ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 3 (526)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956

А.А. КУНГУРЦЕВ

ОБ ОДНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Пусть $D = \{0 < x < x_1,\ 0 < y < y_1,\ 0 < z < z_1\}$, $T = \{-\infty < t_k < +\infty,\ k = 1, \dots, 7\}$, а функция f определена на $D \cup T$, причем $f \in C(\overline{D})$, а на T имеет место условие (Липшица)

$$|f(x, y, z, \tau_1, \dots, \tau_7) - f(x, y, z, \omega_1, \dots, \omega_7)| \le A \sum_{s=1}^{7} |\tau_s - \omega_s|, \quad A = \mathrm{const} > 0. \tag{1}$$

В данной статье будем рассматривать уравнение

$$U_{xyz} = f(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz}), \tag{2}$$

частные случаи которого встречаются при исследовании вибрации, в теориях аппроксимации и отображений ([1], с. 109) и при изучении преобразований обыкновенных дифференциальных операторов [2].

Задача 1 (*Гурса*). Найти функцию $U \in C^{(1,1,1)}(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и условиям

$$U(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \quad U(x, 0, z) = \varphi_2(x, z), \quad U(0, y, z) = \varphi_3(y, z), \quad \varphi_k \in C^{(1,1)}(D_k), \tag{3}$$

$$\varphi_1(x, 0) = \varphi_2(x, 0) = \lambda_1(x), \quad \varphi_1(0, y) = \varphi_3(y, 0) = \lambda_2(y), \quad \varphi_2(0, z) = \varphi_3(0, z) = \lambda_3(z). \tag{4}$$

Здесь $C^{(k,l,m)}$ — класс функций, имеющих непрерывные производные $\frac{\partial^{r_1+r_2+r_3}}{\partial x^{r_1} \partial x^{r_2} \partial x^{r_3}}$ для всех $r_1 \le k$, $r_2 \le l$, $r_3 \le m$, λ_k — обозначения общих значений, а D_k $(k = 1, 2, 3)$ — грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ соответственно.

Очевидно, уравнения (2) при условиях (3)–(4) эквивалентны интегральному уравнению

$$U(x, y, z) = \int_0^x \int_0^y \int_0^z f(\xi, \eta, \zeta, U, U_\xi, U_\eta, U_\zeta, U_{\xi\eta}, U_{\xi\zeta}, U_{\eta\zeta}) d\xi\, d\eta\, d\zeta + W(x, y, z),$$

$W(x, y, z) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, z) + \varphi_3(y, z) - \lambda_2(y) - \lambda_3(z) - \lambda_1(x) - \varphi_1(0, 0)$, решение которого можно получить с помощью последовательных приближений

$$U_n(x, y, z) = W(x, y, z) +$$
$$+ \int_0^x \int_0^y \int_0^z f\left(\xi, \eta, \zeta, U_{n-1} \frac{\partial U_{n-1}}{d\xi}, \frac{\partial U_{n-1}}{d\eta}, \frac{\partial U_{n-1}}{d\zeta}, \frac{\partial^2 U_{n-1}}{d\xi d\eta}, \frac{\partial^2 U_{n-1}}{d\xi d\zeta}, \frac{\partial^2 U_{n-1}}{d\eta d\zeta}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta, \ \ n = 1, 2, \dots, U_0 \equiv 0.$$

Для разностей $V_n(x, y, z) = U_{n+1}(x, y, z) - U_n(x, y, z)$, $n = 1, 2, \dots$, с помощью (1) нетрудно получить оценки $|V_n| < \frac{7M}{A^2 K^3} \frac{(3KLA)^{n+2}}{(n+2)!}$, $K = L^2 + 3L + 3$, $L = \max(x_1, y_1, z_1)$, $M = \max\limits_{\overline{D}} \left(|V_0|, \left|\frac{\partial V_0}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial V_0}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial V_0}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y}\right|, \left|\frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial z}\right|, \left|\frac{\partial^2 V_0}{\partial y \partial z}\right|\right)$, а для их первых производных $\left|\frac{\partial V_n}{\partial \theta}\right| < \frac{7M}{AK^2} \frac{(3KLA)^{n+1}}{(n+1)!}$,

