УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 1
С. 106–116

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.983.54

О НЕПРЕРЫВНОМ МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЗАДАЧИ СВЯЗАННОГО ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВХОДНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Р.А. Шафиев[1], *Е.А. Бондарь*[2], *И.Ю. Ястребова*[3]

[1]*Нижегородский государственный педагогический университет, г. Нижний Новгород, 603950, Россия*

[2]*Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, г. Нижний Новгород, 603950, Россия*

[3]*Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, 603950, Россия*

Аннотация

Для задачи связанного псевдообращения с входными операторами, удовлетворяющими условию обобщенной дополнительности, рассмотрен двупараметрический непрерывный метод регуляризации, основанный на стабилизации решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Найдены условия сходимости, уточняющие ранее известные результаты. Основной результат: доказана независимость параметрических функций друг от друга. Устойчивость метода установлена в классе всевозможных ограниченных возмущений. Для частного случая задачи с дополнительными входными операторами исследован однопараметрический непрерывный метод регуляризации.

Ключевые слова: нормальное связанное псевдорешение, операторное уравнение, гильбертово пространство, задача связанного псевдообращения, непрерывный метод регуляризации, условие обобщенной дополнительности операторов, условие дополнительности операторов

Введение

Пусть заданы линейные ограниченные операторы $A\colon X \to Y$, $B\colon X \to Z$, где пространства X, Y, Z гильбертовы, и векторы $y \in Y$, $z \in Z$. Определим

$$X_1 = \operatorname*{Argmin}_{x\in X} \|Bx - z\|^2, \quad X_A = \operatorname*{Argmin}_{x\in X_1} \|Ax - y\|^2.$$

Элемент x^* множества X_A с минимальной нормой называется нормальным связанным псевдорешением (сокращенно н.с.п.) уравнения

$$Ax - y = 0 \tag{1}$$

при дополнительных ограничениях $Bx - z = 0$. Задача нахождения элементов множества X_A называется задачей связанного псевдообращения уравнения (1). При отсутствии связей ($B = 0$, $z = 0$) эта задача переходит в задачу нахождения псевдорешений уравнения (1). В математической литературе последняя задача достаточно полно изучена (см., например, [1, 2]), чего нельзя сказать о задаче связанного псевдообращения.

В работе [3] для решения поставленной задачи рассмотрен непрерывный метод регуляризации, состоящий в том, что x^* находится как предел при $t \to +\infty$ решения $u(t)$ следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + \alpha(t)u(t) + \Gamma^*_{r(t)}\big(\Gamma_{r(t)}u(t) - g_{r(t)}\big) = 0, \\ u(t_0) = u_0,\ t \geq t_0, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\Gamma_{r(t)} = \begin{bmatrix} \sqrt{r(t)}B \\ A \end{bmatrix} : X \to Z \times Y = G, \quad g_{r(t)} = \begin{bmatrix} \sqrt{r(t)}\ z \\ y \end{bmatrix} \in G, \tag{3}$$

$*$ – знак сопряженного оператора, G – декартово произведение пространств Z и Y.

В настоящей работе продолжено исследование метода (2) в случае, когда входные операторы задачи подчинены условию

$$\exists \gamma > 0 \colon \|\Gamma x\| \geq \gamma \|x\| \quad \forall\, x \in N(\Gamma)^{\perp}, \tag{4}$$

где $\Gamma = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$, или более сильному условию, в котором неравенство в (4) предполагается выполненным для любых $x \in X$. При выполнении условия (4) операторы A и B будем называть обобщенно дополнительными, а при выполнении более сильного условия на всем X – просто дополнительными. Известно [4, с. 58, 22, 23], что (4) равносильно условию ограниченности псевдообратного оператора Γ^+, причем

$$\|\Gamma^+\| \leq \frac{1}{\gamma}, \tag{5}$$

а в случае дополнительности операторов Γ имеет левый обратный оператор $\Gamma^+ = (\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^*$.

