ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.548.9

Н.Л. ВАСИЛЕВСКИЙ, М.В. ШАПИРО

О КЕРН-ФУНКЦИИ БЕРГМАНА В КВАТЕРНИОННОМ АНАЛИЗЕ

Введение

В предлагаемой статье вводится и изучается керн-функция Бергмана (= ядро Бергмана = ядерная функция Бергмана) и проектор Бергмана, т.е. интегральный оператор с ядром Бергмана, для кватернионных гиперголоморфных функций. Функция Бергмана K_Ω произвольной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ в одномерном комплексном анализе имеет много эквивалентных определений, даваемых в различных терминах [5]. Как нам представляется, наиболее эффективным является определение

$$K_\Omega(x,\overline{\zeta}) := -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(x,\zeta)}{\partial x \partial\overline{\zeta}}, \tag{0.1}$$

где G обозначает классическую функцию Грина области Ω.

Это определение позволяет получить много свойств ядра K_Ω. Среди них, например, интегральное представление ядра K_Ω, которое полезно при изучении поведения функции Бергмана вблизи границы области $\partial\Omega$, а также равенство

$$B = I - S_\Omega S_\Omega^* + K, \tag{0.2}$$

где B обозначает проектор Бергмана,

$$S_\Omega[\varphi](z) := -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\varphi(\zeta)ds_\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad S_\Omega^*[\varphi](z) = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\varphi(\zeta)ds_\zeta}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2},$$

K есть компактный оператор. Равенство (0.2) применяется при изучении различных алгебр, содержащих проектор Бергмана, а также в приложениях к уравнениям в частных производных (см., напр., [2], [3]).

В многомерном комплексном анализе простое соотношение между функциями Бергмана и Грина теряется. Чтобы исследовать свойства ядерной функции Бергмана, приходится применять другие средства (напр., [13], [8], [9]). Одно из возможных объяснений этого связано с тем фактом, что в $\mathbb{C}^n$ нет "достаточно хороших" аналогов дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, с помощью которых производится факторизация двумерного оператора Лапласа Δ_2,

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\Delta_2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Хорошие эллиптические аналоги для $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ существуют при других подходах к многомерному развитию идей анализа в $\mathbb{C}$, а именно, в клиффордовом и кватернионном анализах. Гиперкомплексные операторы Коши-Римана сохраняют большинство свойств для одномерного случая и, что особенно важно, дают факторизацию соответствующего оператора Лапласа. Это обеспечивает структурную аналогию с одномерным комплексным анализом и позволяет использовать равенство (0.1) для того, чтобы обобщить понятие керн-функции Бергмана, а также позволяет следовать общей линии одномерных закономерностей ядра Бергмана. Мы ограничиваемся здесь кватернионным случаем только для простоты и чтобы продемонстрировать главные идеи.

Известно совсем немного работ по этой проблеме. В ([7], § 29) функция Бергмана в клиффордовом анализе построена для единичного шара с использованием общего подхода к воспроизводящим ядрам в гильбертовом пространстве. В ([11], гл. 3) для случая гиперголоморфных функций $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ построено ортогональное разложение пространства $L_2(\Omega, \mathbb{H})$. Первое слагаемое есть множество гиперголоморфных функций, второе — описывается в терминах некоторого пространства Соболева и кватернионного оператора Коши-Римана. Таким образом, по существу авторы дают описание проектора Бергмана в этой ситуации. В [4] автор использует язык $\mathbb{C}^2$-значных векторов и 2×2-матриц с операторными элементами, что является матричным описанием одного частного случая наших кватернионных построений. Подробно об этом написано в препринте [15], в котором, кроме доказательств всех теорем данной статьи, можно найти ряд других фактов, связанных с гиперкомплексной функцией Бергмана.

1. Элементы гиперголоморфного кватернионного анализа

Будем использовать следующие обозначения и определения (см. [1], [14], а также [6], [7], [10]).

Обозначим через $\mathbb{H}$ тело вещественных кватернионов. Пусть $\psi := \{\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3\}$ есть ортонормированная (в обычном евклидовом смысле) система кватернионов. На множестве $C^1(\Omega, \mathbb{H})$ определим операторы ${}^{\psi}D$ и D^{ψ} равенствами

$$ {}^{\psi}D[f] := \sum_{k=0}^{3} \psi^k \frac{\partial f}{\partial x_k} =: \sum_{k=0}^{3} \psi^k \partial_k[f]; \quad D^{\psi}[f] := \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_k} \psi^k =: \sum_{k=0}^{3} \partial_k[f] \psi^k. $$

Тогда на $C^2(\Omega; \mathbb{H})$ 4-мерный оператор Лапласа Δ факторизуется в виде

$$ \Delta = {}^{\psi}D^{\overline{\psi}}D = {}^{\overline{\psi}}D^{\psi}D = D^{\psi}D^{\overline{\psi}} = D^{\overline{\psi}}D^{\psi}, $$

где “черта” обозначает кватернионное сопряжение.