$\theta = x, y, z$. Вторые же смешанные производные по (x,y), (x,z), (y,z) не превосходят по модулю $\frac{7M}{K}\frac{(3KLA)^n}{n!}$. Очевидно, из этих неравенств следует равномерная сходимость $\{U_n\}$ вместе с первыми и смешанными производными, что обеспечивает существование решения задачи 1. Его единственность устанавливается стандартным для метода последовательных приближений приемом. Следовательно, верна

Теорема 1. *Решение задачи Гурса существует и единственно.*

Замечание. Аналогично доказывается однозначная разрешимость плоской задачи

$$U_{xy} = f(x, y, z, U, U_x, U_y), \quad U(x, 0) = \varphi_1(x), \quad U(0, y) = \varphi_2(y), \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \tag{5}$$

в $G = \{0 < x < x_1,\ 0 < y < y_1\}$.

2. Следующую задачу (с нормальными производными в граничных условиях) будем рассматривать при дополнительных предположениях относительно правой части уравнения (2): она допускает выделение линейной части и при этом имеет специальную структуру по производным искомой функции. А именно, речь идет об уравнении вида

$$U_{xyz} + aU_{xy} + bU_{xz} + cU_{yz} + dU_x + eU_y + gU_z + hU = f(x, y, z, U, \lambda U_x, \mu U_y, \nu U_z, \alpha U_{xy}, \beta U_{xz}, \gamma U_{yz}), \tag{6}$$

где λ, μ, ν, α, β, γ — непрерывные на $\overline{D}$ функции. Предполагается, что на $\overline{D}$

$$a \in C^{(1,1,0)}, \quad b \in C^{(1,0,1)}, \quad c \in C^{(0,1,1)}, \quad d \in C^{(1,0,0)}, \quad e \in C^{(0,1,0)}, \quad g \in C^{(0,0,1)}, \quad h \in C^{(0,0,0)}. \tag{7}$$

Задача 2. Найти решение $U \in C^{(1,1,1)}(D) \cap C(\overline{D})$ уравнения (6) с краевыми условиями, получаемыми заменой в (3) хотя бы одного значения U значением ее нормальной производной из набора

$$U_z(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \quad U_y(x, 0, z) = \psi_2(x, z), \quad U_z(0, y, z) = \psi_3(y, z), \quad \psi_k \in C^{(1,1)}(D_k). \tag{8}$$

Прежде всего изучим связи между φ_k и ψ_k.

Сначала займемся ситуацией на D_1. Интегрируя (6) по второму и третьему аргументам в пределах (ε_2, y), (ε_3, z) и перейдя к пределу при $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$ с учетом (3) и (8), получаем

$$\begin{gathered} c(0,y,z)\varphi_3(y,z) + \int_0^y [g(0,\eta,z) - c_\eta(0,\eta,z)]\varphi_3(\eta,z)d\eta + \int_0^z [e(0,y,\zeta) - c_\zeta(0,y,\zeta)]\varphi_3(y,\zeta)d\zeta + \\ + \int_0^y\int_0^z [c_{\eta\zeta}(0,\eta,\zeta) - e_\eta(0,\eta,\zeta) - g_\zeta(0,\eta,\zeta) + h(0,\eta,\zeta)]\varphi_3(\eta,\zeta)d\eta\, d\zeta + F(y,z) = \\ = \int_0^y\int_0^z f(0,\eta,\zeta,\varphi_3(\eta,\zeta),\lambda\psi_3(\eta,\zeta),\mu\varphi_{3\eta}(\eta,\zeta),\nu\varphi_{3\zeta}(\eta,\zeta),\alpha\psi_{3\eta}(\eta,\zeta),\beta\psi_{3\zeta}(\eta,\zeta),\gamma\varphi_{3\eta\zeta}(\eta,\zeta))\,d\eta\, d\zeta, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} F(y,z) = \psi_3(y,z) - \psi_3(0,z) - \psi_3(y,0) + \psi_3(0,0) + c(0,0,0)\varphi_1(0,0) - c(0,0,z)\varphi_2(0,z) - \\ -c(0,y,0)\varphi_1(0,y) - \int_0^y\int_0^z [a_\eta(0,\eta,\zeta) + b_\zeta(0,\eta,\zeta) - d(0,\eta,\zeta)]\psi_3(\eta,\zeta)d\eta\, d\zeta + \\ + \int_0^z [c_\zeta(0,0,\zeta) - e(0,0,\zeta)]\varphi_2(0,\zeta)d\zeta + \int_0^z [a(0,y,\zeta)\psi_3(y,\zeta) - a(0,0,\zeta)\psi_3(0,\zeta)]d\zeta + \\ + \int_0^y [b(0,\eta,z)\psi_3(\eta,z) - b(0,\eta,0)\psi_3(\eta,0)]d\eta + \int_0^y [c_\eta(0,\eta,0) - g(0,\eta,0)]\psi_3(0,\eta)d\eta. \end{gathered}$$