Для задач с обобщенно дополнительными входными операторами сходимость непрерывного метода регуляризации доказана при независимом стремлении к своим пределам параметрических функций $\alpha(t)$ и $r(t)$, а устойчивость метода установлена в классе любых линейных ограниченных возмущений. Показано также, что для задач с дополнительными входными операторами возможно исключение параметра $\alpha(t)$ из рассмотренного метода регуляризации. Устойчивость упрощенного метода, зависящего от одной параметрической функции, установлена в том же классе возмущений.

1. Сходимость метода

Предположим, что параметрические функции $\alpha(t)$ и $r(t)$, определенные при $t \geq t_0$, удовлетворяют условиям

1) $\alpha(t) > 0$, убывает, $\lim\limits_{t \to +\infty} \alpha(t) = 0$ и существует производная $\alpha'(t)$;

2) $r(t) \geq 1$, возрастает, $\lim\limits_{t \to +\infty} r(t) = +\infty$ и существует производная $r'(t)$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$\alpha(t)x(t) + \Gamma^*_{r(t)}\left(\Gamma_{r(t)}x(t) - g_{r(t)}\right) = 0. \tag{6}$$

Очевидно, что при каждом фиксированном $t \geq t_0$ уравнение (6) имеет решение

$$x_{r\alpha}(t) = \left(\alpha(t)I + \Gamma^*_{r(t)}\Gamma_{r(t)}\right)^{-1}\Gamma^*_{r(t)}g_{r(t)}. \tag{7}$$

Уравнение (6) определяет нестационарный вариант операторного метода регуляризации задачи связанного псевдообращения, предложенного и исследованного в [4, гл. 2, § 6, 8]. Относительно этого метода справедлива

Лемма 1. *Если операторы A, B обобщенно дополнительные и*

$$z \in D(B^+) = R(B) \oplus N(B^*), \tag{8}$$

где $D(\cdot)$, $R(\cdot)$, $N(\cdot)$ – область определения, образ, ядро оператора соответственно, $\oplus$ – знак ортогональной суммы, то

$$\|B^*(Bx_{r\alpha}(t)-z)\| \le \frac{\alpha(t)}{\sqrt{r(t)}}\cdot\frac{\|z\|}{\gamma}+\frac{1}{r(t)}\,\|A^*y\|+\frac{1}{\sqrt{r(t)}}\cdot\frac{\|A\|^2}{\gamma}\left(\|z\|+\frac{1}{\sqrt{r(t)}}\,\|y\|\right). \tag{9}$$

Если, кроме того, выполнено условие

$$A^*(Ax^*-y) \in D(B^{*+}) = R(B^*) \oplus N(B), \tag{10}$$

то

$$\|x^*-x_{r\alpha}(t)\| \le \alpha(t)\,\frac{\|x^*\|}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma\sqrt{r(t)}}\,\left\|B^{*+}A^*(Ax^*-y)\right\|. \tag{11}$$

Доказательство. Для простоты лемму 1 докажем для случая, когда операторы A, B дополнительные. В этом случае уравнение (6) примет вид

$$\Gamma^*_{r(t)}\left(\Gamma_{r(t)}x(t)-g_{r(t)}\right)=0 \tag{12}$$

и определяет операторный вариант метода регуляризации, предложенного и исследованного в [5, гл. 1], а в утверждениях леммы 1 следует принять $\alpha(t)\equiv 0$ и $x_{r\alpha}(t)$ заменить на решение уравнения (12)

$$x_r(t)=\left(\Gamma^*_{r(t)}\Gamma_{r(t)}\right)^{-1}\Gamma^*_{r(t)}g_{r(t)}. \tag{13}$$

В силу очевидного равенства

$$B^*B=\frac{1}{r(t)}\left(\Gamma^*_{r(t)}\Gamma_{r(t)}-A^*A\right)$$

и формулы (13) получим

$$B^*\left(Bx_r(t)-z\right)=\frac{1}{r(t)}\,A^*y-\frac{1}{r(t)}\,A^*Ax_r(t),$$

откуда

$$\|B^*\left(Bx_r(t)-z\right)\| \le \frac{1}{r(t)}\,\|A^*y\|+\frac{1}{r(t)}\,\|A\|^2\,\|x_r(t)\|.$$