Для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ введем множества

$$ {}^{\psi}\mathfrak{M}(\Omega) := \ker {}^{\psi}D = \{f \in C^1(\Omega, \mathbb{H}) \mid {}^{\psi}D[f] = \mathcal{O}_\Omega\}, $$
$$ \mathfrak{M}^{\psi}(\Omega) := \ker D^{\psi} = \{f \in C^1(\Omega, \mathbb{H}) \mid D^{\psi}[f] = \mathcal{O}_\Omega\}. $$

Их элементы называются лево-(право-)ψ-гиперголоморфными функциями. Они являются точными структурными аналогами голоморфных функций одного комплексного переменного.

Обозначим через $d\hat{x}_k$ дифференциальную форму $dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ с опущенным множителем dx_k. Тогда

$$ \sigma_{\psi,x} := \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \psi^k d\hat{x}_k $$

есть аналог дифференциала независимой переменной dz.

Если θ_4 — фундаментальное решение оператора Лапласа, т.е.

$$ \theta_4(x) := -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{|x|^2}, $$

то

$$ \mathcal{K}_\psi(x) := {}^{\overline{\psi}}D[\theta_4](x) = \frac{1}{2\pi^2 |x|^4} \sum_{k=0}^{3} \overline{\psi^k} \cdot x_k $$

есть фундаментальное решение оператора ${}^{\psi}D$, играющее роль ядра Коши в гиперголоморфной теории.

2. Понятие кватернионного ядра Бергмана

Пусть Ω есть ограниченная многосвязная область в $\mathbb{R}^4$ с гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma$. Обозначим через g гармоническую (или классическую) функцию Грина области Ω. (Подробности см. напр., [12], с. 261.)

Для произвольного структурного набора ψ введем функцию

$$ {}_{\psi}\mathcal{B}(x,\xi) := D_{\xi}^{\psi} \cdot {}^{\overline{\psi}}D_x[g](x,\xi) = {}^{\overline{\psi}}D_x \cdot {}^{\psi}D_{\xi}[g](x,\xi), \quad (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \operatorname{diag}. $$

Будем называть ее кватернионным ядром Бергмана.

Теорема 1. *Кватернионное ядро Бергмана обладает следующими свойствами:*

1. *для любого* $\xi \in \Omega$
$$ {}_{\psi}\mathcal{B}(\,\cdot,\xi) \in {}^{\psi}\mathfrak{M}(\Omega), $$
2. *для любого* $x \in \Omega$
$$ {}_{\psi}\mathcal{B}(x,\cdot\,) \in \mathfrak{M}^{\overline{\psi}}(\Omega), $$
3. ${}_{\psi}\mathcal{B}(x,\xi) = \overline{{}_{\psi}\mathcal{B}(\xi,x)}$.

Теорема 2 (воспроизводящее свойство кватернионного ядра Бергмана). *Пусть* $\Gamma = \partial\Omega$ — *гладкая поверхность и* $f \in {}^{\psi}\mathfrak{M}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. *Тогда*

$$ {}^{\psi}B[f](x) := \int_{\Omega} {}_{\psi}\mathcal{B}(x,\xi) f(\xi) d\xi = f(x), \quad x \in \Omega. $$

Естественное название для ${}^{\psi}B$ — кватернионный оператор Бергмана.

3. Интегральное представление кватернионного ядра Бергмана

Для произвольных структурных наборов ψ и φ введем на множестве $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \operatorname{diag}$ функцию

$$ {}_{\varphi,\psi}\mathcal{L} := {}^{\varphi}D_{\xi} \cdot {}^{\psi}D_x[g](x,\xi) = D_x^{\psi} \cdot {}^{\varphi}D_x[g](x,\xi), $$

для которой справедливо представление

$$ {}_{\overline{\psi},\psi}\mathcal{L} := {}_{\psi}\overline{\mathcal{B}} \quad \text{или} \quad {}_{\psi}\mathcal{B}(x,\xi) = {}_{\overline{\psi},\psi}\mathcal{L}(\xi,x). $$

Полезно представление

$$ {}_{\overline{\varphi},\psi}\mathcal{L}(x,\xi) = {}_{\varphi,\psi}\Lambda(x,\xi) + {}_{\varphi,\psi}\ell(x,\xi), $$