Очевидно, если функция ψ_3 известна, то (9) можно рассматривать как интегральное уравнение для φ_3. Непосредственно усматривается, что $\varphi_1(0,y) = \varphi_3(y,0)$ и $\varphi_3(0,z) = \varphi_2(0,z)$ не могут быть найдены из (9) и в дальнейшем, если не представится возможности их определить из других соображений, должны рассматриваться как произвольные функции.

Предположения (7) позволяют продифференцировать (9) и получить уравнение

$$c(0,y,z)\varphi_{3yz}(y,z)+e(0,y,z)\varphi_{3y}(y,z)+g(0,y,z)\varphi_{3z}(y,z)+h(0,y,z)\varphi_3(y,z)+A_1(y,z)=$$
$$=f\Big(0,y,z,\varphi_3(y,z),\lambda(0,y,z)\psi_3(y,z),\mu(0,y,z)\varphi_{3y}(y,z),\nu(0,y,z)\varphi_{3z}(y,z),\alpha(0,y,z)\psi_{3y}(y,z),$$
$$\beta(0,y,z)\psi_{3z}(y,z),\gamma(0,y,z)\varphi_{3yz}(y,z)\Big), \quad (10)$$

где $A_1(y,z)=\psi_{3yz}(y,z)+a(0,y,z)\psi_{3y}(y,z)+b(0,y,z)\psi_{3z}(y,z)+d(0,y,z)\psi_3(y,z)$.

Вместе с условиями $\varphi_3(y,0)=\lambda_2(y)$, $\varphi_3(0,z)=\lambda_3(z)$ оно представляет собой плоскую задачу Гурса вида (5). Будем различать следующие случаи:

1) $\gamma(0,y,z)=0$, $c(0,y,z)\neq 0$. Тогда (10) имеет вид

$$c(0,y,z)\varphi_{3yz}(y,z)+e(0,y,z)\varphi_{3y}(y,z)+g(0,y,z)\varphi_{3z}(y,z)+h(0,y,z)\varphi_3(y,z)+A_1(y,z)=$$
$$=f\Big(0,y,z,\varphi_3(y,z),\lambda(0,y,z)\psi_3(y,z),\mu(0,y,z)\varphi_{3y}(y,z),\nu(0,y,z)\varphi_{3z}(y,z),$$
$$\alpha(0,y,z)\psi_{3y}(y,z),\beta(0,y,z)\psi_{3z}(y,z),0\Big).$$

Уравнение имеет единственное решение, зависящее от $\lambda_2(y)$, $\lambda_3(z)$.