Как отмечено выше, в случае дополнительности A, B имеет место $\Gamma^+=(\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^*$ и $\|\Gamma^+\|$ оценивается неравенством (5). Но поскольку $r(t)\ge 1$ для всех $t\ge t_0$, то

$$\left\|\Gamma^+_{r(t)}\right\| \le \|\Gamma^+\| \le \frac{1}{\gamma}. \tag{14}$$

Следовательно, из (13) и (14) находим

$$\|x_r(t)\| \le \frac{1}{\gamma}\left\|g_{r(t)}\right\| \le \frac{1}{\gamma}\left(\sqrt{r(t)}\,\|z\|+\|y\|\right),$$

и оценка (9) установлена.

Далее заметим, что условие (8) обеспечивает существование н.с.п. уравнения (1). Подставим в разность $x^* - x_r(t)$ выражение (13):

$$x^* - x_r(t) = \left(\Gamma^*_{r(t)}\Gamma_{r(t)}\right)^{-1}\Gamma^*_{r(t)}\left(\Gamma_{r(t)}x^* - g_{r(t)}\right). \tag{15}$$

Известно [4, с. 44], что x^* характеризуется равенствами

$$B^*(Bx^* - z) = 0, \quad PA^*(Ax^* - y) = 0,$$

где P – ортопроектор на подпространство $N(B)$. Поэтому выражение (15) примет вид

$$x^* - x_r(t) = \left(\Gamma^*_{r(t)}\Gamma_{r(t)}\right)^{-1} P^\perp A^*(Ax^* - y).$$

Так как $P^\perp$ – ортопроектор на замыкание $R(B^*)$, то на $D(B^{*+})$ $P^\perp = B^*B^{*+}$, а значит, в силу предположения (10)

$$P^\perp A^*\left(Ax^* - y\right) = \frac{1}{\sqrt{r(t)}}\,\Gamma^*_{r(t)}\begin{bmatrix} B^{*+}A^*\left(Ax^* - y\right) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, а затем используя (14), получаем оценку погрешности (11), и лемма 1 доказана. □

Из леммы 1 вытекает

Следствие. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда*

$$\lim_{t\to+\infty}\|x_{r\alpha}(t) - x^*\| = 0, \tag{16}$$

$$\|x_{r\alpha}(t)\| \le c_1, \quad \|B^*(Bx_{r\alpha}(t) - z)\| \le \frac{c_2}{\sqrt{r(t)}}, \quad t \ge t_0, \tag{17}$$

здесь и далее c_i *– константы, не зависящие от* t.

Доказательство. Соотношения (16) и (17) следуют из оценок (11) и (9) в силу, что $\alpha(t)\to 0$, $r(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ согласно предположениям 1), 2) относительно параметрических функций. □

Согласно указанным предположениям существуют производные $\alpha'(t)$ и $r'(t)$, а значит, дифференцируемой оказывается функция $x_{r\alpha}(t)$. Для оценки нормы $\|x'_{r\alpha}(t)\|$ запишем (7) в виде

$$(\alpha(t)I + r(t)B^*B + A^*A)\,x_{r\alpha}(t) = r(t)B^*z + A^*y.$$

Продифференцировав это тождество и преобразовав результат, получим

$$\alpha(t)x'_{r\alpha}(t) + \Gamma^*_{r(t)}\Gamma_{r(t)}x'_{r\alpha}(t) = -\alpha'(t)x_{r\alpha}(t) - r'(t)B^*(Bx_{r\alpha}(t) - z).$$

Умножим это равенство скалярно на $x'_{r\alpha}(t)$ и отбросим слева положительное выражение $\alpha(t)(x'_{r\alpha}(t),\ x'_{r\alpha}(t))$, то

$$\|\Gamma_{r(t)}x'_{r\alpha}(t)\|^2 \le -\alpha'(t)(x_{r\alpha}(t),\ x'_{r\alpha}(t)) - r'(t)\left(B^*(Bx_{r\alpha}(t) - z),\ x'_{r\alpha}(t)\right). \tag{18}$$