где

$$ {}_{\varphi,\psi}\Lambda(x,\xi) = {}^{\varphi}D_{\xi} \cdot {}^{\psi}D_x[\theta_4(\xi - x)] = D_x^{\psi} \cdot {}^{\varphi}D_{\xi}[\theta_4(\xi - x)] = $$
$$ = \frac{4 \cdot (\xi - x)_{\varphi} \cdot (\xi - x)_{\psi} - |\xi - x|^2 \cdot \sum\limits_{k=0}^{3} \varphi^k \cdot \psi^k}{2\pi^2 \cdot |\xi - x|^6}, $$

$$ {}_{\varphi,\psi}\ell(x,\xi) = {}^{\varphi}D_{\xi} \cdot {}^{\psi}D_x[h](x,\xi) = D_x^{\psi} \cdot {}^{\varphi}D_{\xi}[h](x,\xi). $$

Лемма 1. *Пусть* $g_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ — *достаточно гладкая функция, для которой* Γ *есть поверхность уровня. Тогда для любого структурного набора* ψ *и для любой точки* $\xi \in \Gamma$

$$ \nu_{\psi} \cdot {}^{\overline{\psi}}D[g_0] = \varepsilon_0 \cdot |\operatorname{grad} g_0(\xi)| $$

и, следовательно, левая часть не зависит от ψ. *Здесь* $\varepsilon_0 = \pm 1$, $\vec{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ *есть единичный вектор внешней нормали к* Γ *в точке* $\xi \in \Gamma$,

$$ \nu_{\psi} := \sum_{k=0}^{3} \nu_k \cdot \psi^k. $$

Следствие 1. Функции ${}_{\psi}\mathcal{B}$ и ${}_{\varphi,\psi}\mathcal{L}$ связаны формулой

$$\nu_{\psi}(\xi) \cdot {}_{\psi}\mathcal{B}(\xi, x) = \nu_{\overline{\varphi}} \cdot {}_{\varphi,\psi}\mathcal{L}(x, \xi), \quad (x, \xi) \in \Omega \times \Gamma.$$

Теорема 3 (интегральное представление кватернионного ядра Бергмана). *Пусть ψ и φ — два структурных набора с единственным требованием*

$$\langle \overline{\varphi}, \psi \rangle_{\mathbb{H}^4} = \sum_{k=0}^{3} \varphi^k \cdot \psi^k = 0, \tag{3.1}$$

тогда выполняется равенство

$${}_{\psi}\mathcal{B}(x, \xi) = \int_{\Gamma} \mathcal{K}_{\psi}(\tau - x) \cdot \sigma_{\overline{\varphi},\tau} \cdot {}_{\varphi,\psi}\Lambda(\tau - \xi) + \int_{\Omega} \overline{{}_{\varphi,\psi}\ell(x, \tau)} \cdot {}_{\varphi,\psi}\ell(\xi, \tau) d\tau$$

для всех $(x, \xi) \in \Omega \times \Omega$.

Следствие 2.

$${}_{\psi}\mathcal{B}(x, \xi) = \int_{\Gamma} {}_{\varphi,\psi}\overline{\Lambda(\tau - x)} \cdot \sigma_{\varphi,\tau} \cdot \mathcal{K}_{\overline{\psi}}(\tau - \xi) + \int_{\Omega} {}_{\varphi,\psi}\overline{\ell(x, \tau)} \cdot {}_{\varphi,\psi}\ell(\xi, \tau) d\tau.$$

Замечание. Отметим, что в отличие от обычной дуальности комплексного анализа "голоморфность–антиголоморфность", в кватернионном анализе существует целое семейство классов гиперголоморфных функций (см. по этому поводу [1], [14], [16]). Оказалось, что для исследования ядра и оператора Бергмана, ассоциированного с конкретным классом гиперголоморфных функций, *необходимо* привлекать теорию *другого* такого класса, связанного с исходным соотношением (3.1). В комплексной одномерной ситуации это условие просто вырождается, и оба класса оказываются совпадающими (обычный класс голоморфных функций).

4. Гиперголоморфные пространства Бергмана и гиперголоморфный проектор Бергмана

Введем интегралы

$${}^{\psi}T[f](x) := -\int_{\Omega} \mathcal{K}_{\psi}(\tau - x) \cdot f(\tau) d\tau = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\Omega} \frac{\sum\limits_{k=0}^{3} \overline{\psi^k}(\tau_k - x_k)}{|\tau - x|^4} f(\tau) d\tau$$

и

$${}^{\varphi,\psi}S[f](x) := \frac{2}{\pi^2} \int_{\Omega} \frac{(\tau - x)_{\overline{\psi}} \cdot (\tau - x)_{\overline{\varphi}}}{|\tau - x|^6} f(\tau) d\tau.$$

Их ядра показывают, что эти интегралы определяют линейные ограниченные операторы в правых $\mathbb{H}$-модулях $L_p(\Omega, \mathbb{H})$, $p > 1$, и $C^{0,\mu}(\Omega, \mathbb{H})$.

