} рассмотрим сеть $\widetilde{\Sigma}_{n-1}$, описываемую точкой A_0. В проективном репере R, отнесенном к ее линиям (т. е. вершины A_i репера R выбраны на касательных к линиям сети $\widetilde{\Sigma}_{n-1}$), дифференциальные уравнения сети $\widetilde{\Sigma}_{n-1} \subset \widetilde{V}_{n-1} \subset Q_n^2$ имеют вид [5]

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega_0^k, \quad i \neq j. \tag{2}$$

Каждому из $n-1$ семейств линий сети $\widetilde{\Sigma}_{n-1}$ при перенесении Дарбу на гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n соответствует семейство линий; $n-1$ таких линейно независимых семейств линий на гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ образуют сеть $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$.

В конформном репере R, отнесенном к сети $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$, она определяется системой дифференциальных уравнений (1), (2). В выбранном репере R роль “касательной” к i-й линии сети $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1}$ в ее точке A_0 играет пучок гиперсфер $X_i = A_i + \lambda_i A_0$.

Функции $a_i^s \stackrel{\text{def}}{=} \sum g_{ij} g^{js} - (n-2)\delta_i^s$ являются относительными ($i \neq s$) или абсолютными ($i = s$) инвариантами, причем матрица порядка $n-1$ из относительных и абсолютных инвариантов a_i^s невырождена. Элементы $\overset{*}{a}{}_k^i$ обратной матрицы определяются соотношениями $\overset{*}{a}{}_l^i a_s^l = \overset{*}{a}{}_s^l a_l^i = \sigma_s^i$.

Охват

$$q_i^0 \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\sum_{j\neq k} a_{kj}^j\Big)\overset{*}{a}{}_i^k \tag{3}$$

удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$dq_i^0 + q_i^0(\omega_0^0 - \omega_i^i) + \omega_i^0 = q_{is}^0 \omega_0^s. \tag{4}$$

Гиперсферы

$$F_i = q_i^0 A_0 + A_i, \tag{5}$$

принадлежащие “касательным” к линиям сети $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$, являются инвариантными: $\delta F_i = \pi_i^i F_i$; назовем их гармоническими гиперсферами сети. Очевидно, что в силу уравнений (4) поле гармонических окружностей $F \stackrel{\text{def}}{=} [F_i]$ пересечения $n-1$ гармонических гиперсфер F_i сети задает нормальное оснащение [1] гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$.

Теорема 1. *Поле гармонических окружностей $[F_i]$ сети Σ_{n-1}, заданной на гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, внутренним образом определяет нормальное оснащение гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n.*

3. Допустим, что сеть $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ ортогональная, т. е. касательные к ее линиям попарно ортогональны: $(X_i X_j) = (A_i A_j) = g_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Охват (3) для ортогональной сети примет вид

$$q_i^0 = -\frac{1}{n-2}\sum_{j\neq i} a_{ij}^j = \frac{1}{n-2} g_{ii} \sum_{j\neq i} g^{jj} a_{jj}^i. \tag{6}$$

Следовательно, гармонические гиперсферы (5) ортогональной сети $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ задаются $n-1$ квазитензорами q_i^0, определяемыми в (6).

Каждая из $n-2$ гиперсфер $F_i^j = -a_{ij}^j A_0 + A_i = g^{jj} g_{ii} a_{jj}^i A_0 + A_i$, $i \neq j$, принадлежащих “касательной” к i-й линии ортогональной сети $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$, является инвариантной: $\delta F_i^j = \pi_i^i F_i^j$. По аналогии с [5] назовем их псевдофокальными гиперсферами касательной $A_0 A_i$ к i-й линии сети $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1}$. Для ортогональной сети $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1}$ справедливо $F_i = \frac{1}{n-2}\sum\limits_{j\neq i} F_i^j$, в этом заключается геометрический смысл гармонических гиперсфер F_i ортогональной сети $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1}$.

4. Сеть $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ называется голономной, если каждое из $n-1$ уравнений Пфаффа $\omega_0^i = 0$ вполне интегрируемо. Необходимым и достаточным условием голономности сети $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1}$ является обращение в нуль всех относительных инвариантов $a_{[pq]}^i$ ($a_{[pq]}^i = 0, p, q \neq i$).

Известно [1], что совокупность функций $a_{ik}^n \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{ik}^n - \frac{1}{n-1} g_{ik} g^{tl} \Lambda_{lt}^n$ образует симметричный тензор второго порядка.