Из (11) видно, что $x_{r\alpha}(t) \in R(\Gamma^*_{r(t)}) = N(\Gamma)^\perp$ при каждом $t \ge t_0$, поэтому траектория производной $x'_{r\alpha}(t)$ лежит в $N(\Gamma)^\perp$. Отсюда в силу (4)

$$\|\Gamma_{r(t)}x'_{r\alpha}(t)\|^2 \ge \gamma^2\|x'_{r\alpha}(t)\|^2.$$

Дополняя слева неравенство (18) последним неравенством и применяя справа неравенство Коши – Буняковского, после сокращения на $\|x'_{r\alpha}(t)\|$ получим оценку

$$\|x'_{r\alpha}(t)\| \le \frac{1}{\gamma^2}\Big(|\alpha'(t)|\|x_{r\alpha}(t)\| + |r'(t)|\|B^*(Bx_{r\alpha}(t)-z)\|\Big),$$

откуда, используя (17), окончательно находим

$$\|x'_{r\alpha}(t)\| \le c_3\left(|\alpha'(t)| + \frac{|r'(t)|}{\sqrt{r(t)}}\right), \quad t \ge t_0. \tag{19}$$

Для удобства приведем известную [6, с. 504], [7, с. 264] лемму о дифференциальном неравенстве.

Лемма 2 о дифференциальном неравенстве. *Пусть функция $x(t)$ дифференцируема при всех $t \ge t_0$ и ее производная $x'(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$x'(t) \le a(t)x(t) + b(t), \quad t \ge t_0, \quad x(t_0) = x_0,$$

где $a(t)$, $b(t)$ – непрерывные функции. Тогда если

$$1)\ a(t) < 0 \ \ \textit{при всех} \ \ t \ge t_0; \quad 2)\ \lim_{t\to+\infty}\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds = -\infty; \quad 3)\ \lim_{t\to+\infty}\frac{b(t)}{a(t)} = 0,$$

то $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Теперь сформулируем и докажем теорему о сходимости непрерывного метода (2).

Теорема 1. *Пусть операторы A, B обобщенно дополнительные, z удовлетворяет условию* (8) *и выполнено условие* (10). *Если параметрические функции $\alpha(t)$, $r(t)$, помимо* 1), 2), *удовлетворяют условиям*

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\alpha(s)ds = +\infty, \tag{20}$$

$$\lim_{t\to+\infty}|\alpha'(t)| = 0, \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{|r'(t)|}{\sqrt{r(t)}} = 0, \tag{21}$$

то решение $u(t)$ задачи Коши (2) *при любом u_0 стабилизируется к x^* – н.с.п. уравнения* (1).

Доказательство. Прежде всего заметим, что условие (8) и обобщенная дополнительность операторов A, B обеспечивают существование и единственность в $N(\Gamma)^{\perp}$ н.с.п. уравнения (1) [4, с. 58, 43], а непрерывность $\alpha(t)$, $r(t)$ – существование и единственность решения задачи Коши (2) [8, с. 389].

Пусть $u(t) = v(t) + w(t)$, где $v(t)$ – проекция $u(t)$ на $N(\Gamma)$, а $w(t)$ – на $N(\Gamma)^{\perp}$. Так как $R(\Gamma^*_{r(t)}) = N(\Gamma)^{\perp}$, $\Gamma_{r(t)}v(t) = 0$, то функция $v(t)$ есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + \alpha(t)v(t) = 0, \\ v(t_0) = v_0. \end{cases} \tag{22}$$

Умножая уравнение (22) на $v(t)$ скалярно и учитывая равенство

$$\left(\frac{dv(t)}{dt},\ v(t)\right) = \|v(t)\|\,\frac{d\|v(t)\|}{dt}, \tag{23}$$

справедливое для любых дифференцируемых функций, находим

$$\frac{d\|v(t)\|}{dt} + \alpha(t)\|v(t)\| = 0, \quad \|v(t_0)\| = \|v_0\|.$$

Применяя лемму 2 о дифференциальном неравенстве, отсюда получим

$$\|v(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{24}$$

Проекция $w(t)$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} + \alpha(t)w(t) + \Gamma^*_{r(t)}\big(\Gamma_{r(t)}w(t) - g_{r(t)}\big) = 0, \\ w(t_0) = w_0. \end{cases} \tag{25}$$