2) $\gamma(0,y,z)=\mu(0,y,z)=\nu(0,y,z)=0$, $c(0,y,z)\equiv g(0,y,z)\equiv 0$, $e(0,y,z)\neq 0$. Тогда

$$e(0,y,z)\varphi_{3y}(y,z)+h(0,y,z)\varphi_3(y,z)+A_1(y,z)=$$
$$=f(0,y,z,\varphi_3(y,z),\lambda(0,y,z)\psi_3(y,z),0,0,\alpha(0,y,z)\psi_{3y}(y,z),\beta(0,y,z)\psi_{3z}(y,z),0). \quad (11)$$

Интегрируя (11) по y, получаем

$$\varphi_3(y,z)=A_3(y,z)+\int_0^y h_1(0,\eta,z)\varphi_3(\eta,z)d\eta+$$
$$+\int_0^y\frac{1}{e(0,\eta,z)}f(0,\eta,z,\varphi_3(\eta,z),\lambda(0,\eta,z)\psi_3(\eta,z)0,0,\alpha(0,\eta,z)\psi_{3\eta}(\eta,z),\beta(0,\eta,z)\psi_{3z}(\eta,z),0)\,d\eta, \quad (12)$$

где $A_3(y,z)=\varphi_3(0,z)-\int_0^y\frac{A_1(\eta,z)}{e(0,\eta,z)}d\eta$, $h_1(0,y,z)=-\frac{h(0,y,z)}{e(0,y,z)}$.

Если функция ψ_3 известна, то (12) есть интегральное уравнение для $\varphi_3(y,z)$, из которого значение $\lambda_3(z)$ не может быть найдено. Его решение существует и зависит от $\lambda_3(z)$.

3) $\gamma(0,y,z)=\mu(0,y,z)=\nu(0,y,z)=0$, $c(0,y,z)\equiv e(0,y,z)\equiv 0$, $g(0,y,z)\neq 0$. В этом случае

$$g(0,y,z)\varphi_{3z}(y,z)+h(0,y,z)\varphi_3(y,z)+A_1(y,z)=$$
$$=f(0,y,z,\varphi_3(y,z),\lambda(0,y,z)\psi_3(y,z),0,0,\alpha(0,y,z)\psi_{3y}(y,z),\beta(0,y,z)\psi_{3z}(y,z),0). \quad (13)$$

Интегрируя (13) по z, приходим к уравнению

$$\varphi_3(y,z)=A_5(y,z)+\int_0^z h_2(0,y,\zeta)\varphi_3(y,\zeta)d\zeta+$$
$$+\int_0^z\frac{1}{g(0,y,\zeta)}f(0,y,\zeta,\varphi_3(y,\zeta),\lambda(0,y,\zeta)\psi_3(y,\zeta)0,0,\alpha(0,y,\zeta)\psi_{3y}(y,\zeta),\beta(0,y,\zeta)\psi_{3\zeta}(y,\zeta),0)\,d\zeta,$$

где $A_5(y,z)=\varphi_3(y,0)-\int_0^z\frac{A_1(y,\zeta)}{g(0,y,\zeta)}d\zeta$, $h_2(0,y,z)=-h(0,y,z)/g(0,y,z)$, из которого $\varphi_3(y,z)$ определяется однозначно через ψ_3 и $\lambda_2(y)$.

4) $\gamma(0,y,z)=\mu(0,y,z)=\nu(0,y,z)=0$, $c(0,y,z)\equiv e(0,y,z)\equiv g(0,y,z)\equiv 0$, $h(0,y,z)\neq 0$. Имеем

$$h(0,y,z)\varphi_3(y,z)+A_1(y,z)=$$
$$=f(0,y,z,\varphi_3(y,z),\lambda(0,y,z)\psi_3(y,z),0,0,\alpha(0,y,z)\psi_{3y}(y,z),\beta(0,y,z)\psi_{3z}(y,z),0),$$

т. е. решение $\varphi_3(y,z)$ существует и определяется однозначно.