По аналогии с [6] будем говорить, что гиперповерхность $V_{n-1} \subset C_n$, несущая ортогональную сеть Σ_{n-1}, есть гиперсопряженная система, если при перенесении Дарбу соответствующая поверхность $\widetilde{V}_{n-1} \subset Q_n^2 \subset P_{n+1}$ является $(n-1)$-сопряженной системой в P_{n+1}, т. е. все псевдофокусы $F_i^j = -a_{ij}^j A_0 + A_i$, $i \neq j$, каждой касательной $A_0 A_i$ к линии ω_0^i сопряженной (относительно поля конусов направлений $a_{st}^n \omega_0^s \omega_0^t = 0$) сети $\widetilde{\Sigma}_{n-1} \subset \widetilde{V}_{n-1} \subset Q_n^2$ являются фокусами. Последнее означает, что

$$dF_i^j \in (A_0 A_i) \ (\mathrm{mod}\,\{\omega_0^k = 0,\ k \neq j\}). \tag{7}$$

В силу того, что $a_{ij}^n = 0$, $g_{ij} = 0$, справедливо $\Lambda_{ij}^n = 0$, $i \neq j$. Следовательно, соотношения (7) выполняются тогда и только тогда, когда $a_{[ij]}^k = 0$ (все индексы различны). Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *При $n > 3$ необходимым и достаточным условием, при котором гиперповерхность $V_{n-1} \subset C_n$, несущая ортогональную сопряженную сеть Σ_{n-1}, есть гиперсопряженная система, является обращение в нуль относительных инвариантов $a_{[ij]}^k$ (все индексы различны); при $n = 3$ всякая поверхность $V_2 \subset C_3$, несущая ортогональную сопряженную сеть, является 2-сопряженной системой.*

Теорема 3. *Гиперповерхность $V_{n-1} \subset C_n$ ($n \geq 3$), несущая ортогональную сопряженную сеть Σ_{n-1}, есть гиперсопряженная система тогда и только тогда, когда сеть Σ_{n-1} является голономной.*

Если на гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ задана ортогональная и сопряженная сеть Σ_{n-1}, то эта сеть называется сетью линий кривизны.

5. Предположим, что задано нормальное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем окружностей $[P_i]$, $P_i = A_i + x_i^0 A_0$, определяемым полем квазитензора x_i^0 [1]: $dx_i^0 + x_i^0\omega_0^0 - x_j^0\omega_i^j + \omega_i^0 = x_{ij}^0\omega_0^j$.

Согласно [7] система форм Пфаффа $\{\overset{0}{\theta}{}_0^j, \overset{0}{\theta}{}_i^j\}$, где

$$\overset{0}{\theta}{}_0^j = \omega_0^j, \quad \overset{0}{\theta}{}_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k) + g^{jk}x_k^0\omega_i^{n+1} + x_i^0\omega_0^j, \tag{8}$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева [8], [9]

$$D\overset{0}{\theta}{}_0^j = \overset{0}{\theta}{}_0^k \wedge \overset{0}{\theta}{}_k^j + \frac{1}{2}\overset{0}{r}{}_{0st}^j\overset{0}{\theta}{}_0^s \wedge \overset{0}{\theta}{}_0^t, \quad \overset{0}{r}{}_{0st}^j = 0; \quad D\overset{0}{\theta}{}_i^j = \overset{0}{\theta}{}_i^k \wedge \overset{0}{\theta}{}_k^j + \frac{1}{2}\overset{0}{r}{}_{ist}^j\overset{0}{\theta}{}_0^s \wedge \overset{0}{\theta}{}_0^t.$$

Следовательно, система форм (8) определяет пространство аффинной связности $\overset{0}{A}_{n-1,\,n-1}$ без кручения. Тензор кривизны этого пространства имеет строение [7]

$$\overset{0}{r}{}_{ist}^j = 2[g^{kl}x_l^0x_k^0g_{i[s}\delta_{t]}^j - g^{jk}x_k^0g_{i[s}\delta_{t]}^l x_l^0 + x_{i[s}^0\delta_{t]}^j + \Lambda_{i[s}^n\Lambda_{|n|t]}^j - x_i^0x_k^0\delta_{[s}^k\delta_{t]}^j - g^{jk}x_{k[s}^0g_{t]i} + \delta_i^j x_{k[s}^0\delta_{t]}^k]. \tag{9}$$

Известно [7], что пространство аффинной связности $\overset{0}{A}_{n-1,\,n-1}$ является пространством Вейля с полем метрического тензора g_{ij}; это пространство является римановым тогда и только тогда, когда кососимметричный тензор $x_{[ij]}^0$ обращается в нуль.

Условием параллельного перенесения направления A_0A_i касательной к i-й линии ортогональной сети $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ вдоль ее k-й линии в аффинной связности $\overset{0}{\nabla}$, индуцируемой нормальным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем квазитензора x_s^0, является выполнение соотношений

$$a_{ik}^j - g^{jj}x_j^0 g_{ik} + x_i^0\delta_k^j = 0, \quad i \neq j. \tag{10}$$

Если условие (10) справедливо для любых $i \neq k$, то ортогональная сеть $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ называется *чебышевской* относительно нормального оснащения гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, определяемого полем квазитензора x_i^0.