Введем обозначение

$$\varepsilon(t) = x_{r\alpha}(t) - w(t). \tag{26}$$

Для функции $\varepsilon(t)$ получим тождество

$$\varepsilon'(t) + \alpha(t)\varepsilon(t) + \Gamma^*_{r(t)}\Gamma_{r(t)}\varepsilon(t) = x'_{r\alpha}(t),$$

если $x_{r\alpha}(t)$ подставим в уравнение (6) и из полученного тождества вычтем (25). Умножив последнее равенство на $\varepsilon(t)$ скалярно и отбросив положительное слагаемое $\alpha(t)\Big(\varepsilon(t),\ \varepsilon(t)\Big)$, с учетом (23) получим дифференциальное неравенство

$$\|\varepsilon(t)\|\,\frac{d\|\varepsilon(t)\|}{dt} + \big\|\Gamma_{r(t)}\varepsilon(t)\big\|^2 \le \Big(x'_{r\alpha}(t),\ \varepsilon(t)\Big).$$

Поскольку $\varepsilon(t) \in N(\Gamma)^\perp = N(\Gamma_{r(t)})^\perp$ при каждом t, то можно воспользоваться условием (4) $\big\|\Gamma_{r(t)}\varepsilon(t)\big\|^2 \ge \gamma^2\|\varepsilon(t)\|^2$ и усилить последнее неравенство:

$$\frac{d\|\varepsilon(t)\|}{dt} + \gamma^2\|\varepsilon(t)\| \le \|x'_{r\alpha}(t)\|.$$

Применяя к этому неравенству лемму 2 о дифференциальном неравенстве, легко убедиться, что третье условие леммы выполняется в силу неравенства (19) и предположений (21), а выполнение первого и второго условий очевидно. Поэтому

$$\|\varepsilon(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{27}$$

Теперь полную погрешность непрерывного метода (2) с учетом (26) и обозначения $u(t) = v(t) + w(t)$ оценим в виде

$$\|x^* - u(t)\| \le \|x^* - x_{r\alpha}(t)\| + \|v(t)\| + \|\varepsilon(t)\|,$$

откуда в силу (16), (24) и (27) следует, что $\|x^* - u(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Теорема 1 доказана. □

Замечание. В случае, когда операторы A, B дополнительные, лемма 1 и теорема 1 остаются справедливыми, если в их формулировках считать $\alpha(t) \equiv 0$, $x_{r\alpha}(t)$ заменить на $x_r(t)$, а $u(t)$ считать решением задачи Коши (2) с $\alpha(t) \equiv 0$.

2. Устойчивость метода

Для исследования устойчивости метода (2) предположим, что входные данные задачи связанного псевдобращения известны приближенно со следующими уровнями возмущений:

$$\|A(t)-A\|\le l(t),\quad \|B(t)-B\|\le h(t),\quad \|y(t)-y\|\le s(t),\quad \|z(t)-z\|\le\delta(t),\tag{28}$$

где $l(t)$, $h(t)$, $s(t)$, $\delta(t)$ – определенные при $t\ge t_0$, неотрицательные, непрерывные функции, ограниченные сверху при $t\ge t_0$ соответственно числами $\overline{l}$, $\overline{h}$, $\overline{s}$, $\overline{\delta}$.

Пусть $\Gamma_{r(t)}(t)$ и $g_{r(t)}(t)$ составлены из приближенных данных аналогично (3). Рассмотрим возмущенную задачу Коши (2) с тем же начальным условием:

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}+\alpha(t)u(t)+\Gamma^*_{r(t)}(t)\big(\Gamma_{r(t)}(t)u(t)-g_{r(t)}(t)\big)=0,\\ u(t_0)=u_0,\ t\ge t_0.\end{cases}\tag{29}$$

Через $\widetilde{u}(t)$ обозначим решение задачи Коши (29), существование и единственность которого следует из общей теоремы (см. [8, с. 389]). Согласно неравенства треугольника имеем

$$\|\widetilde{u}(t)-x^*\|\le\|u(t)-x^*\|+\|\widetilde{u}(t)-u(t)\|.\tag{30}$$

Поэтому для установления устойчивости достаточно исследовать $\|\widetilde{u}(t)-u(t)\|$.