Перейдем к ситуации на D_2. Роль (10) играет уравнение

$$b(x,0,z)\varphi_{2xz}(x,z)+d(x,0,z)\varphi_{2x}(x,z)+g(x,0,z)\varphi_{2z}(x,z)+h(x,0,z)\varphi_2(x,z)+B_1(x,z)=$$
$$=f\Big(x,0,z,\varphi_2(x,z),\lambda(x,0,z)\varphi_{2x}(x,z),\mu(x,0,z)\psi_2(x,z),\nu(x,0,z)\varphi_{2z}(x,z),\alpha(x,0,z)\psi_{2x}(x,z),$$
$$\beta(x,0,z)\varphi_{2xz}(x,z),\gamma(x,0,z)\psi_{2z}(x,z)\Big),$$

где $B_1(x,z)=\psi_{2xz}(x,z)+a(x,0,z)\psi_{2x}(x,z)+c(x,0,z)\psi_{2z}(x,z)+e(x,0,z)\psi_3(x,z)$.

Картина определения $\varphi_2(x,z)$ аналогична ситуации на D_1 — здесь тоже можно выделить четыре варианта:

1) $\beta(x,0,z)\equiv 0$, $b(x,0,z)\neq 0$, $\varphi_2(x,z)$ зависит от $\lambda_1(x)$ и $\lambda_3(z)$;

2) $\beta(x,0,z)\equiv\lambda(x,0,z)\equiv\nu(x,0,z)\equiv 0$, $b(x,0,z)\equiv g(x,0,z)\equiv 0$, $d(x,0,z)\neq 0$, $\varphi_2(x,z)$ зависит от $\lambda_1(x)$;

3) $\beta(x,0,z)\equiv\lambda(x,0,z)\equiv\nu(x,0,z)\equiv 0$, $b(x,0,z)\equiv d(x,0,z)\equiv 0$, $g(x,0,z)\neq 0$, $\varphi_2(x,z)$ зависит от $\lambda_3(z)$;

4) $\beta(x,0,z)\equiv\lambda(x,0,z)\equiv\nu(x,0,z)\equiv 0$, $b(x,0,z)\equiv g(x,0,z)\equiv d(x,0,z)\equiv 0$, $h(x,0,z)\neq 0$, $\varphi_2(x,z)$ определяется однозначно.

Наконец, на D_3 уравнение для φ_1 принимает вид

$$a(x,y,0)\varphi_{1xy}(x,y)+d(x,y,0)\varphi_{1x}(x,y)+e(x,y,0)\varphi_{1y}(x,y)+h(x,y,0)\varphi_1(x,y)+C_1(x,y)=$$
$$=f\Big(x,y,0,\varphi_1(x,y),\lambda(x,y,0)\varphi_{1x}(x,y),\mu(x,y,0)\varphi_{1y}(x,y),\nu(x,y,0,)\psi_1(x,y),\alpha(x,y,0)\varphi_{1xy}(x,y),$$
$$\beta(x,y,0)\psi_{1x}(x,y),\gamma(x,y,0)\psi_{1y}(x,y)\Big),$$

где $C_1(x,y)=\psi_{1xy}(x,y)+b(x,y,0)\psi_{1x}(x,y)+c(x,y,0)\psi_{1y}+g(x,y,0)\psi_1(x,y)$.

Аналогично ситуации на D_2 для D_3 приведем только условия, накладываемые на коэффициенты

1) $\alpha(x,y,0)\equiv 0$, $a(x,y,0)\neq 0$, $\varphi_1(x,y)$ зависит от $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(y)$;

2) $\alpha(x,y,0)\equiv\lambda(x,y,0)\equiv\mu(x,y,0)\equiv 0$, $a(x,y,0)\equiv e(x,y,0)\equiv 0$, $d(x,y,0)\neq 0$, $\varphi_1(x,y)$ определяется через $\lambda_1(x)$;

3) $\alpha(x,y,0)\equiv\lambda(x,y,0)\equiv\mu(x,y,0)\equiv 0$, $a(x,y,0)\equiv d(x,y,0)\equiv 0$, $e(x,y,0)\neq 0$, $\varphi_1(x,y)$ вычисляется через $\lambda_2(y)$;

4) $\alpha(x,y,0)\equiv\lambda(x,y,0)\equiv\mu(x,y,0)\equiv 0$, $a(x,y,0)\equiv d(x,y,0)\equiv e(x,y,0)\equiv 0$, $h(x,y,0)\neq 0$ однозначное определение $\varphi_1(x,y)$.