Из соотношений (10) при $i \neq k$ следует условие, при выполнении которого ортогональная сеть $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ является чебышевской в связности $\overset{0}{\nabla}$:

$$a_{ik}^j + x_i^0\delta_k^j = 0, \quad i \neq j, k.$$

Если условие (10) справедливо для любых $i = k$, то ортогональная сеть $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ называется *геодезической* относительно нормального оснащения гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$

полем квазитензора x_i^0. Из соотношений (10) при $i = k$ следует условие геодезичности ортогональной сети $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ в связности $\overset{0}{\nabla}$

$$a_{ii}^j - g_{ii} g^{jj} x_j^0 = 0, \quad i \neq j.$$

Теорема 4. *Если относительно некоторого нормального оснащения гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ $(n \geq 3)$ полем квазитензора x_i^0 подмногообразие V_{n-1} несет ортогональную геодезическую сеть Σ_{n-1} в аффинной связности $\overset{0}{\nabla}$, то она является сетью с совпавшими псевдофокальными гиперсферами и данное нормальное оснащение является оснащением полем ее гармонических окружностей $[F_i]$ $(x_i^0 \equiv q_i^0)$.*

Теорема 5. *Если ортогональная сеть $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ $(n \geq 3)$ — сеть с совпавшими псевдофокальными гиперсферами, то при нормальном оснащении гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем ее гармонических окружностей $[F_i]$ данная сеть является геодезической относительно аффинной связности $\overset{0}{\nabla}$.*

Теорема 6. *Если ортогональная сеть $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ $(n > 3)$ относительно некоторого нормального оснащения гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ является чебышевской в аффинной связности $\overset{0}{\nabla}$, то она является геодезической; при этом данное нормальное оснащение есть оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем гармонических окружностей $[F_i]$ сети.*

Заметим, что при $n = 3$ всякая ортогональная сеть $\Sigma_2 \subset V_2 \subset C_3$ при нормальном оснащении поверхности V_2 полем ее гармонических окружностей $[F_i]$ относительно аффинной связности $\overset{0}{\nabla}$ является геодезической и чебышевской одновременно.

Теорема 7. *Гиперповерхность $V_{n-1} \subset C_n$ $(n > 3)$ является гиперповерхностью, несущей чебышевскую сеть Σ_{n-1} линий кривизны тогда и только тогда, когда она является гиперсопряженной системой, несущей геодезическую сеть.*

Заметим, что при $n = 3$ всякая ортогональная сеть $\Sigma_2 \subset V_2 \subset C_3$ при нормальном оснащении поверхности V_2 полем ее гармонических окружностей $[F_i]$ относительно аффинной связности $\overset{0}{\nabla}$ является геодезической и чебышевской одновременно, а в случае ее сопряженности поверхность V_2 есть 2-сопряженная система.

6. Рассмотрим чебышевскую сеть линий кривизны $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ $(n > 3)$. В этом случае тензор кривизны (9) пространства аффинной связности $\overset{0}{A}_{n-1,\,n-1}$ обращается в нуль.

Теорема 8. *Внутренняя геометрия пространства аффинной связности $\overset{0}{A}_{n-1,\,n-1}$, индуцируемого нормальным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ $(n > 3)$ полем гармонических окружностей $[F_i]$ чебышевской сети линий кривизны $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1}$, является евклидовой (локально).*

7. Рассмотрим поверхность $V_2 \subset C_3$, несущую чебышевскую сеть линий кривизны Σ_2. В этом случае справедливо $dA_3 = \omega_3^3 A_3$. Последнее означает, что сфера A_3, касающаяся с $V_2 \subset C_3$ в точке $A_0 \in V_2$, является неподвижной.

Теорема 9. *Поверхность $V_2 \subset C_3$, несущая чебышевскую сеть Σ_2 линий кривизны относительно нормального оснащения полями ее гармонических окружностей $[F_i]$, вырождается в сферу A_3.*

Теорема 10. *Внутренняя геометрия пространства аффинной связности $\overset{0}{A}_{2,2}$, индуцируемого нормальным оснащением поверхности $V_2 \subset C_3$ полем гармонических окружностей $[F_i]$ чебышевской сети $\Sigma_2 \subset V_2$ линий кривизны, есть риманова тогда и только тогда, когда она является евклидовой (локально).*

Литература

1. Акивис М.А. *Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства* // Матем. сб. – 1952. – Т. 31. – № 1. – С. 43–75.
2. Бушманова Г.В., Норден А.П. *Элементы конформной геометрии.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – 178 с.
3. Акивис М.А. *К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей* // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. – № 1. – С. 53–72.
4. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Conformal differential geometry and its generalizations.* – USA, 1996. – 384 p.
5. Базылев В.Т. *О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 2. – С. 9–19.
6. Смирнов Р.В. *Преобразования Лапласа p-сопряженных систем* // ДАН СССР. – 1950. – Т. 71. – № 3. – С. 437–439.
7. Столяров А.В. *Линейные связности на распределениях конформного пространства* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 3. – С. 60–72.
8. Евтушик Л.Е., Лумисте Е.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1979. – Т. 9. – 246 с.
9. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.

Чувашский государственный педагогический университет

Поступили
полный текст 04.01.2005
краткое сообщение 23.05.2005