Пусть $\sigma(t)=\widetilde{u}(t)-u(t)$. Очевидно, что функция $\sigma(t)$ удовлетворяет равенству $\sigma(t_0)=0$ и

$$\frac{d\sigma(t)}{dt}+\alpha(t)\sigma(t)+\Gamma^*_{r(t)}(t)\Gamma_{r(t)}(t)\sigma(t)=\big(\Gamma^*_{r(t)}\Gamma_{r(t)}-\Gamma^*_{r(t)}(t)\Gamma_{r(t)}(t)\big)u(t)+\\ +\Gamma^*_{r(t)}(t)(g_{r(t)}(t)-g_{r(t)})+(\Gamma^*_{r(t)}(t)-\Gamma^*_{r(t)})g_{r(t)}.\tag{31}$$

Умножим равенство (31) скалярно на $\sigma(t)$ и воспользуемся равенством (23). После применения справа неравенства Коши–Буняковского получим

$$\|\sigma(t)\|\frac{d\|\sigma(t)\|}{dt}+\alpha(t)\|\sigma(t)\|^2+\|\Gamma_{r(t)}(t)\sigma(t)\|^2\le\\ \le\Big(\Big\|\Gamma^*_{r(t)}\Gamma_{r(t)}-\Gamma^*_{r(t)}(t)\Gamma_{r(t)}(t)\Big\|\,\|u(t)\|+\\ +\Big\|\Gamma^*_{r(t)}(t)(g_{r(t)}(t)-g_{r(t)})\Big\|+\Big\|(\Gamma^*_{r(t)}(t)-\Gamma^*_{r(t)})g_{r(t)}\Big\|\Big)\,\|\sigma(t)\|.\tag{32}$$

Пользуясь условиями аппроксимации (28) и считая норму $\|u(t)\|$ ограниченной, выражение в круглых скобках в правой части (32) можно оценить соотношением

$$\varphi(t)=c_4\left[r(t)\big(h(t)+\delta(t)\big)+l(t)+s(t)\right].\tag{33}$$

Отбросив в (32) положительное слагаемое $\|\Gamma_{r(t)}(t)\sigma(t)\|^2$, получим

$$\frac{d\|\sigma(t)\|}{dt}+\alpha(t)\|\sigma(t)\|\le\varphi(t).\tag{34}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если параметрические функции* $\alpha(t)$ *и* $r(t)$ *регуляризации удовлетворяют условиям*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{r(t)}{\alpha(t)}\big(h(t)+\delta(t)\big)=0,\qquad\lim_{t\to+\infty}\frac{l(t)+s(t)}{\alpha(t)}=0\tag{35}$$

согласования с уровнями погрешностей (28), *то решение* $\widetilde{u}(t)$ *возмущенной задачи Коши* (29) *при любом* u_0 *стабилизируется к* x^* *– н.с.п. уравнения* (1).

Доказательство. В силу неравенства треугольника (30) и обозначения $\sigma(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$ имеем
$$\|\widetilde{u}(t) - x^*\| \le \|u(t) - x^*\| + \|\sigma(t)\|.$$
Так как условия теоремы 1 выполнены, то $\|u(t) - x^*\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Отсюда легко установить ограниченность $\|u(t)\|$, а значит, для $\|\sigma(t)\|$ справедливо дифференциальное неравенство (34), где $\varphi(t)$ определено в (33). Нетрудно видеть, что для коэффициентов этого неравенства условие 1) леммы о дифференциальном неравенстве выполнено, а условия 2) и 3) вытекают из предположений (20) и (35) соответственно. На основании этой леммы имеем $\|\widetilde{u}(t) - u(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь случай дополнительности операторов A, B. Пусть $\Delta(t) = \Gamma(t) - \Gamma$. Покажем, что если $\|\Delta(t)\| < \gamma$, то возмущенные операторы $A(t)$, $B(t)$ также дополнительные. Действительно,
$$\|\Gamma(t)x\| \ge \|\Gamma x\| - \|\Delta(t)x\| \ge \big(\gamma - \|\Delta(t)\|\big)\|x\|.$$
Так как
$$\|\Delta(t)\| = \sqrt{\|A(t) - A\|^2 + \|B(t) - B\|^2} \le \sqrt{l^2(t) + h^2(t)} \le \sqrt{\bar{l}^{\,2} + \bar{h}^{\,2}},$$
то при выполнении, например, условия
$$\sqrt{\bar{l}^{\,2} + \bar{h}^{\,2}} \le \frac{\gamma}{2} \tag{36}$$
получим, что
$$\|\Gamma(t)x\| \ge \frac{\gamma}{2}\,\|x\| \quad \forall\, t \ge t_0.$$
Отсюда в силу того, что $r(t) \ge 1$, находим
$$\|\Gamma_{r(t)}(t)x\| \ge \frac{\gamma}{2}\,\|x\| \quad \forall\, t \ge t_0 \ \text{ и } \ x \in X. \tag{37}$$