Обратимся теперь к различным вариантам задачи 2, чтобы выяснить возможность и характер их редукции к задаче Гурса для (2). Условия типа (3) обозначим через Γ, а типа (8) — через N, причем носители этих условий всегда будем брать в последовательности D_1, D_2, D_3. Если не считать варианты задач, получающихся переменой ролей независимых переменных, то, очевидно, получим три задачи, которые естественно обозначить ΓΓN, ΓNN, NNN. Очевидно, для вариантов ΓNN и NNN нужно комбинировать случаи 1)–4) на различных D_k. При этом некоторые из функций λ_k $(k=1,2,3)$ либо определятся через исходные данные того или иного случая задачи 2, либо нет. Могут появляться еще условия согласования, порождаемые соотношениями (4). В первом варианте ΓΓN λ_1 и λ_3 сразу определяются, а на исходные данные требуется наложить условие согласования порождаемое соотношением $\varphi_1(0,y)=\varphi_3(y,0)$. Поэтому верна

Теорема 2. *Вариант* ΓΓN *задачи* 2 *однозначно разрешим при одном условии согласования.*

В варианте ΓNN комбинируются случаи 1)–4) на D_1 и D_2. Обозначим эти комбинации парой индексов, первая цифра которой отвечает случаю из ситуации на D_1, а вторая — на D_2. Если отбросить комбинации, получающиеся переменой ролей D_1 и D_2, то в результате получится

Теорема 3. *В случаях* 11, 12, 13, 14, 22, 24 *редукция варианта* ΓNN *к задаче Гурса осуществляется с точностью до произвольной функции* $\lambda_3(z)$, *в остальных случаях — однозначно. Условия согласования отсутствуют в комбинациях* 24, 25, 44; *одно такое условие — в* 22; *по два — в* 12, 14, 33; *три — в* 11, 13.

В варианте NNN комбинируются ситуации на D_1, D_2, D_3. Всего существенно различных комбинаций будет 10. Наборы индексов, составленных по указанному для ΓNN правилу, будут трехзначными. Результатом будет

Теорема 4. *В случае* 444 *осуществляется однозначная редукция варианта* NNN *к задаче Гурса. В случаях* 122, 144, 334 *эта редукция осуществляется с точностью до* $\lambda_2(y)$ *и* $\lambda_3(z)$. *Наконец, в случаях* 111, 112, 113, 114, 133, 134 *редукция осуществляется с точностью до* $\lambda_3(z)$, $\lambda_2(y)$, $\lambda_1(x)$. *Условия согласования отсутствуют в комбинациях* 334, 444; *по два таких условия — в* 122, 134, 144; *три — в* 111, 112, 113, 114, 133.

Поскольку λ_k $(k = 1, 2, 3)$ представляют собой не найденные в процессе рассуждений значения искомой функции на ребрах D, то ясно, что, дополняя постановку задачи этими значениями, получим во всех вышеперечисленных вариантах однозначную редукцию к задаче Гурса. В силу теоремы 1 это будет означать однозначную разрешимость исходной задачи 2 с условиями согласования или без них.

В заключение отметим, что в случае линейной по семи аргументам функции f в (2) подобные задачи были изучены, основываясь на методе Римана, в ([3]; [4], с. 101-104). Изложенный в данной статье материал можно рассматривать как определенное распространение содержания указанных публикаций на случай нелинейных уравнений.

Литература

1. Бондаренко Б.А. *Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных.* – Ташкент: ФАН, 1987. – 146 с.
2. Фаге М.К. *Операторно-аналитические функции одной независимой переменной* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1958. – Т. 7. – С. 227–268.
3. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Трехмерные характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях* // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36. – № 6. – С. 833–836.
4. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Казанск. матем. о-во, 2001. – 226 с.

Казанский государственный университет

Поступила 09.02.2005