Теорема 4. *В пространствах $L_p(\Omega, \mathbb{H})$, $p > 1$, и $C^{0,\mu}$ корректно определен оператор ${}^{\psi}D \cdot {}^{\psi}T$, и в этих пространствах*

$${}^{\psi}D \cdot {}^{\psi}T = I.$$

Пусть φ и ψ — два структурных набора со свойством (3.1). *Тогда оператор ${}^{\varphi}D \cdot {}^{\overline{\psi}}T$ корректно определен в пространствах $L_p(\Omega, \mathbb{H})$, $p > 1$, $C^{0,\mu}(\Omega, \mathbb{H})$, и*

$${}^{\varphi}D \cdot {}^{\overline{\psi}}T = {}^{\varphi,\psi}S.$$

Теорема 5. *Гиперголоморфный оператор Бергмана является линейным ограниченным оператором в каждом из пространств $L_p(\Omega, \mathbb{H})$, $p > 1$, и $C^{0,\mu}(\overline{\Omega}, \mathbb{H})$, $0 < \mu < 1$. При этом*

$${}^{\psi}B = I - {}^{\overline{\psi},\overline{\varphi}}S \cdot {}^{\varphi,\psi}S + {}^{\varphi,\psi}C,$$

где φ, ψ — два структурных набора со свойством (3.1), *${}^{\varphi,\psi}C$ — компактный оператор.*

Определение. Для области Ω и структурного набора ψ через ${}_{\psi}\mathcal{A}^p(\Omega, \mathbb{H})$ обозначим подпространство $L_p(\Omega, \mathbb{H})$, $p > 1$, состоящее из всех лево-ψ-гиперголоморфных функций,

$$ {}_{\psi}\mathcal{A}^p(\Omega, \mathbb{H}) := L_p(\Omega, \mathbb{H}) \cap {}^{\psi}\mathfrak{M}(\Omega; \mathbb{H}). $$

Теорема 6. *Гиперголоморфный оператор Бергмана ${}^{\psi}B$ является проектором пространства $L_p(\Omega, \mathbb{H})$, $p > 1$, на ${}_{\psi}\mathcal{A}^p(\Omega; \mathbb{H})$.*

В случае пространства $L_2(\Omega, \mathbb{H})$ проектор ${}^{\psi}B$ является самосопряженным.

Литература

1. Василевский Н.Л., Шапиро М.В. *Кватернионные ψ-моногенные функции, сингулярные операторы с кватернионным ядром Коши и аналоги задачи Римана.* – Одесск. ун-т. – Одесса, 1987. – 68 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 06.06.87, № 629-Ук87.
2. Dzhuraev A. *On a class of systems of singular integral equations on a bounded domain* // Proc. Edinb. Royal Soc. – 1979. – V. 83 A. – P. 347–364.
3. Джураев А.Д. *Метод сингулярных интегральных уравнений.* – М.: Наука, 1987. – 416 с.
4. Dzhuraev A. *On kernel matrices and holomorphic vectors* // Complex Variables. – 1991. – V. 16. – P. 43–57.
5. Bergmann S. *The kernel function and conformal mappings.* – AMS, Providence, R. I., 1970. – 257 p.
6. Brackx F., Delanghe R., Sommen F. *Clifford analysis.* – Boston, Pitman, 1982. – 308 p.
7. Delanghe R., Sommen F., Souček V. *Clifford algebra and spinor valued functions.* – Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1992. – 485 p.
8. Fefferman C. *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains* // Invent. Math. – 1974. – V. 26. – P. 1–65.
9. Fefferman C. *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel and geometry of pseudoconvex domains* // Ann. Math. – 1976. – V. 103. – P. 395–416.
10. Gilbert J., Murray M. *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis.* – Cambridge Univ. Press, 1990. – 334 p.
11. Gurlebeck K., Sproessig W. *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems.* – Birkhauser, 1990. – 254 p.
12. Hayman W.K., Kennedy P.B. *Subharmonic functions.* – Academic Press: London–New York–San Francisco, 1976. – 284 p.
13. Range R.M. *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables.* – Springer: New York–Berlin–Heidelberg, 1986. – 386 p.
14. Shapiro M.V., Vasilevski N.L. *Quaternionic ψ-hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems.* I // Complex variables. – 1995. – V. 27. – P. 17–46.
15. Shapiro M.V., Vasilevski N.L. *On the Bergman kernel function in hyperholomorphic analysis.* – Departamento de Matemáticas, CINVESTAV del I.P.N., Mexico-City. Reporte Interno no. 115, 1993. – 35 p.
16. Shapiro M.V., Vasilevski N.L. *Quaternionic ψ-hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems.* II // Complex variables. – 1995. – V. 27. – P. 67–96.

Отдел математики Национального политехнического института (*Мексика*)
Отдел математики Высшей физико-математической школы (*Мексика*)

Поступила
18.05.1995