Возвращаясь к неравенству (32), видим, что теперь слагаемое $\alpha(t)\|\sigma(t)\|^2$ можно отбросить. Воспользовавшись (37), для функции $\|\sigma(t)\|$ получим дифференциальное неравенство
$$\frac{d\|\sigma(t)\|}{dt} + \frac{\gamma^2}{4}\,\|\sigma(t)\| \le \varphi(t). \tag{38}$$

Приведем здесь полную формулировку теоремы устойчивости в случае дополнительности операторов A, B.

Теорема 3. *Пусть операторы A, B дополнительные и выполнены условия* (8) *и* (10). *Пусть, кроме того, выполнено условие* (36) *и*
$$\lim_{t\to+\infty} l(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} s(t) = 0. \tag{39}$$
Если параметрическая функция регуляризации $r(t)$ удовлетворяет условиям: $r(t) \ge 1$, возрастает, $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{|r'(t)|}{\sqrt{r(t)}} = 0$, а также условию
$$\lim_{t\to+\infty} r(t)\big(h(t) + \delta(t)\big) = +\infty \tag{40}$$
согласования с уровнями погрешностей (28), *то решение $\widetilde{u}(t)$ возмущенной задачи Коши* (29), *где $\alpha(t) \equiv 0$, при любом u_0 стабилизируется к x^* – н.с.п. уравнения* (1).

Доказательство. Поскольку в теореме 3 предполагаются выполненными условия леммы 1 и теоремы 1, но операторы A, B дополнительные, то, как отмечено в замечании, в этом случае в лемме 1 и теореме 1 можно принять $\alpha(t) \equiv 0$, и, значит, имеют место соотношения $x_r(t) - x^* \to 0$ и $u(t) - x_r(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому для доказательства теоремы 3 достаточно установить, что $\|\widetilde{u}(t) - u(t)\| \to \to 0$, где $\widetilde{u}(t)$ и $u(t)$ – решения соответствующих задач Коши с $\alpha(t) \equiv 0$. Но $\|\widetilde{u}(t) - u(t)\| = \|\sigma(t)\|$ удовлетворяет неравенству (38), для коэффициентов которого выполнены условия 1) и 2) леммы о дифференциальном неравенстве, а условие 3) следует из предположений (39), (40). Теорема доказана. $\square$

В качестве параметрических функций и уровней погрешностей можно взять функции

$$\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha}, \quad r(t) = t^r, \quad h(t) = \delta(t) = \frac{1}{t^h}, \quad l(t) = s(t) = \frac{1}{t^l}, \tag{41}$$

где α, r, h, l – положительные числа. Система функций (41) удовлетворяет условиям теоремы 2, если

$$\alpha < 1, \quad r < 2, \quad h > \alpha + r, \quad l > \alpha,$$

и условиям теоремы 3, если $r < 2$, $h > r$. Отметим, что можно считать $t_0 \geq 1$; если $h(t)$ и $l(t)$ из (41) подставить в неравенство (36), то, разрешая его относительно t, можно получить значение t_0.

Литература

1. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986. – 181 с.
2. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. – Екатеринбург: Наука, 1993. – 261 с.
3. *Бондарь Е.А., Шафиев Р.А.* Непрерывный метод решения задачи связанного псевдообращения // Вестник Нижегор. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. Матем. – 2006. – № 1, ч. 4. – С. 4–14.
4. *Шафиев Р.А.* Псевдообращение операторов и некоторые приложения. – Баку: Элм, 1989. – 152 с.
5. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
6. *Альбер Я.И.* Непрерывная регуляризация линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Матем. заметки. – 1968. – Т. 4, № 5. – С. 503–509.
7. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
8. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.

Поступила в редакцию
09.09.15

Шафиев Рамиз Алиовсад оглы, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и математического образования

Нижегородский государственный педагогический университет
ул. Ульянова, д. 1, г. Нижний Новгород, 603950, Россия
E-mail: *a_shafieva@rambler.ru*

Бондарь Елена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Ильинская, д. 65, г. Нижний Новгород, 603950, Россия
E-mail: *bonde28@ya.ru*

Ястребова Ирина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и оптимального управления

Нижегородский государственный университет
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия
E-mail: *Irina_ Yastrebova@rambler.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 1, pp. 106–116

On Continuous Regularization Method for a Constrained Pseudoinverse Problem with Additional Restrictions on Input Operators

R.A. Shafiev[a*], *E.A. Bondar*[b**], *I.Yu. Yastrebova*[c***]

[a]*Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod, 603950 Russia*
[b]*Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, 603950 Russia*
[c]*Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, 603950 Russia*
E-mail: **a_shafieva@rambler.ru*, ***bonde28@ya.ru*, ****Irina_Yastrebova@rambler.ru*,

Received September 9, 2015

Abstract

A two-parameter continuous method of regularization is considered for a constrained pseudoinverse problem with generalized complementarity of the input operators. This method is based on stabilization of the solutions of differential equations in the Hilbert space. The already known general convergence conditions are specified. The major obtained result is that the parameter functions proved to be independent from each other. The stability of the method is established in the class of all possible constrained disturbances. A one-parameter continuous method of regularization is studied for the special case of the problem with additional input operators.

Keywords: normal constrained pseudosolution, operator equation, Hilbert space, constrained pseudoinverse problem, continuous method of regularization, generalized complementarity condition of operators, complementarity condition of operators

References

1. Vainikko G.M., Veretennikov A.Yu. Iterative Procedures in Ill-Posed Problems. Moscow, Nauka, 1986. 181 p. (In Russian)
2. Vasin V.V., Ageev A.L. Incorrect Problems with Priori Information. Yekaternburg, Nauka, 1993. 261 p. (In Russian)

3. Bondar E.A., Shafiev R.A. A continuous method for the solution of the bound pseudoinversion problem. *Vestn. Nizhegorod. Univ. im. N. I. Lobachevskogo. Ser. Mat.*, 2006, no. 1, pt. 4, pp. 4–14. (In Russian)

4. Shafiev R.A. Pseudoinversion of Operators and Some Applications. Baku, Elm, 1989. 152 p. (In Russian)

5. Morozov V.A. Regular Methods for Solving Ill-Posed Problems. Moscow, Nauka, 1987. 360 p. (In Russian)

6. Alber Ya.I. A continuous regularization of linear operators equations in Hilbert spaces. *Mat. Zametki*, 1968, vol. 4, no. 5, pp. 503–509. (In Russian)

7. Vasil'ev F.P. Methods for Solving Extremal Problems. Moscow, Nauka, 1981. 400 p. (In Russian)

8. Trenogin V.A. Functional Analysis. Moscow, FIZMATLIT, 2007. 488 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Шафиев Р.А., Бондарь Е.А., Ястребова И.Ю.* О непрерывном методе регуляризации задачи связанного псевдообращения с дополнительными ограничениями на входные операторы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 106–116. ⟩

⟨ ***For citation*:** Shafiev R.A., Bondar E.A., Yastrebova I.Yu. On continuous regularization method for a constrained pseudoinverse problem with additional restrictions on input operators. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 106–116. (In Russian) ⟩